

第3章

恒定磁场

3.1 恒定磁场的基本规律

本节简要地复习大学物理中已经学过的恒定磁场的基本规律。

3.1.1 磁感应强度 B

1. 毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律给出一个电流元产生的磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.1)$$

其中 r 是电流元与场点之间的距离, $\mathbf{e}_r$ 是由电流元指向场点的单位矢量。一个线电流回路产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.2)$$

同理,可以写出体电流和面电流产生的磁场

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} dV' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_s dS' \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.4)$$

2. 磁感应线方程

可以仿照电力线方程写出磁感应线方程,在直角坐标系中为

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.5)$$

圆柱坐标系中的磁感应线方程为

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\varphi}{B_\varphi} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.6)$$

球坐标系中的磁感应线方程为

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{B_\varphi} \quad (3.7)$$

3.1.2 恒定磁场的基本方程

恒定磁场的基本方程也是包括高斯定理和环路定理

$$\left\{ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i \right. \quad (3.9)$$

其中 $\sum_i I_i$ 是闭合回路 l 内包围的所有电流(包括传导电流和磁化电流)。有电介质时, 恒定磁场的基本方程可以写为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.10)$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad (3.11)$$

其中 $\sum_i I_i$ 是闭合回路 l 内包围的所有传导电流。

下面来证明(3.10)式, 为了简化, 只讨论无界真空中的磁场。在直流回路 C 的磁场中任取一闭合曲面 S , 穿过 S 面的磁通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2} \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\mathbf{e}_R \times d\mathbf{S}}{R^2} \\ &= \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \left(-\nabla \frac{1}{R} \times d\mathbf{S} \right) \end{aligned}$$

上式的推导中利用了(1.101)式。利用矢量恒等式 $\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV$ (见附录3)

可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi} \cdot \iiint_V \nabla \times \nabla \frac{1}{R} dV$$

因为 $\nabla \times \nabla \frac{1}{R} = 0$, 所以

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.12)$$

由高斯定理可以写出(3.12)式的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

下面就来证明(3.11)式, 在直流闭合回路 C 的磁场中任取一个闭合回路 L , 如图3.1所示, 由毕奥-萨伐尔定律可以写出

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \oint_C \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \\ &= -\frac{I}{4\pi} \oint_L \oint_C \frac{(d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

图3.1中的 P 点(场点)是积分路径 L 上的一个点, 电流回路 C 所包围的表面对场点 P 构成的立体角为 Ω 。 P 点沿回路 L 位移 $d\mathbf{l}$ 时, 立体角改变 $d\Omega$, 这同保持 P 点不动, 而回路 C 位移 $-d\mathbf{l}$ 时立体角的改变是完全一样的。从图3.1中可以看出, 如果回路 C 位移 $-d\mathbf{l}$, 则回路包围的表面由 S 变为 S' , 表面的增量为 $dS = S' - S = \oint_C (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}')$, 即图中 S 与 S' 之间的环形表面 $(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$ 是图中阴影部分平行四边形的面积), dS 对 P 点的立体角为

$$d\Omega = \frac{d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{e}_R)}{R^2}$$

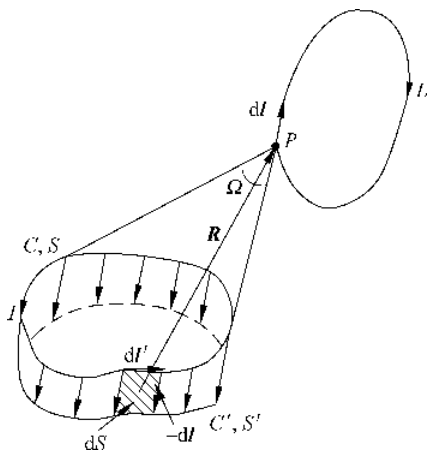


图 3.1 证明安培环路定理示意图

S, S', dS 构成的闭曲面对 P 点的立体角为零, 即 $-\Omega_1 + \Omega_2 + d\Omega = 0$, 所以立体角的变化为

$$\Omega_2 - \Omega_1 = -d\Omega = \oint_C \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}$$

这就是 P 点位移 $d\mathbf{l}$ 时立体角的改变量。 P 点沿着回路 L 移动一周时, 立体角的变化为

$$\Delta\Omega = -\int d\Omega = \oint_L \oint_C \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (3.15)$$

