第3章

计算机控制系统的分析

在进行连续控制系统的分析与设计时，要研究判断所设计的系统是否稳定，并计算有多大的稳定裕量以及怎样满足暂态指标的要求和稳态控制精度。同样，在离散控制系统中也存在稳定性、动态响应和稳态准确度的分析，这是对任何一个自动控制系统都需要解决的问题。

3.1　离散系统的稳定性分析

一个控制系统稳定，是它能正常工作的前提条件。连续系统的稳定性分析是在S平面进行的，离散系统的稳定性分析是在Z平面进行的。

分析或设计一个控制系统，稳定性历来是一个首要问题。对于连续系统和离散系统，所谓稳定，就是在有界输入作用下，系统的输出也是有界的。如果有一个线性定常系统是稳定的，那么它的微分方程的解必须是收敛的和有界的。在分析连续系统的稳定性时，主要是根据系统传递函数的极点是否都分布在S平面的左半部。如果有极点出现在S平面右半部，则系统不稳定。所以S平面的虚轴是连续系统稳定与不稳定的分界线。描述离散系统的数学模型是Z传递函数，其变量为z，而z与s之间具有指数关系，即$z=e^{Ts}$，如果将S平面按这个指数关系映射到Z平面，即找出S平面的虚轴及稳定区域(S左半平面)在Z平面的映像，那么，就可很容易地获得离散系统稳定的充要条件。

3.1.1　S平面与Z平面的关系

S平面与Z平面的映射关系，可由$z=e^{Ts}$来确定。

设
$$s=\delta+j\omega$$
则有
$$\begin{cases} z = e^{\delta T}e^{j\omega T} \\ |z| = e^{\delta T} \\ \angle z = \omega T \end{cases}$$

在Z平面上，当δ为某个定值时，$z=e^{Ts}$随ω由$-\infty$变到∞的轨迹是一个圆，圆心位于原点，半径为$z=e^{\delta T}$，而圆心角是随ω线性增大的。

当 $\delta=0$ 时，$|z|=1$，即 S 平面上的虚轴映射到 Z 平面上的是以原点为圆心的单位圆。

当 $\delta<0$ 时，$|z|<1$，即 S 平面的左半面映射到 Z 平面上的是以原点为圆心单位圆的内部。

当 $\delta>0$ 时，$|z|>1$，即 S 平面的右半面映射到 Z 平面上的是以原点为圆心单位圆的外部。

S 平面与 Z 平面的映射关系如图 3.1 所示。

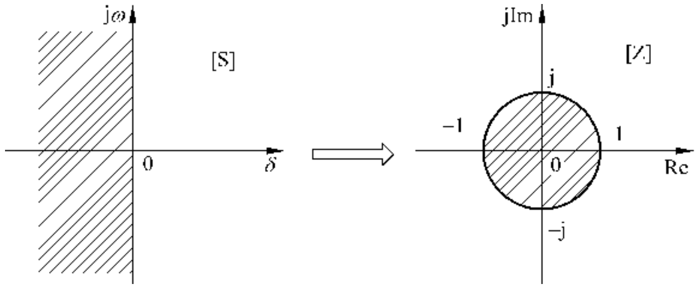

图 3.1　S 平面与 Z 平面的映射关系

于是得到下面的结论：

(1) S 平面的虚轴对应于 Z 平面的单位圆的圆周。

在 S 平面上，ω 每变化一个 ω_s 时，则对应在 Z 平面上重复画出一个单位圆，在 S 平面中 $-\frac{\omega_s}{2}\sim\frac{\omega_s}{2}$ 的频率范围内称为主频区，其余为辅频区(有无限多个)。S 平面的主频区和辅频区映射到 Z 平面的重叠称为频率混叠现象，由于实际系统正常工作时的频率较低，因此，实际系统的工作频率都在主频区内。

(2) S 平面的左半面对应于 Z 平面的单位圆内部。

(3) S 平面的负实轴对应于 Z 平面的单位圆内正实轴。

(4) S 平面左半面负实轴的无穷远处对应于 Z 平面单位圆的圆心。

(5) S 平面的右半面对应于 Z 平面单位圆的外部。

(6) S 平面的原点对应于 Z 平面正实轴上 $z=1$ 的点。

在连续系统中，如果其闭环传递函数的极点都在 S 平面的左半部分，或者说它的闭环特征方程的根的实部小于零，则该系统是稳定的。由此可见，离散系统的闭环 Z 传递函数的全部极点(特征方程的根)必须在 Z 平面中的单位圆内时，系统是稳定的。

