

第1章

材料力学概述

材料力学主要研究变形体受力后发生的变形、由于变形而产生的附加内力以及由此而产生的失效和控制失效的准则。在此基础上导出工程构件静力学设计的基本方法。

材料力学与理论力学在分析方法上也不完全相同。材料力学的分析方法是在实验基础上,对于问题作一些科学的假定,将复杂的问题加以简化,从而得到便于工程应用的理论成果与数学公式。

本章介绍材料力学的基础知识、研究方法以及材料力学对于工程设计的重要意义。

1.1 “材料力学”的研究内容

材料力学(strength of materials)的研究内容分属于两个学科。第一个学科是固体力学(solid mechanics),即研究物体在外力作用下的应力、变形和能量,统称为应力分析(stress analysis)。但是,材料力学所研究的仅限于杆、轴、梁等物体,其几何特征是纵向尺寸(长度)远大于横向(横截面)尺寸,这类物体统称为杆或杆件(bars 或 rods)。大多数工程结构的构件或机器的零部件都可以简化为杆件。第二个学科是材料科学(materials science)中的材料的力学行为(behaviours of materials),即研究材料在外力和温度作用下所表现出的力学性能(mechanical properties)和失效(failure)行为。但是,材料力学所研究的仅限于材料的宏观力学行为,不涉及材料的微观机理。

以上两方面的结合使材料力学成为工程设计(engineering design)的重要组成部分,即设计出杆状构件或零部件的合理形状和尺寸,以保证它们具有足够的强度(strength)、刚度(stiffness)和稳定性(stability)。

1.2 杆件的受力与变形形式

实际杆件的受力可以是各式各样的,但都可以归纳为 4 种基本受力和变形形式:轴向拉伸(或压缩)、剪切、扭转和弯曲,以及由两种或两种以上基本受力和变形形式叠加而成的组合受力与变形形式。

拉伸或压缩(tension or compression)——当杆件两端承受沿轴线方向的拉力或压力载荷时,杆件将产生轴向伸长或压缩变形,分别如图 1-1(a)、(b)所示。图中实线为变形前的位置;虚线为变形后的位置。

剪切(shearing)——在平行于杆横截面的两个相距很近的平面内,方向相对地作用着两个横向力,当这两个力相互错动并保持二者之间的距离不变时,杆件将产生剪切变形,如图 1-2 所示。

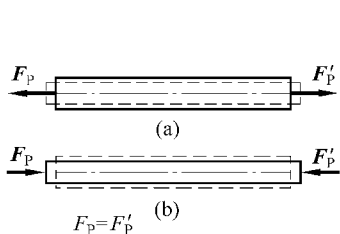


图 1-1 承受拉伸与压缩的杆件

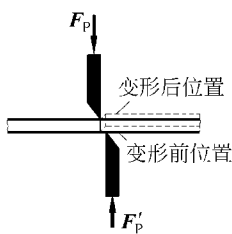


图 1-2 承受剪切的构件

扭转(torsion)——当作用在杆件上的力组成作用在垂直于杆轴平面内的力偶 M_c 时,杆件将产生扭转变形,即杆件的横截面绕其轴相互转动,如图 1-3 所示。

弯曲(bend)——当外加力偶 M (图 1-4(a)) 或外力作用于杆件的纵向平面内(图 1-4(b))时,杆件将发生弯曲变形,其轴线将变成曲线。

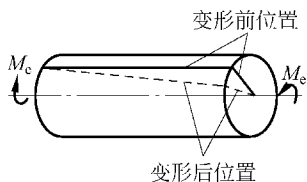


图 1-3 承受扭转的圆轴

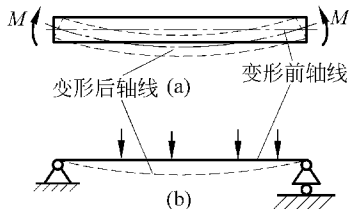


图 1-4 承受弯曲的梁

组合受力与变形(complex loads and deformation)——由上述基本受力形式中的两种或两种以上所共同形成的受力与变形形式即为组合受力与变

形,例如图 1-5 中所示杆件的变形,即为拉伸与弯曲的组合(其中力偶 M 作用在纸平面内)。组合受力形式中,杆件将产生两种或两种以上的基本变形。

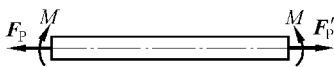


图 1-5 组合受力的杆件

实际杆件的受力不管多么复杂,在一定的条件下,都可以简化为基本受力形式的组合。

工程上将承受拉伸的杆件统称为拉杆,简称杆(rods);受压杆件称为压杆或柱(column);承受扭转或主要承受扭转的杆件统称为轴(shaft);承受弯曲的杆件统称为梁(beam)。

1.3 工程构件静力学设计的主要内容

工程设计的任务之一就是保证结构和构件具有足够的强度、刚度和稳定性。

强度(strength)是指构件或零部件在确定的外力作用下,不发生破坏或过量塑性变形的能力。

刚度(rigidity)是指构件或零部件在确定的外力作用下,其弹性变形或位移不超过工程允许范围的能力。

稳定性(stability)是指构件或零部件在某些受力形式(例如轴向压力)下其平衡形式不会发生突然转变的能力。

例如,各种桥的桥面结构(图 1-6),采取什么形式才能保证不发生破坏,也不发生过大的弹性变形,即不仅保证桥梁具有足够的强度,而且具有足够的刚度,同时还要具有重量轻、节省材料等优点。