比较(3.14)式和(3.15)式可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (3.16)$$

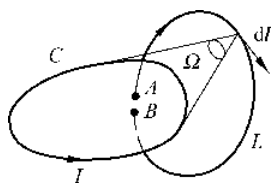
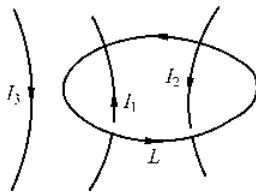
环积分的结果取决于 $\Delta\Omega$, 一般分为两种情况:

(1) 积分回路 L 不与电流回路 C 套链, 如图 3.1 所示。可以看出, 当从某点开始沿闭合回路 L 绕行一周并回到起始点时, 立体角又回复到原来的值, 即 $\Delta\Omega = 0$, 由(3.16)式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.17)$$

(2) 若积分回路 L 与电流回路 C 相套链, 即 L 穿过 C 所包围的面 S , 如图 3.2 所示。如果取积分回路的起点为 S 面上侧的 A 点, 终点为在 S 面下侧的 B 点。由于面元对它上表面上的点所张的立体角为 (-2π) , 对下表面上的点所张的立体角为 $(+2\pi)$, 所以 S 对 A 点的立体角为 (-2π) , 对 B 点的立体角为 $(+2\pi)$, $\Delta\Omega = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi$, 由(3.16)式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \cdot 4\pi = I \quad (3.18)$$


 图 3.2 积分回路 L 与电流回路 C 相套链

 图 3.3 积分回路 L 包围的电流

因为 L 与 C 相套链, I 也就是穿过回路 L 所包围平面 S 的电流, 而且当电流与回路 L 成右手螺旋关系时 I 为正, 反之 I 为负。综合上述两种情况, 可以用一个方程表示为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad (3.19)$$

其中 $\sum_i I_i$ 是 L 所包围的电流的代数和。在图 3.3 中, $\sum_i I_i = I_1 - I_2$, 积分与 I_3 无关。必须说明的是: 环积分与 I_3 无关, 而被积函数 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 却是三个电流回路产生的总磁场强度。

由斯托克斯定理, (3.18) 式的微分形式可以写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.20)$$

(3.13) 式和 (3.20) 式给定了恒定磁场的散度和旋度, 根据亥姆霍兹定理, 恒定磁场的性质是完全确定的。

3.1.3 磁介质的磁化

常用公式

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_0 \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (3.22)$$

其中 $\mathbf{M}$ 是磁化强度矢量。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.24)$$

以上两式适用于各向同性的线性介质, 其中 χ_m 是介质的磁化率。面磁化电流密度和体磁化电流密度分别为

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3.26)$$

磁导率和磁化率的关系可以写为

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (3.27)$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (3.28)$$

其中, μ 是介质的磁导率; μ_0 是真空磁导率; μ_r 是介质的相对磁导率。根据 μ_r 和 χ_m 的取值可以把磁介质分为顺磁质、抗磁质 (顺磁质和抗磁质统称为非铁磁质) 和铁磁质, 顺

磁质的 $\chi_m > 0$ (如铝、锰、氧等), 抗磁质的 $\chi_m < 0$ (如铜、银、氢等), 真空中的 $\chi_m = 0$ 。顺磁质和抗磁质的 χ_m 都非常接近于 0, 所以 μ_r 都非常接近于 1, 因此工程上对于非铁磁性物质 μ_r 都取为 1。铁磁质是非线性介质, (3.23) 式和 (3.24) 式都不成立, 铁磁质的 $\mu_r \gg 1$ (如铁、钴、镍等), 并且不是常数, 随磁场的强弱变化 (从铁磁质的磁滞回线上可以看出)。

关于线性和非线性介质、各向同性和各向异性介质、均匀和非均匀介质的概念与 2.1.6 节中介绍的电介质中的相关概念类似。

例题 3.1 证明 (3.26) 式 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 。

证明 研究磁介质可以用分子电流模型, 任何物质的分子都是由原子组成的, 原子中原子核带正电, 电子带负电, 绕原子核运动。分子中所有电子的运动可以等效为一个电流 i , 称为分子电流。分子电流与其环绕的面积 $\mathbf{S}$ 的乘积称为分子磁矩 $\mathbf{p}_m$, 表达式为

$$\mathbf{p}_m = i\mathbf{S} \quad (3.29)$$

其中 i 和 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{p}_m$ 的方向满足右手关系, 如图 3.4 所示。没有外磁场时, 由于介质内大量分子无规则的热运动, 各分子磁矩的排列是杂乱无章的, 这时介质没有被磁化。在外磁场中, 每个分子磁矩都受到一个力矩的作用, 使其在一定程度上转向外磁场方向, 介质被磁化, 如图 3.5 所示。外磁场越强, 分子磁矩的排列越整齐, 单位体积中分子磁矩的矢量和就越大, 定义磁化强度矢量等于单位体积中分子磁矩的矢量和