3.1.2　离散系统输出响应的一般关系式

设离散系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}\triangleq\frac{B(z)}{A(z)}$$

设有 n 个闭环极点 z_i 互异，$m<n$，输入为单位阶跃函数 $R(z)=\frac{z}{z-1}$。

则

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{C_0}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{z-z_i}$$

其中 $$C_0=\frac{B(1)}{A(1)}=W(1),\quad C_i=\frac{B(z_i)}{(z_i-1)A(z_i)}\quad i=1,2,3,\cdots,n$$

取Z反变换得 $$y(k)=W(1)1(k)+\sum_{i=1}^{n}C_iz_i^k\quad k=1,2,3,\cdots$$

上式为采样系统在单位阶跃函数作用下输出响应序列的一般关系，第一项为稳态分量，第二项为暂态分量。

若离散系统稳定，则当时间 $k\to\infty$ 时，输出响应的暂态分量应趋于0，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}C_iz_i^k=0$，这就要求 $z_i<1, i=1,2,3,\cdots,n$。

因此得到结论，离散系统稳定的充分必要条件是：闭环Z传递函数的全部极点应位于Z平面的单位圆内。

例3.1　某离散系统的闭环Z传递函数为

$$W(z)=\frac{3.16z^{-1}}{1+1.792z^{-1}+0.368z^{-1}}$$

解：根据已知条件可知 $W(z)$ 的极点为

$$z_1=-0.237,\quad z_2=-1.556$$

由于 $|z_2|>1$，故该系统是不稳定的。

3.1.3 Routh稳定性准则在离散系统中的应用

连续系统的Routh稳定性准则不能直接应用到离散系统中，这是因为Routh稳定性准则只能用来判断复变量代数方程的根是否位于S平面的左半面。如果把Z平面再映射到S平面，则采样系统的特征方程又将变成S的超越方程。因此，使用双线性变换，将Z平面变换到W平面，使得Z平面的单位圆内映射到W平面的左半面。

设 $$z=\frac{w+1}{w-1}\left(\text{或 } z=\frac{1+w}{1-w}\right)$$

则 $$w=\frac{z+1}{z-1}\left(\text{或 } w=\frac{z-1}{z+1}\right)$$

其中，z、w 均为复变量，即构成W变换，如图3.2所示。

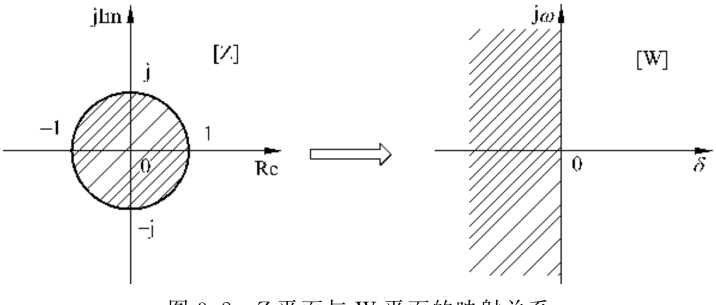

图3.2　Z平面与W平面的映射关系

为证明W变换能满足图3.2所示的对应关系，设：$z=x+jy$，$w=u+jv$

则 $$w=u+jv=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}-j\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

根据上式,可以看到,当

$x^2+y^2>1$,则 $u>0$,即 Z 平面上的单位圆外部对应 W 平面的右半平面。

$x^2+y^2=1$,则 $u=0$,即 Z 平面上的单位圆圆周对应 W 平面的虚轴。

$x^2+y^2<1$,则 $u<0$,即 Z 平面上的单位圆内部对应 W 平面的左半平面。

这种变换称为 W 变换,它将 Z 特征方程变成 W 特征方程,这样就可以用 Routh 准则来判断 W 特征方程的根是否在 W 平面的左半面,即系统是否稳定。

下面通过例题说明如何利用 W 变换和 Routh 准则来判定系统的稳定性。

例 3.2 某离散系统如图 3.3 所示,试用 Routh 准则确定使该系统稳定的 k 值范围,设 $T=0.25\text{s}$。

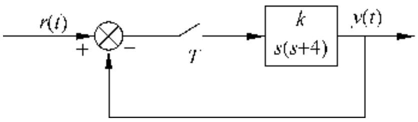

图 3.3 例 3.2 离散系统

解:该系统的开环 Z 传递函数为

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{k}{s(s+4)}\right]=\frac{0.158kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