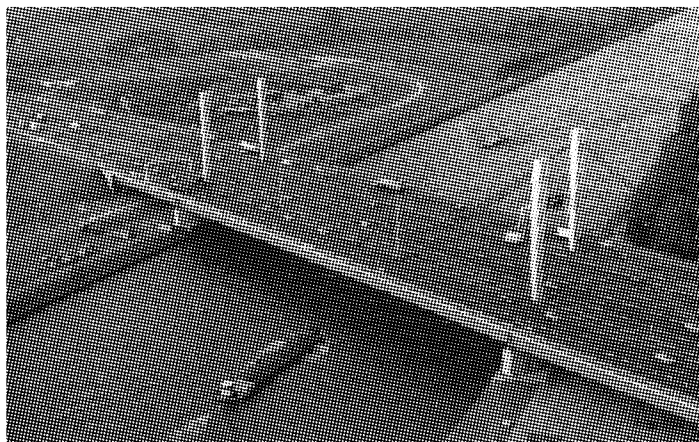


图 1-6 大型桥梁

又如,建筑施工中的脚手架(图 1-7)不仅需要有足够的强度和刚度,而且还要保证有足够的稳定性,否则在施工过程中会由于局部杆件或整体结构的不稳定性而导致整个脚手架的倾覆与坍塌,造成人民生命和国家财产的巨大损失。

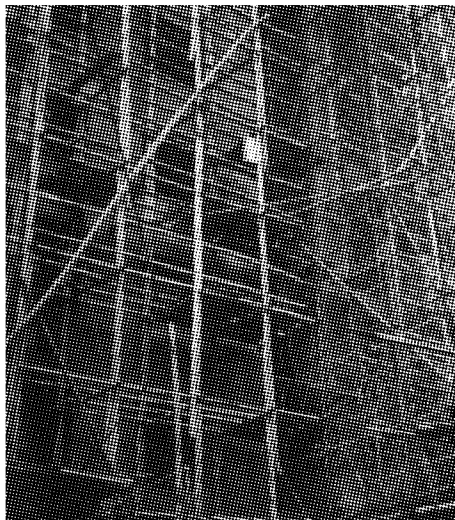


图 1-7 建筑施工中的脚手架

此外,各种大型水利设施、核反应堆容器、计算机硬盘驱动器以及航空航天器及其发射装置等也都有大量的强度、刚度和稳定性问题。

1.4 关于材料的基本假定

1.4.1 各向同性假定

在所有方向上均具有相同的物理和力学性能的材料,称为各向同性(isotropy)材料。

如果材料在不同方向上具有不同的物理和力学性能,则称这种材料为各向异性(anisotropy)材料。

大多数工程材料虽然微观上不是各向同性的,例如金属材料,其单个晶粒呈结晶各向异性(anisotropy of crystallographic),但当它们形成多晶聚集体的金属时,呈随机取向,因而在宏观上表现为各向同性。“材料力学”中所涉及的金属材料都假定为各向同性材料,这一假定称为各向同性假定(isotropy assumption)。就总体的力学性能而言,这一假定也适用于混凝土材料。

1.4.2 各向同性材料的均匀连续性假定

实际材料的微观结构并非处处都是均匀、连续的,但是,当所考察的物体几何尺度足够大,而且所考察的物体上的点都是宏观尺度上的点时,则可以假定所考察的物体的全部体积内,材料在各处是均匀、连续分布的。这一假定称为**均匀连续性假定**(homogenization and continuity assumption)。

根据这一假定,物体因受力和变形而产生的内力和位移都将是连续的,因而可以表示为各点坐标的连续函数,从而有利于建立相应的数学模型,所得到的理论结果便于应用于工程设计。

1.5 弹性体受力与变形特征

弹性体受力后,由于变形,其内部将产生相互作用的内力。这种内力不同于物体固有的内力,而是一种由于变形而产生的附加内力,利用一假想截面将弹性体截开,这种附加内力即可显示出来,如图 1-8 所示。

根据连续性假定,一般情形下,杆件横截面上的内力组成一分布力系。

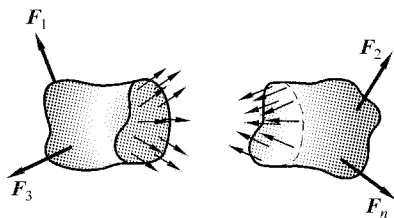
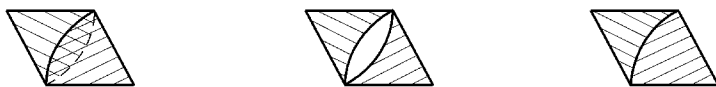


图 1-8 弹性体的分布内力

由于整体平衡的要求,对于截开的每一部分也必须是平衡的。因此,作用在每一部分上的外力必须与截面上分布内力相平衡。这表明,弹性体由变形引起的内力不能是任意的。这是弹性体受力、变形的第一个特征。

应用假想截面将弹性体截开,分成两部分,考虑其中任意一部分平衡,从而确定横截面上内力的方法,称为**截面法**。

在外力作用下,弹性体的变形应使弹性体各相邻部分,既不能断开,也不能发生重叠的现象。图 1-9 中为从一弹性体中取出的两相邻部分的三种变形状况,其中图 1-9(a)、(b)上所示的两种情形是不正确的,只有图 1-9(c)中所示