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (3.30)$$

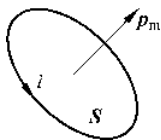


图 3.4 分子电流和分子磁矩

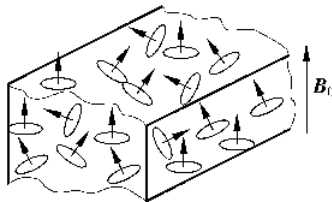


图 3.5 介质磁化

先计算穿过介质内任一曲面 S 的磁化电流 I_m , 曲面 S 的边界为 C , 如图 3.6 所示。可以看出, 在所有的分子电流中, 只有环绕边界 C 的分子电流对穿过 S 面的磁化电流有贡献。为了计算所有环绕边界 C 的分子电流, 采用微积分的方法, 先计算环绕边界 C 上任一线元 $d\mathbf{l}$ 的分子电流。以 $d\mathbf{l}$ 为轴线作一个斜的圆柱面, 底面 ΔS 等于分子电流的面积, 并与分子电流平行, 长度为 $d\mathbf{l}$, 如图 3.7 所示。可以看出, 只有中心在圆柱面内的分子电流环绕 $d\mathbf{l}$, 而中心在圆柱面内的分子电流的数目, 就是圆柱面内分子的数目。设介质的分子密度为 N , 分子电流为 i , 则环绕线元 $d\mathbf{l}$ 的分子电流对磁化电流的贡献为

$$dI_m = N d\mathbf{l} \cos\theta S i = N d\mathbf{l} \cos\theta \mathbf{p}_m$$

由 (3.30) 式可以写出

$$\mathbf{M} = N \mathbf{p}_m \quad (3.31)$$

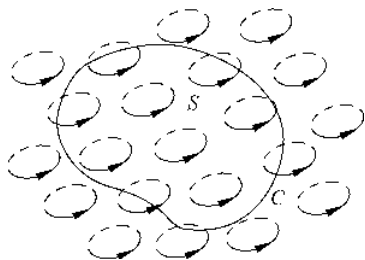

 图 3.6 穿过介质内 S 面的磁化电流

 图 3.7 环绕线元 dl 的分子电流

所以

$$dI_m = M dl \cos\theta = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

穿过 S 面的总的磁化电流为

$$I_m = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

上式左侧的磁化电流可以写成体磁化电流密度对 S 面的积分,右侧的线积分可以利用斯托克斯定理变换为面积分,可得

$$\iint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}$$

最后可得

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

均匀磁介质内部的分子电流相互抵消,介质表面出现磁化电流,如图 3.8 所示。作一个对比,金属导体中自由电子定向运动形成的电流称为**传导电流**;空间中带电粒子定向运动形成的电流称为**运流电流**。

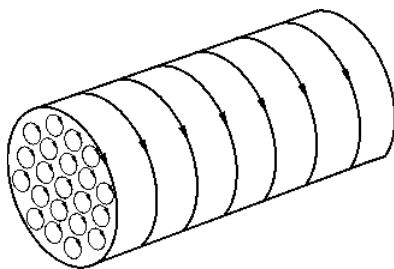


图 3.8 磁介质表面的磁化电流

3.1.4 磁场的计算方法

下面复习一下大学物理中已经学过的磁场的几种计算方法。

1. 利用毕奥-萨伐尔定律计算磁场

根据毕奥-萨伐尔定律,线电流产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.32)$$

体电流、面电流产生的磁感应强度,可以写出类似的方程。利用毕奥-萨伐尔定律计算磁场,有下面两类问题。

(1) 直接利用毕-萨定律积分

例题 3.2 计算长度为 l 的直线电流 I 的磁场。

解 采用圆柱坐标系, 直线电流与 z 轴重合, 直线电流的中点位于坐标原点, 如图 3.9 所示。显然磁场的分布具有轴对称性, 可以只在 φ 等于某一常数的平面内计算磁场。从图 3.9 中可以看出, 直线电流上的任一电流元 $Idl' = e_z Idz'$, 场点 P 的位置矢量 $\mathbf{r} = e_z r + e_r z$, 源点的位置矢量 $\mathbf{r}' = e_r z'$, Idl' 到场点 P 的距离矢量为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = e_r r + e_z(z - z')$, 代入(3.32)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{e_z Idz' \times [e_r r + e_z(z - z')]}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= e_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{rdz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= e_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = e_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