该系统的闭环 Z 传递函数为

$$W(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.158kz}{(z-1)(z-0.368)+0.158kz}$$

求得该系统的闭环 Z 特征方程为

$$(z-1)(z-0.368)+0.158kz=0$$

对应的 W 特征方程为

$$0.158kw^2+1.264w+(2.736-0.158k)=0$$

Routh 表为

w^2	$0.158k$	$(2.736-0.158k)$
w^1	1.264	0
w^0	$(2.736-0.158k)$	0

解得使系统稳定的 k 值范围为 $0<k<17.3$。

显然,当 $k\geqslant 17.3$ 时,该系统是不稳定的,但对于二阶连续系统,k 为任何值时都是稳定的,这就说明 k 对离散系统的稳定性是有影响的。

一般来说,采样周期 T 也对系统的稳定性有影响。缩短采样周期,会改善系统的稳定性。对于本例,若 $T=0.1\text{s}$,可以得到 k 值的范围为 $0<k<40.5$。

但需要指出的是,对于计算机控制系统,缩短采样周期就意味着增加计算机的运算时间,且当采样周期减小到一定程度后,对改善动态性能无多大意义,所以应该适当选取采样周期。

3.2 离散系统的过渡响应分析

一个控制系统在外信号作用下从原有稳定状态变化到新的稳定状态的整个动态过程称为控制系统的过渡过程。一般认为被控变量进入新稳态值附近±5%或±3%的范围内就可以表明过渡过程已经结束。

通常,线性离散系统的动态特征是系统在单位阶跃信号输入下的过渡过程特性(或者说系统的动态响应特性)。原因是单位阶跃输入信号容易产生,并且能够提供动态响应和稳态响应的有用信息。如果已知线性离散系统在阶跃输入下输出的 Z 变换 $Y(z)$,那么,对 $Y(z)$

进行 Z 反变换，就可获得动态响应 $y^*(t)$。将 $y^*(t)$ 连成光滑曲线，就可得到系统的动态性能指标(即超调量 $\sigma\%$ 与过渡过程时间 t_s)，如图 3.4 所示。

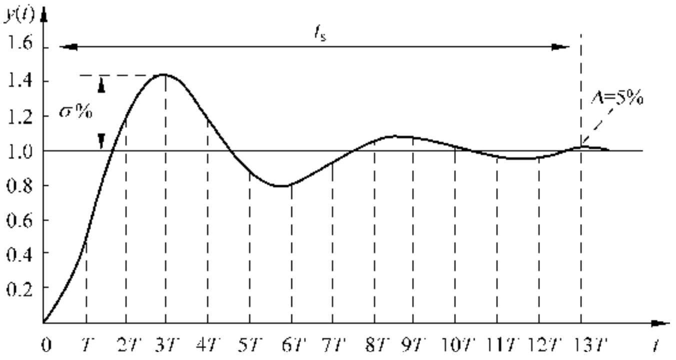

图 3.4　线性离散系统的单位阶跃响应

首先研究离散系统在单位脉冲信号作用下的瞬态响应，以了解离散系统的动态性能。

设离散系统的闭环 Z 传递函数可以写成以下形式：

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)},\qquad n>m$$

式中 z_i 与 z_j 分别表示闭环零点和极点。利用部分分式法，可将 $W(z)$ 展开成

$$W(z)=\frac{A_1z}{z-z_1}+\frac{A_2z}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_nz}{z-z_n}$$

由此可见，离散系统的时间响应是它各个极点时间响应的线性叠加。如果了解位于任意位置的一个极点所对应的瞬态响应，则整个离散系统的瞬态响应也就容易解决了。

与连续系统类似，离散系统的零点和极点在 Z 平面上的分布对系统的瞬态响应起着决定性的作用，特别是系统的极点不但决定了系统的稳定性而且还决定了系统响应速度。下面考虑只有一个实极点的 Z 传递函数，当极点位置不同时它们的单位脉冲响应。对于单位脉冲序列 $\delta(k)$，它的 Z 变换为 1，在单位脉冲序列的作用下系统的动态过程，称为系统的单位脉冲响应。设系统输入为 $R(z)$，输出为 $Y(z)$，系统闭环 Z 传递函数为 $W(z)$。由于在单位脉冲作为输入时，有 $R(z)=1$，这时系统输出 $Y(z)=W(z)R(z)=W(z)$。