(a) 变形后两部分相互重叠 (b) 变形后两部分相互分离 (c) 变形后两部分协调一致

图 1-9 弹性体变形后各相邻部分之间的相互关系

的情形是正确的。这表明,弹性体受力后发生的变形也不是任意的,而必须满足协调(compatibility)一致的要求。这是弹性体受力、变形的第二个特征。

此外,弹性体受力后发生的变形还与物性有关,这表明,受力与变形之间存在确定的关系,称为物性关系。

例题 1-1 等截面直杆 AB 两端固定, C 截面处承受沿杆件轴线方向的力 F_P , 如图 1-10 所示。关于 A 、 B 两端的约束力有(A)、(B)、(C)、(D)四种答案, 请判断哪一种是正确的。

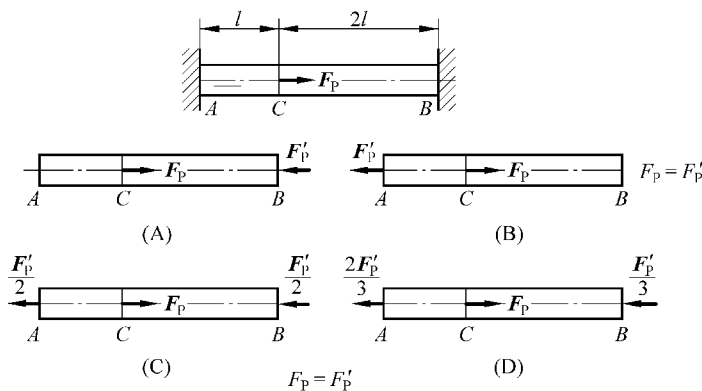


图 1-10 例题 1-1 图

解 根据约束的性质, 以及外力 F_P 作用线沿着杆件轴线方向的特点, A 、 B 两端只有沿杆件轴线方向的约束力, 分别用 F_A 和 F_B 表示, 如图 1-11 所示。

根据平衡条件 $\sum F_x = 0$, 有

$$F_A + F_B = F_P$$

其中 F_A 和 F_B 都是未知量, 仅由平衡方程不可能求出两个未知量。对于刚体模型, 这个问题是无法求解的。但是, 对于弹性体, 这个问题是有解的。

作用在弹性体上的力除了满足平衡条件外, 还必须使其所产生的变形满足变形协调的要求。本例中, AC 段杆将发生伸长变形, CB 段杆则发生缩短变形, 由于 AB 杆两端固定, 杆件的总变形量必须等于零。

显然, 图 1-10 中的答案(A)和(B)都不能满足上述条件, 因而是错误的。

对于满足胡克定律的材料, 其弹性变形都与杆件受力以及杆件的长度成正比。在答案(C)中, 平衡条件虽然满足, 但 CB 段杆的缩短量大于 AC 段杆的伸长量, 因而不能满足总变形量等于零的变形协调要求, 所以也是不正确

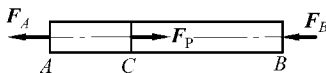


图 1-11 例题 1-1 解图

的。答案(D)的约束力,既满足平衡条件,也满足变形协调的要求,因此,答案(D)是正确的。

1.6 材料力学的分析方法

分析构件受力后发生的变形,以及由于变形而产生的内力,需要采用平衡的方法。但是,采用平衡的方法只能确定横截面上内力的合力,并不能确定横截面上各点内力的大小。研究构件的强度、刚度与稳定性,不仅需要确定内力的合力,还需要知道内力的分布。

内力是不可见的,而变形却是可见的,并且各部分的变形相互协调,变形通过物性关系与内力相联系。所以,确定内力的分布,除了考虑平衡,还需要考虑变形协调与物性关系。

对于工程构件,所能观察到的变形只是构件外部表面的。内部的变形状况,必须根据所观察到的表面变形作一些合理的推测,这种推测通常也称为假定。对于杆状的构件,考察相距很近的两个横截面之间微段的变形,这种假定是不难作出的。

1.7 内力与内力分量

应用静力学中关于力系简化的理论和方法,杆件受力后,横截面上的分布内力可以简化为通过横截面中心的一个主矢和一个主矩,二者分别用 $\mathbf{F}_R$ 和 $\mathbf{M}$ 表示(图 1-12)。

以横截面的中心 C 为坐标原点,建立 $Cxyz$ 坐标系,如图 1-13 所示。将主矢 $\mathbf{F}_R$ 和主矩 $\mathbf{M}$ 分别向 x 、 y 和 z 轴分解,得到主矢在 3 个坐标轴上的分量 F_N 、 F_{Qy} 、 F_{Qz} 以及主矩在 3 个坐标轴上的分量 M_x 、 M_y 、 M_z 。

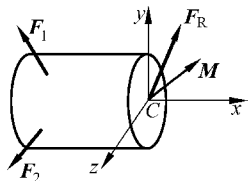


图 1-12 杆件横截面上的内力
主矢与内力主矩

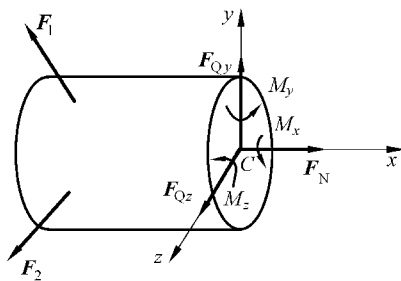


图 1-13 内力分量

其中, F_N 是主矢在 x 轴上的分量, 这一分量将使杆件产生沿杆件轴线方向的伸长或缩短变形, 因而称为轴向力或轴力(normal force);

F_{Q_y} 和 F_{Q_z} 分别是主矢在 y 轴和 z 轴上的分量, 这两个分量都将使杆件产生剪切变形, 因而称为剪力(shearing force);