(3.33)式中的 $\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2$ 如图 3.9 所示。一段直线电流的两端无限延长即得到无限长直线电流, 即 $\alpha_1 \rightarrow \pi/2, \alpha_2 \rightarrow -\pi/2$, 利用(3.33)式可以求得无限长直线电流所产生的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = e_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.34)$$

例题 3.3 求半径为 a 的线电流圆环在其垂直轴线上的磁场。

解 采用圆柱坐标系, 圆环轴线与 z 轴重合, 圆环位于 $z = z'$ 平面内, 如图 3.10 所示。圆环上的任一电流元 $Idl' = e_\varphi Ia d\varphi'$, 场点 P 的位置矢量 $\mathbf{r} = e_z z$, 源点的位置矢量 $\mathbf{r}' = e_r a + e_z z'$, Idl' 到场点 P 的距离矢量为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -e_r a + e_z(z - z')$, $\mathbf{R}$ 的模为 $R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= e_R R = R \left[-e_r \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} + e_z \frac{z - z'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} \right] \\ &= R(-e_r \sin\alpha + e_z \cos\alpha) \end{aligned}$$

把 Idl' 和 $\mathbf{R}$ 代入(3.32)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} e_\varphi \times (-e_r \sin\alpha + e_z \cos\alpha) d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi R^2} \left(e_z \sin\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi' + \cos\alpha \int_0^{2\pi} e_r d\varphi' \right) \end{aligned}$$

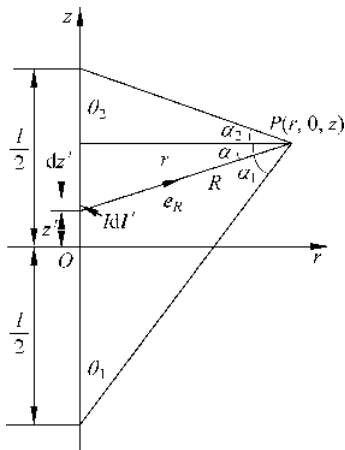


图 3.9 计算直线电流的磁场

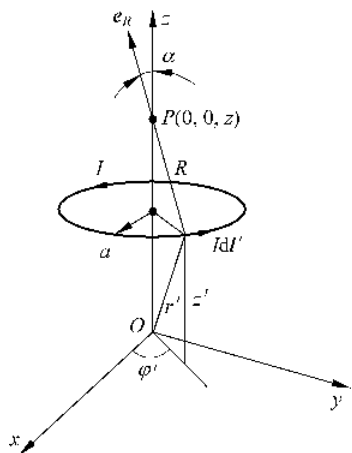


图 3.10 计算载流圆环轴线上的磁场

上式中 $\sin\alpha = \frac{a}{R} \cdot \int_0^{2\pi} e_r d\varphi' = 0$, 因此

$$\mathbf{B}(z) = e_z \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3} = e_z \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (3.35)$$

圆环中心处的磁场 ($z = z'$) 为

$$\mathbf{B}(z') = e_z \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (3.36)$$

(2) 利用(1)中的结论叠加

利用毕奥-萨伐尔定律计算磁场的另一类问题需要利用(3.34)式或(3.35)式, 再利用叠加原理计算。

例题 3.4 一条扁平的直导体带, 宽为 $2a$, 中心线与轴 z 重合, 流过电流 I , 证明在第一象限内

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

其中 α, r_1, r_2 如图 3.11 所示。

解 利用微积分的方法求解, 把导体带分割成许多条无限长载流直导线, 第一象限内 P 点的磁场等于所有这些无限长载流直导线在 P 点产生的磁场的叠加。

设分割出的任意一条无限长载流直导线的宽度为 dx , 其上的电流为 $dI = \frac{I}{2a} dx$, 在 P 点产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi ar}$$

x 分量为

$$dB_x = dB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi ar} \sin\theta \quad (3.37)$$

(3.37)式中含有三个变量 x, r, θ , 作一个变量代换, 由

$$\sin\theta = \frac{y_0}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}}$$

所以

$$d\theta = \frac{y_0 dx}{r^2}, \quad dx = \frac{r^2 d\theta}{y_0}$$

代入(3.37)式可得

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} d\theta$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha$$