因此，若记系统单位脉冲响应序列为 $y(k)$，则有

$$y(k)=\mathscr{Z}^{-1}[W(z)]$$

即系统闭环 Z 传递函数 $W(z)$ 的 Z 反变换即为系统的单位脉冲响应函数。

设系统有一个位于 z_i 的单极点，则在系统闭环 Z 传递函数的部分分式中必存在有 $\dfrac{A_iz}{z-z_i}$ 这一项，在单位脉冲作用下，对应于这一项的输出序列为 $y(k)=A_iz_i$。当 z_i 位于 Z 平面不同位置时，它所对应的脉冲响应序列如图 3.5 所示。

(1) 极点在单位圆外的正实轴上，对应的暂态响应分量 $y(kT)$ 单调发散。

(2) 极点在单位圆与正实轴的交点，对应的暂态响应 $y(kT)$ 是等幅的。

(3) 极点在单位圆内的正实轴上，对应的暂态响应 $y(kT)$ 单调衰减。

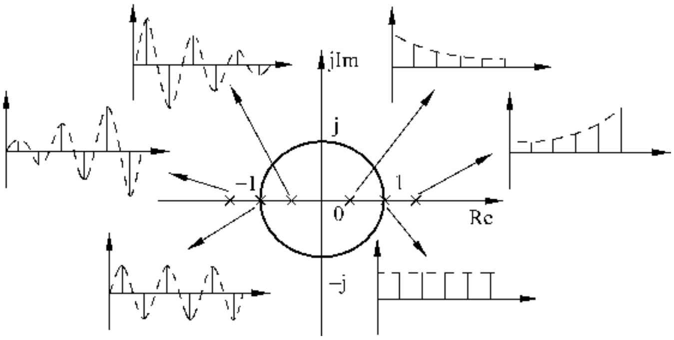

图 3.5　不同位置的实极点与脉冲响应的关系

(4) 极点在单位圆内的负实轴上，对应的暂态响应 $y(kT)$是以 $2T$ 为周期正负交替的衰减振荡。

(5) 极点在单位圆与负实轴的交点，对应的暂态响应 $y(kT)$是以 $2T$ 为周期正负交替的等幅振荡。

(6) 极点在单位圆外的负实轴上，对应的暂态响应 $y(kT)$是以 $2T$ 为周期正负交替的发散振荡。

对于只有一对共轭复数极点的情况，读者可参阅有关参考书。

下面通过实例对离散系统的过渡过程进行分析。

例 3.3　某离散系统如图 3.6 所示，分析该系统的过渡过程。

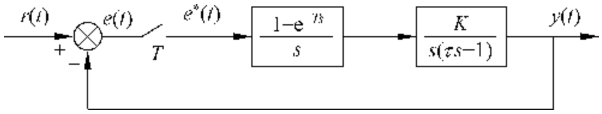

图 3.6　例 3.3 离散系统

设系统输入是单位阶跃函数 $R(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$。

解：

(1) 设 $K=1, T=\tau=1$；则

$$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s^2(s+1)}$$

$$G(z)=\frac{0.368z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$W(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-z^{-1}+0.632z^{-2}}$$

则

$$\begin{aligned}Y(z)&=W(z)R(z)\\&=\frac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-2z^{-1}+1.632z^{-2}-0.632z^{-3}}\\&=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.4z^{-3}+1.4z^{-4}+1.147z^{-5}+0.895z^{-6}+0.802z^{-7}\\&\quad+0.868z^{-8}+0.993z^{-9}+1.077z^{-10}+1.081z^{-11}+1.032z^{-12}+0.981z^{-13}\\&\quad+0.961z^{-14}+0.973z^{-15}+0.997z^{-16}+\cdots\end{aligned}$$

从上述数据可以看出，系统在单位阶跃函数作用下的过渡过程具有衰减振荡的形式，故系统是稳定的。其超调量约为 40%，且峰值出现在第 3、4 拍之间，约经 12 个采样周期过渡过程结束，如图 3.7 曲线 a 所示。