M_x 是主矩在 x 轴上的分量, 这一分量将使杆件产生绕杆件轴线的扭转变形, 因而称为扭矩(torsion moment);

M_y 和 M_z 分别是主矩在 y 轴和 z 轴上的分量, 这两个分量将分别使杆件产生绕 y 轴和 z 轴的弯曲变形, 因而称为弯矩(bending moment)。

以上 6 个内力分量统称为杆件横截面上的内力分量(components of internal force)。

如果作用在杆件上的外力是可以确定的, 一般情形下都可以应用平衡方法求得上述 6 个内力分量。

1.8 应力及其与内力分量之间的关系

1.8.1 应力的概念与定义

分布内力在一点的集度, 称为应力(stress)。作用线垂直于截面的应力称为正应力(normal stress), 用希腊字母 σ 表示; 作用线位于截面内的应力称为剪应力(shearing stress)或切应力, 用希腊字母 τ 表示。应力的单位为 Pa 或 MPa, 工程上多用 MPa。

一般情形下的横截面上的附加分布内力总可以分解为两种: 作用线垂直于横截面的; 作用线位于横截面内的。图 1-14 中所示为作用在微元面积 ΔA 上的总内力 ΔF_R 及其分量, 其中 ΔF_N 和 ΔF_Q 的作用线分别垂直和作用于横截面内。于是上述正应力和剪应力的定义可以表示为下列极限表达式:

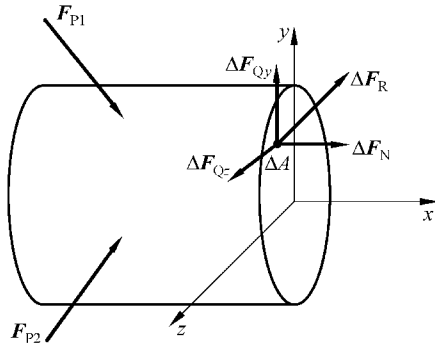


图 1-14 作用在微元面积上的内力及其分量

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} \quad (1-1)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_Q}{\Delta A} \quad (1-2)$$

需要指出的是,上述极限表达式的引入只是为了说明应力的一些概念,二者在应力计算中没有实际意义。

1.8.2 应力与内力分量之间的关系

应力作为分布内力在一点的集度,与内力分量有着密切的关系。为了得到这种关系,考察图 1-15 中作用在横截面的微元面积 dA 上的正应力 σ 和剪应力 τ_{xy} 、 τ_{xz} ,将它们分别乘以微元面积,得到微元面积上的内力 σdA 、 $\tau_{xy} dA$ 、 $\tau_{xz} dA$ 。将这些内力分别对 $Cxyz$ 坐标系中的 x 、 y 和 z 轴投影和取矩,并且沿整个横截面积分,即可得到应力与上述 6 个内力分量之间的关系式:

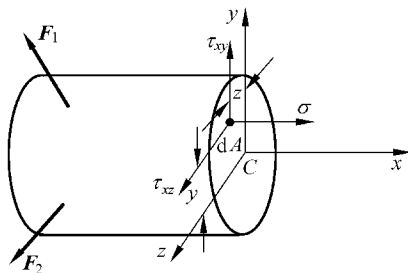


图 1-15 应力及其与内力分量之间的关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \sigma dA = F_N \\ \int_A z(\sigma dA) = M_y \\ \int_A y(\sigma dA) = M_z \\ \int_A \tau_{xy} dA = F_{Qy} \\ \int_A \tau_{xz} dA = F_{Qz} \\ \int_A -(\tau_{xy} dA)z + (\tau_{xz} dA)y = M_x \end{array} \right. \quad (1-3)$$

1.9 应变以及应力-应变关系

1.9.1 应变的概念与定义

如果将弹性体看作由许多微单元体(简称微元体或微元)所组成,弹性体

整体的变形则是所有微元体变形累加的结果。而微元体的变形则与作用在其上的应力有关。

围绕受力弹性体中的任意点截取微元体(通常为正六面体),一般情形下微元体的各个面上均有应力作用。下面考察两种最简单的情形,分别如图 1-16(a)、(b)所示。

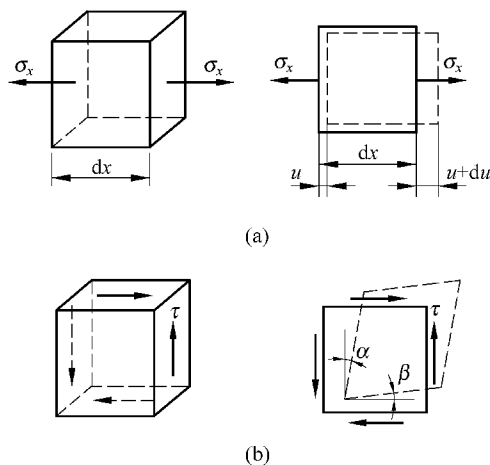


图 1-16 正应变与剪应变

对于正应力作用下的微元体(图 1-16(a)),沿着正应力方向和垂直于正应力方向将产生伸长和缩短,这种变形称为线变形。描写弹性体在各点处线变形程度的量,称为**正应变**或**线应变**(normal strain),用 ϵ_x 表示。根据微元体变形前后 x 方向长度 dx 的相对改变量,有