由图 3.11 中可以看出 $\theta_1 = \alpha + \theta_2$, B_x 沿 $-x$ 方向。 dB 的 y 分量为

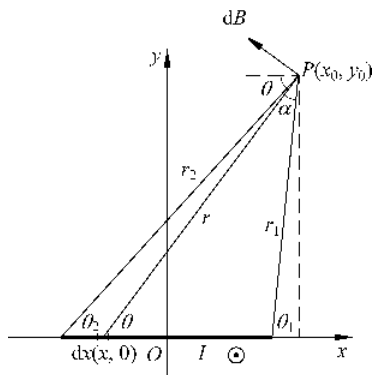


图 3.11 例题 3.4 用图

$$dB_y = dB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi ar} \cos\theta \quad (3.38)$$

同样需要作一个变量代换,由

$$r = \sqrt{y_0^2 + (x_0 - x)^2}, \quad dr = -\frac{(x_0 - x)dx}{r}$$

代入(3.38)式可得

$$dB_y = -\frac{\mu_0 I dr}{4\pi ar}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2. 利用安培环路定理计算

具有轴对称、面对称的问题,计算磁场可以利用安培环路定理,没有磁介质时安培环路定理的表达式为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

有磁介质时安培环路定理的表达式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_{0i}$$

等式右侧是对环路所包围的所有传导电流求和。

例题 3.5 长直导体圆柱中电流均匀分布,电流密度为 J , 其中有一平行的圆柱形空腔,如图 3.12 所示。计算空腔内的磁场并证明空腔内的磁场是均匀的。

解 设半径为 b 带有空腔的导体中的电流方向为 $\odot$, 可以看成是由半径为 b 的实心导体圆柱(电流方向为 $\odot$)与半径为 a 的实心导体圆柱(电流方向为 $\otimes$)的叠加。半径为 b 的实心导体圆柱单独存在时,由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 J \pi r_1^2$$

可以解出

$$B_1 = \frac{\mu_0 J r_1}{2}$$

用矢量可以表示为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J r_1}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{r1} = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_1$$

半径为 a 的实心导体圆柱单独存在时,由安培环路定理可以解出

$$B_2 = \frac{\mu_0 J r_2}{2}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times (-\mathbf{r}_2)$$

空腔内的磁场为

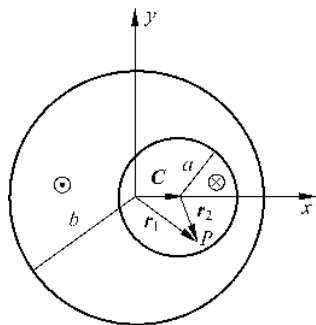


图 3.12 例题 3.5 用图

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 J}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{C}$$

其中 $\mathbf{C}$ 是在如图 3.12 所示的横截面内, 由半径为 b 的实心导体圆柱的轴线指向半径为 a 的实心导体圆柱轴线的的一个常矢量, 所以空腔内的磁场是均匀的。

例题 3.6 铁质的无限长圆管中通有电流 I , 管的内、外半径分别是 a 和 b 。已知铁的磁导率是 μ , 求管壁中、管内、外的磁感应强度 $\mathbf{B}$, 并计算管壁中的体磁化电流密度 $\mathbf{J}_m$ 和面磁化电流密度 $\mathbf{J}_{mS}$ 。

解 设圆柱坐标系的 z 轴与圆管的轴线重合, 场是轴对称的。电流沿 z 轴方向流动, 磁场只有 φ 分量, 管壁中, 由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = H_{2\varphi} \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(r^2 - a^2)$$

所以

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \frac{I}{2\pi r} \quad (a \leq r \leq b)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\varphi \mu \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \frac{I}{2\pi r} \quad (a \leq r \leq b)$$

圆管外, 由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_{1\varphi} \cdot 2\pi r = I$$

所以

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_\varphi \frac{I}{2\pi r} \quad (b < r < \infty)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (b < r < \infty)$$

圆管内, 由安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H}_3 \cdot d\mathbf{l} = H_{3\varphi} \cdot 2\pi r = 0$$

所以

$$H_{3\varphi} = 0, \quad B_{3\varphi} = 0 \quad (0 \leq r < a)$$

管壁中 ($a \leq r \leq b$) 的磁化强度为

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H}_2 \right) = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \frac{I}{2\pi r}$$

管壁中的体磁化电流密度为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}_2 = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_{2\varphi}) = \mathbf{e}_z \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

在 $r=a$ 、 $r=b$ 处的面磁化电流密度为

$$\mathbf{J}_{mS} |_{r=a} = \mathbf{M}_2 \times (-\mathbf{e}_r) = 0$$

$$\mathbf{J}_{mS} |_{r=b} = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_z \left[- \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \right]$$