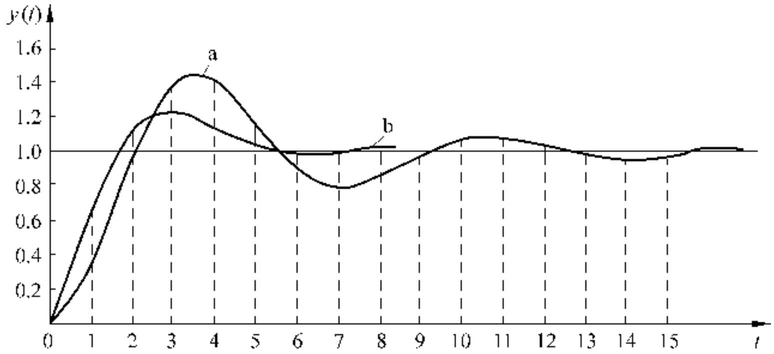

图 3.7　离散系统的响应曲线

(2) 现将图中的保持器去掉，$K=1$，$T=\tau=1$；则

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(z)=\frac{0.632z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$W(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.632z^{-1}}{1-0.736z^{-1}+0.368z^{-2}}$$

则

$$Y(z)=W(z)R(z)=\frac{0.632z^{-1}}{1-1.736z^{-1}+1.104z^{-2}-0.368z^{-3}}$$

$$=0.632z^{-1}+1.1z^{-2}+1.21z^{-3}+1.12z^{-4}+1.02z^{-5}+0.97z^{-6}+0.98z^{-7}+\cdots$$

由以上数据可知该二阶离散系统仍是稳定的，超调量约为 21%，峰值产生在第 3 拍，调整时间为 5 拍，如图 3.7 曲线 b 所示。可见，无保持器比有保持器的系统的动态性能好。这是因为保持器有滞后作用所致。

(3) 现将图中保持器去掉，设 $K=5$，$T=\tau=1$，则

$$G(s)=\frac{5}{s(s+1)}$$

$$G(z)=\frac{3.16z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$W(z)=\frac{3.16z^{-1}}{1+1.792z^{-1}+0.368z^{-2}}$$

则

$$Y(z)=\frac{3.16z^{-1}}{1+0.792z^{-1}-1.424z^{-2}-0.368z^{-3}}$$

$$=3.16z^{-1}-2.5z^{-2}+6.5z^{-3}-7.55z^{-4}+13.6z^{-5}+\cdots$$

由上面数据可以看出，当 $K=5$，$T=\tau=1$ 时，没有保持器的二阶系统是不稳定的，且是正负交替的发散式振荡较剧烈。

总之，对于二阶的连续系统无论 K 为何值都是稳定的，而采样控制系统则不然。

以上说明，利用 Z 变换本身含有时间概念的特点，分析采样控制系统的运动特性是很方便的，且很适用于计算机。

3.3 离散系统的稳态准确度分析

在连续系统中，稳态误差的计算可以通过两种方法进行：一种是建立在拉氏变换终值定理基础上的计算方法，可以求出系统的终值误差；另一种是从系统误差传递函数出发的动态误差系数法，可以求出系统动态误差的稳态分量。这两种计算稳态误差的方法，在一定条件下可以推广到离散系统。

由于离散系统没有唯一的典型结构形式，所以误差 Z 传递函数也不能给出一般的计算公式，离散系统的稳态误差需要针对不同形式的离散系统来求取。这里仅介绍利用 Z 变换的终值定理方法，求取误差采样的离散系统在采样瞬时的终值误差。

设单位负反馈误差离散系统如图 3.8 所示。其中 $G(s)$为连续部分的传递函数，$e(t)$为系统连续误差信号，$e^*(t)$为系统采样误差信号，其闭环误差 Z 传递函数为

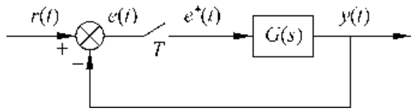

图 3.8 单位负反馈离散系统

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)}$$

如果 $W_e(z)$的极点(即闭环极点)全部严格位于 Z 平面的单位圆内，即若离散系统是稳定的，则可用 Z 变换的终值定理求出采样瞬时的终值误差为

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e^*(t) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})R(z)}{1+G(z)}$$