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1-4)$$

式中, dx 为变形前微元体在正应力作用方向的长度; du 为微元体变形后相距 dx 的两截面沿正应力方向的相对位移; ϵ_x 的下标 x 表示应变方向。

切应力作用下的微元体将发生剪切变形,剪切变形程度用微元体直角的改变量量度。微元直角改变量称为**剪应变**(shearing strain)或**切应变**,用 γ 表示。在图 1-16(b)中, $\gamma = \alpha + \beta$ 。 γ 的单位为 rad。

关于正应力和正应变的正负号,一般约定:拉应变为正,压应变为负;产生拉应变的应力(拉应力)为正,产生压应变的应力(压应力)为负。关于剪应力和剪应变的正负号将在以后介绍。

1.9.2 应力与应变之间的物性关系

对于工程中常用的材料,实验结果表明:若在弹性范围内加载(应力小于某一极限值),对于只承受单方向正应力或承受剪应力的微元体,正应力与正应变以及剪应力与剪应变之间存在着线性关系:

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad \text{或} \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1-5)$$

$$\tau = G\gamma \quad \text{或} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1-6)$$

上述二式统称为胡克定律(Hooke law)。式中, E 和 G 为与材料有关的弹性常数: E 称为弹性模量(modulus of elasticity)或杨氏模量(Young modulus); G 称为切变模量(shear modulus),式(1-5)和式(1-6)即为描述线弹性材料物性关系的方程。所谓线弹性材料是指弹性范围内加载时应力-应变满足线性关系的材料。

1.10 结论与讨论

1.10.1 刚体模型与弹性体模型

所有工程结构的构件,实际上都是可变形的弹性体,当变形很小时,变形对物体运动效应的影响甚小,因而在研究运动和平衡问题时一般可将变形略去,从而将弹性体抽象为刚体。从这一意义讲,刚体和弹性体都是工程构件在确定条件下的简化力学模型。

1.10.2 弹性体受力与变形特点

弹性体在载荷作用下,将产生连续分布的内力。弹性体内力应满足:与外力的平衡关系;弹性体自身变形协调关系;力与变形之间的物性关系。这是材料力学与理论力学的重要区别。

1.10.3 刚体静力学概念与原理在材料力学中的应用

工程中绝大多数构件受力后所产生的变形相对于构件的尺寸都是很小的,这种变形通常称为“小变形”。在小变形条件下,刚体静力学中关于平衡的理论和方法能否应用于材料力学,下列问题的讨论对于回答这一问题是有意义的:

(1) 若将作用在弹性杆上的力(图 1-17(a)), 沿其作用线方向移动(图 1-17(b))。

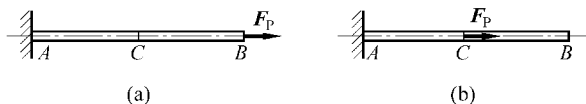


图 1-17 力沿作用线移动的结果

(2) 若将作用在弹性杆上的力(图 1-18(a)), 向另一点平移(图 1-18(b))。

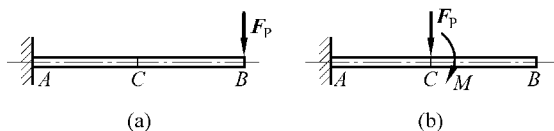
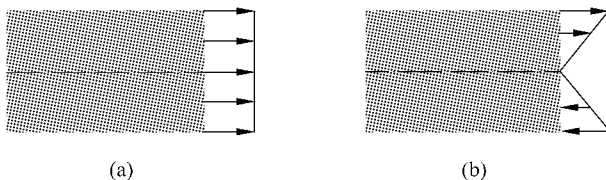


图 1-18 力沿作用线向一点平移的结果

请读者分析: 上述两种情形下对弹性杆的平衡和变形将会产生什么影响?

习题

1-1 已知两种情形下直杆横截面上的正应力分布分别如习题 1-1 图(a)和图(b)所示。试根据应力与内力分量之间的关系, 分析两种情形下杆件横截面存在什么内力分量(不要求进行具体计算)。

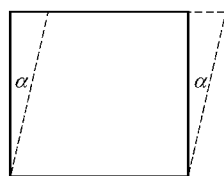


习题 1-1 图

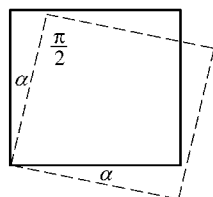
1-2 微元在两种情形下受力后的变形分别如习题 1-2 图(a)和图(b)所示, 试根据剪应变的定义确定两种情形下微元的剪应变。

1-3 由金属丝弯成的弹性圆环, 直径为 d (习题 1-3 图中的实线), 受力变形后变成直径为 $d + \Delta d$ 的圆(图中的虚线)。如果 d 和 Δd 都是已知的, 试应用正应变的定义确定:

- (1) 圆环沿直径方向的正应变;
- (2) 圆环沿圆周方向的正应变。

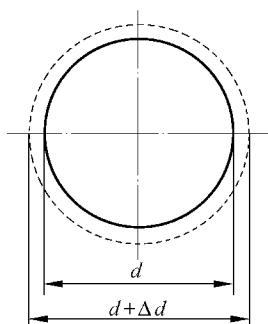


(a)



(b)

习题 1-2 图



习题 1-3 图

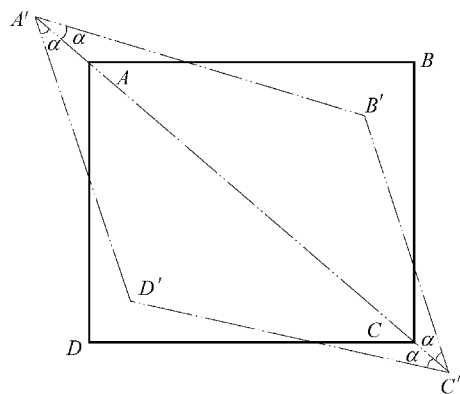
1-4 微元受力如习题 1-4 图中实线 $ABCD$ 所示,其中 $\angle ABC$ 为直角。受力变形后($dx=dy$ 尺寸不变)如图中虚线 $A'B'C'D'$ 所示。

- (1) 分析微元的四边可能承受什么样的应力才会产生这样的变形。
- (2) 如果已知

$$\frac{CC'}{1000} = \frac{dx}{1000}$$

求 AC 方向上的正应变。

- (3) 如果已知图中变形后的角度 α ,求微元的剪应变。



习题 1-4 图

轴向载荷作用下杆件的材料力学问题

工程结构中的桅杆、旗杆、活塞杆,悬索桥、斜拉桥、网架式结构中的杆件或缆索,以及桥梁结构桁架中的杆件大都承受沿着杆件轴线方向的载荷,这种载荷简称为轴向载荷。

承受轴向载荷的杆件将产生拉伸或压缩变形。

承受轴向载荷杆件的材料力学问题包括:杆件横截面上的内力、应力及变形分析与计算;材料的力学行为的实验结果;强度计算以及应变能计算。

这些问题虽然比较简单,但其中的基本概念与基本分析方法却具有普遍意义。

2.1 轴力与轴力图

当所有外力均沿杆的轴线方向作用时,杆的横截面上只有轴力 F_N 一种内力分量。表示轴力沿杆轴线方向变化的图形,称为轴力图(diagram of normal forces)。

为了绘制轴力图,杆件上同一处两侧横截面上的轴力必须具有相同的正负号。因此约定使杆件受拉的轴力为正;受压的轴力为负。

绘制轴力图的方法与步骤如下:

首先,确定作用在杆件上的外载荷与约束力。

其次,根据杆件上作用的载荷以及约束力,确定轴力图的分段点:在有集中力作用处即为轴力图的分段点。

再次,应用截面法,用假想截面从控制面处将杆件截开,在截开的截面上,画出未知轴力,并假设为正方向;对截开的部分杆件建立平衡方程,确定轴力的大小与正负:产生拉伸变形的轴力为正,产生压缩变形的轴力为负。

最后,建立 F_N-x 坐标系,将所求得的轴力值标在坐标系中,画出轴力图。

例题 2-1 图 2-1(a) 中所示之直杆, 在 B、C 两处作用有集中载荷 F_1 和 F_2 , 其中 $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 10 \text{ kN}$ 。试画出杆件的轴力图。

解 (1) 确定约束力

A 处虽然是固定端约束, 但由于杆件只有轴向载荷作用, 所以只有一个轴向的约束力 F_{NA} 。由平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

求得

$$F_{NA} = 5 \text{ kN}$$

F_{NA} 的方向如图 2-1(b) 中所示。

(2) 确定控制面

在约束力 F_{NA} 、集中载荷 F_2 作用处的 A、C 截面, 以及集中载荷 F_1 作用点 B 处的上、下两侧, 如图 2-1(b) 所示。

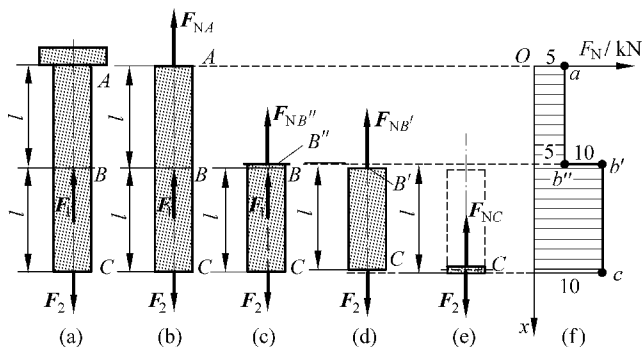


图 2-1 例题 2-1 图

(3) 应用截面法确定各端的轴力

用假想截面分别从控制面 A、B''、B'、C 处将杆截开, 假设横截面上的轴力均为正方向(拉力), 并考察截开后下面部分的平衡, 分别如图 2-1(b)、(c)、(d)、(e) 所示。

根据平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

求得各控制面上的轴力分别为

$$\text{A 截面: } F_{NA} = F_2 - F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$\text{B'' 截面: } F_{NB''} = F_2 - F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$\text{B' 截面: } F_{NB'} = F_2 = 10 \text{ kN}$$

$$\text{C 截面: } F_{NC} = F_2 = 10 \text{ kN}$$

(4) 建立 F_N-x 坐标系,画轴力图

F_N-x 坐标系中 x 坐标轴沿着杆件的轴线方向, F_N 坐标轴垂直于 x 轴,方向不限。

将所求得各控制面上的轴力标在 F_N-x 坐标系中,得到 a 、 b' 、 b' 和 c 四点。因为在 A 、 B' 之间以及 B' 、 C 之间,没有其他外力作用,故这两段中的轴力分别与 A (或 B') 截面以及 C (或 B') 截面相同。这表明 a 点与 b' 点之间以及 c 点与 b' 点之间的轴力图平行于 x 轴的直线。于是,得到杆的轴力图如图 2-1(f) 所示。