上式表明，线性定常离散系统的稳态误差，不但与系统本身的结构和参数有关，而且与输入序列的形式及幅值有关，除此之外，离散系统的稳态误差与采样周期的选取也有关。

在前面的分析中可知，零阶保持器的引入并不影响开环系统脉冲传递函数的极点。因此，Z 传递函数 $G(z)$的极点与相应的连续函数 $G(s)$的极点是一一对应的。如果 $G(s)$有 v 个 $s=0$ 的极点，即 v 个积分环节，则由 z 变换算子 $z=e^{Ts}$ 关系式可知，与 $G(s)$相应的 $G(z)$必有 v 个 $z=1$ 的极点。在离散系统中，也可以把开环脉冲传递函数 $G(z)$具有 $z=1$ 的极点数 v 作为划分离散系统类别的标准，与连续系统类似地，把 $G(z)$中 $v=0,1,2,\cdots$的系统，称为 0 型、Ⅰ型和Ⅱ型系统等。下面讨论图 3.8 所示的不同类别的离散系统在 3 种典型输入信号作用下的稳态误差，并建立离散系统稳态误差系数的概念。

1. 单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入 $r(t)=1(t)$时，其 Z 变换函数为

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$E(z) = \frac{1}{1+G(z)}\frac{z}{z-1}$$

由 Z 变换终值定理，得

$$e_{\mathrm{p}}(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G(z)}=\frac{1}{1+G(1)}=\frac{1}{K_{\mathrm{p}}}$$

称 $K_{\mathrm{p}}=\lim\limits_{z\to 1}[1+G(z)]$为位置放大系数。

若 $G(z)$没有 $z=1$ 的极点，则 $K_{\mathrm{p}}\neq\infty$，从而 $e(\infty)\neq 0$，这样的系统称为 0 型离散系统；若 $G(z)$有一个或一个以上 $z=1$ 的极点，则 $K_{\mathrm{p}}=\infty$，从而 $e(\infty)=0$，这样的系统称为Ⅰ型或Ⅰ型以上的离散系统。因而在单位阶跃函数作用下，0 型离散系统在采样瞬时存在位置误差，Ⅰ型或Ⅰ型以上的离散系统，在采样瞬时没有位置误差。这与连续系统相似。

2. 单位速度输入时的稳态误差

对于单位速度输入 $r(t)=t$ 时，其 Z 变换函数为 $R(z)=\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$时

$$E(z)=\frac{1}{1+G(z)}\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{\mathrm{v}}(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{1}{1+G(z)}\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{T}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)}$$

称 $K_{\mathrm{v}}=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)$为速度放大系数。

0 型系统的 $K_{\mathrm{v}}=0$，Ⅰ型系统的 K_{v} 为有限值，Ⅱ型或Ⅱ型以上的系统 $K_{\mathrm{v}}=\infty$。因而在单位速度函数作用下，0 型离散系统在采样瞬时稳态误差无穷大，Ⅰ型离散系统在采样瞬时存在速度误差；Ⅱ型或Ⅱ型以上的离散系统，在采样瞬时不存在稳态误差。

3. 单位加速度输入时的稳态误差

对于单位加速度输入 $r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$ 时，其 Z 变换函数为 $R(z)=\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$时

$$e_{\mathrm{a}}(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{1}{1+G(z)}\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}=\frac{T^2}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2G(z)}$$

称 $K_{\mathrm{a}}=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$为加速度放大系数。

0 型及Ⅰ型系统 $K_{\mathrm{a}}=0$，Ⅱ型系统的 K_{a} 为常值，Ⅲ型及Ⅲ型以上系统 $K_{\mathrm{a}}=\infty$。因而，0 型和Ⅰ型离散系统不能承受单位加速度函数作用，Ⅱ型离散系统在单位加速度信号作用下存在加速度误差，只有Ⅲ型或Ⅲ型以上的离散系统，在采样瞬时不存在稳态误差。

例 3.4 对于图 3.8 所示的离散系统，设 $G(z)=\dfrac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}$，$T=1\mathrm{s}$，求该系统在 3 种典型信号的作用下的稳态误差。

解：

（1）单位阶跃函数输入时

$$K_{\mathrm{p}}=\lim_{z\to 1}[1+G(z)]=\lim_{z\to 1}\left[1+\frac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}\right]=\infty$$