从上面的解题过程可以看出,考虑各个控制面以下部分平衡时,由于截开部分不涉及上端的约束力,因此,可以不必先确定约束力。

例题 2-2 已知阶梯形直杆受力如图 2-2(a) 所示,试画出其轴力图。^①

解 本例中的杆左端固定,有沿轴线方向的约束力。如果采用截面法,考虑右边部分的平衡,也可以不必先求约束力。

(1) 确定控制面

因为在 A 、 B 、 C 、 D 四处都有集中力作用,所以这 4 个截面都是控制面。这表明 AB 、 BC 和 CD 三段杆的轴力各不相同。

(2) 应用截面法确定各段的轴力

应用截面法,在 AB 、 BC 和 CD 三段中任意截面处,分别将杆件截开,并且假设截开的横截面上的轴力均为正方向,即为拉力,如图 2-2(b) 所示。

然后分别对截开的三部分应用平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

即可确定 AB 、 BC 和 CD 段杆横截面上的轴力,分别为

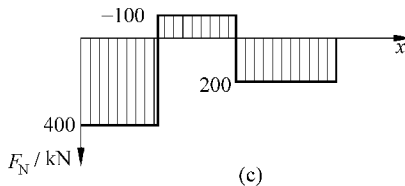
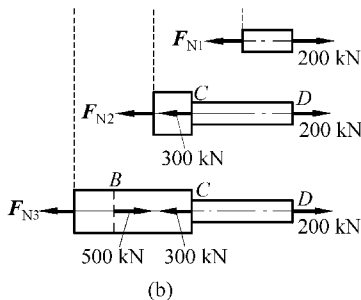
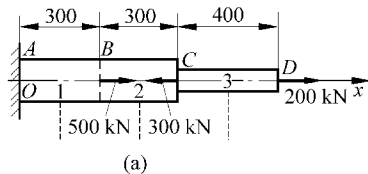


图 2-2 例题 2-2 图

^① 图中未标注单位的长度,其单位均为 mm,余同。

CD 段: $F_{N1} = 200 \text{ kN}$

BC 段: $F_{N2} = -(300 - 200) \text{ kN} = -100 \text{ kN}$

AB 段: $F_{N3} = (500 + 200 - 300) \text{ kN} = 400 \text{ kN}$

(3) 建立 F_N-x 坐标系,画轴力图

建立 F_N-x 坐标系, x 坐标轴自左向右,沿着杆件的轴线方向, F_N 坐标轴垂直于 x 轴,方向向下(也可以向上)。将上面求得的 AB、BC 和 CD 段杆横截面上的轴力标在 F_N-x 坐标系中,即可画出轴力图,如图 2-2(c) 所示。

2.2 轴向载荷作用下杆件横截面上的应力

轴力 F_N 是截面上轴向分布内力的合力。如果确定了轴力,又知道分布内力在横截面上是怎样分布的,根据

$$F_N = \int_A \sigma dA \quad (2-1)$$

就可以确定横截面上各点的应力。

应力是看不见的,但是变形是可见的,应力与变形有关,因此,根据两相邻横截面之间的变形情形,以及应力与应变之间的关系,即可知道横截面上的应力分布状况。

实验结果表明,对于细长杆,离加力端一定距离的大部分区域,其横截面在杆件变形后仍保持平面,两相邻截面只在拉、压力作用下刚性地相互平行地离开或相互靠近,因此可以假设两相邻截面间材料的变形是相同的,这表明截面上正应力均匀分布,即表明 σ 为常数,如图 2-3 所示。

因为 σ 为常数,式(2-1)中的 σ 可以移到积分号外,于是,得到应力与轴力之间的关系

$$F_N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

或写成

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (2-2)$$

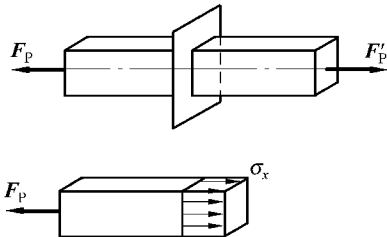


图 2-3 轴向载荷作用下杆件横截面上的应力分布

这就是计算轴向载荷作用下杆件横截面上正应力的表达式,其中 F_N 是横截面上的轴力, A 为横截面面积, σ 为横截面上的正应力。

例题 2-3 计算例题 2-2 中变截面杆 AB 、 BC 、 CD 段横截面上的正应力,已知 AB 和 BC 段的横截面面积为 $A_1 = A_2 = 2500 \text{ mm}^2$; CD 段的横截面面积 $A_3 = 1000 \text{ mm}^2$ 。

例题 2-2 中应用截面法已经确定了 AB 、 BC 、 CD 各段杆的轴力分别为

$$AB \text{ 段: } F_{N1} = 400 \text{ kN}$$

$$BC \text{ 段: } F_{N2} = -100 \text{ kN}$$

$$CD \text{ 段: } F_{N3} = 200 \text{ kN}$$

于是,应用式(2-2),求得各段横截面上的正应力分别为

$$AB \text{ 段: } \sigma(AB) = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{2500 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 160 \times 10^6 \text{ Pa} = 160 \text{ MPa}$$

$$BC \text{ 段: } \sigma(BC) = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{-100 \times 10^3 \text{ N}}{2500 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = -40 \times 10^6 \text{ Pa} = -40 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} CD \text{ 段: } \sigma(CD) &= \frac{F_{N3}}{A_3} = \frac{200 \times 10^3 \text{ N}}{1000 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \\ &= 200 \times 10^6 \text{ Pa} = 200 \text{ MPa} \end{aligned}$$

例题 2-4 三角架结构尺寸及受力如图 2-4(a) 所示。其中 $F_P = 22.2 \text{ kN}$, 钢杆 BD 的直径 $d_1 = 25.4 \text{ mm}$, 钢梁 CD 的横截面面积 $A_2 = 2.32 \times 10^3 \text{ mm}^2$ 。

试求: BD 与 CD 杆的横截面上的正应力。

解 (1) 受力分析,确定各杆的轴力

首先对组成三角架结构的构件作受力分析,因为 B 、 C 、 D 三处均为销钉连接,故 BD 与 CD 均为二力构件,受力图如图 2-4(b) 所示,由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 解得二者的轴力分别为

$$F_{NBD} = \sqrt{2}F_P = \sqrt{2} \times 22.2 \times 10^3 \text{ N} = 31.40 \text{ kN}$$

$$F_{NCD} = F_P = 22.2 \times 10^3 \text{ N} = 22.2 \text{ kN}(-)$$

其中负号表示压力。

(2) 计算各杆的应力

应用拉、压杆件横截面上的正应力公式(2-2), BD 杆与 CD 杆横截面上的正应力分别为

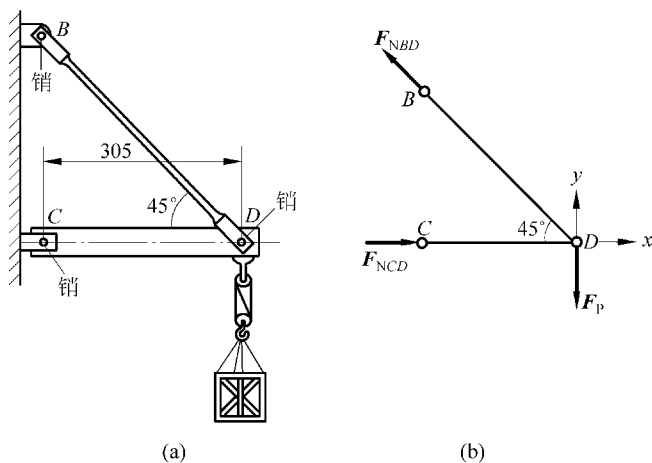


图 2-4 例题 2-4 图

BD 杆:

$$\begin{aligned}\sigma(BD) &= \frac{F_{NBD}}{A_{BD}} = \frac{F_{NBD}}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{4 \times 31.4 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 25.4^2 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \\ &= 62.0 \times 10^6 \text{ Pa} = 62.0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

CD 杆:

$$\begin{aligned}\sigma(CD) &= \frac{F_{NCD}}{A_{CD}} = \frac{F_{NCD}}{A_2} = \frac{22.2 \times 10^3 \text{ N}}{2.32 \times 10^3 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \\ &= 9.75 \times 10^6 \text{ Pa} = 9.75 \text{ MPa}(-)\end{aligned}$$

其中负号表示压应力。

2.3 最简单的强度问题

上面分析了轴向载荷作用下杆件横截面上的应力,但这不是我们的最终目标。应力分析只是工程师借助以完成下列任务的中间过程:

- (1) 分析已有的或设想中的机器或结构,确定它们在特定载荷条件下的性能。
- (2) 设计新的机器或新的结构,使之安全而经济地实现特定的功能。

例如,对于图 2-4(a)中所示之三角架结构,上一节中已经计算出拉杆 BD 和压杆 CD 横截面上的正应力。现在可能有以下几方面的问题:

- (1) 在给定载荷和材料的情形下,怎样判断三角架结构能否安全可靠地工作?

(2) 如果材料是未知的,在所得到的应力水平下,二杆分别选用什么材料,才能保证三角架结构可以安全可靠地工作?

(3) 如果载荷是未知的,在给定杆件截面尺寸和材料的情形下,怎样确定三角架结构所能承受的最大载荷?

这些问题都是强度设计所涉及的内容。

2.3.1 强度设计准则、安全因数与许用应力

所谓**强度设计**(strength design)是指将杆件中的最大应力限制在允许的范围内,以保证杆件正常工作,不仅不发生强度失效,而且还要具有一定的安全裕度。对于拉伸与压缩杆件,杆件中的最大正应力满足:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (2-3)$$

这一表达式称为轴向载荷作用下杆件的**强度设计准则**(criterion for strength design),又称为**强度条件**。其中 $[\sigma]$ 称为**许用应力**(allowable stress),与杆件的材料力学性能以及工程对杆件安全裕度的要求有关,由下式确定:

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} \quad (2-4)$$

式中, σ^0 为材料的**极限应力**或**危险应力**(critical stress),由材料的拉伸实验确定; n 为安全因数,对于不同的机器或结构,在相应的设计规范中都有不同的规定。

2.3.2 三类强度计算问题

应用强度设计准则,可以解决3类强度问题:

(1) **强度校核**——已知杆件的几何尺寸、受力大小以及许用应力,校核杆件或结构的强度是否安全,也就是验证设计准则(2-3)是否满足。如果满足,则杆件或结构的强度是安全的;否则,是不安全的。

(2) **尺寸设计**——已知杆件的受力大小以及许用应力,根据设计准则,计算所需要的杆件横截面面积,进而设计出合理的横截面尺寸。根据式(2-3),有

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{F_N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{F_N}{[\sigma]} \quad (2-5)$$

式中, F_N 和 A 分别为产生最大正应力的横截面上的轴力和面积。

(3) **确定杆件或结构所能承受的许用载荷**(allowable load)——根据设计准则(2-3),确定杆件或结构所能承受的最大轴力,进而求得所能承受的外加载荷。