所以

$$e_{\mathrm{p}}(\infty)=\frac{1}{K_{\mathrm{p}}}=0$$

（2）单位速度函数输入时

$$K_{\mathrm{v}}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}=1$$

所以
$$e_{\mathrm{v}}(\infty)=\frac{T}{K_{\mathrm{v}}}=1$$

（3）单位加速度函数

$$K_{\mathrm{a}}=\lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}=0$$

所以
$$e_{\mathrm{a}}(\infty)=\frac{1}{K_{\mathrm{a}}}=\infty$$

由此可见，Ⅰ型离散系统在稳态时能准确地复现阶跃输入信号，在等速输入作用下存在恒定的稳态误差，而在加速度输入作用下稳态误差为∞，所以Ⅰ型系统不能跟踪加速度信号。

3.4 离散系统的响应

前面分析了离散系统在采样点上的过渡过程和稳态过程的特性。但是计算机控制系统的输出多为连续信号，要想进一步得到采样点间的响应，可用广义 Z 变换和广义 Z 传递函数来求得采样点间的响应。

3.4.1 离散系统在采样点间的响应

设单位负反馈误差离散系统如图 3.9 所示。其中 $G_0(s)$为被控对象连续部分的传递函数、ZOH 为零阶保持器的传递函数、$D(z)$为数字控制器的 Z 传递函数。

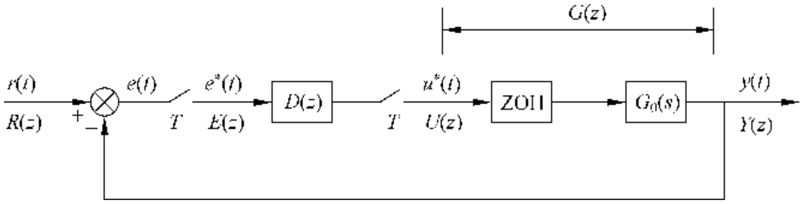

图 3.9 单位负反馈离散系统

设 $G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}G_0(s)\right]$，可以想象其输出 $y(t)$是经过假想延迟 e^{-qTs}之后再输出的，令 $\beta=1-q$，于是其闭环广义 Z 传递函数为

$$W(z,\beta)=\frac{Y(z,\beta)}{R(z)}$$

式中
$$Y(z,\beta)=G(z,\beta)U(z)$$

其中

$$U(z)=D(z)E(z)$$
$$E(z)=R(z)-Y(z)$$

$$Y(z)=G(z)U(z)$$

得到闭环广义 Z 传递函数

$$W(z,\beta)=\frac{D(z)G(z,\beta)}{1+D(z)G(z)}$$

其输出广义 Z 变换为

$$Y(z,\beta)=W(z,\beta)R(z)=\frac{D(z)G(z,\beta)}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

求得上式的 Z 反变换后，当 β 在 0～1 范围内取值时，就可得到在采样点间的输出响应 $y(t)$，即为连续输出信号。

如果采用超前型广义 Z 变换，则可得到

$$Y(z,\alpha)=\frac{D(z)G(z,\alpha)}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

例 3.5 对于图 3.9 所示的离散系统，设 $G_0(z)=\frac{1}{s+1}$，$D(z)=1.5$，$T=1\text{s}$，求该系统在单位阶跃信号的作用下，在采样点间的响应。

解：

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}G_0(s)\right]=\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1}\right]=\frac{0.632z^{-1}}{1-0.368z^{-1}}$$

$$G(z,\beta)=(1-z^{-1})\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{\mathrm{e}^{-\beta}z^{-1}}{1-0.368z^{-1}}\right)=\frac{[(1-\mathrm{e}^{-\beta})+(\mathrm{e}^{-\beta}-0.368)z^{-1}]z^{-1}}{1-0.368z^{-1}}$$

于是可得闭环 Z 传递函数为

$$W(z,\beta)=\frac{Y(z,\beta)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z,\beta)}{1+D(z)G(z)}=\frac{1.5[(1-\mathrm{e}^{-\beta})+(\mathrm{e}^{-\beta}-0.368)z^{-1}]z^{-1}}{1-0.58z^{-1}}$$

由于输入 $R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$，故系统输出的广义 Z 变换为

$$\begin{aligned}Y(z,\beta)&=\frac{1.5(1-\mathrm{e}^{-\beta})z^{-1}+1.5(\mathrm{e}^{-\beta}-0.368)z^{-2}}{1-0.42z^{-1}-0.58z^{-2}}\\&=1.5(1-\mathrm{e}^{-\beta})z^{-1}+1.5(0.58\mathrm{e}^{-\beta}+0.052)z^{-2}+1.5(0.602-0.336\mathrm{e}^{-\beta})z^{-3}\\&\quad+1.5(0.195\mathrm{e}^{-\beta}+0.283)z^{-4}+\cdots\end{aligned}$$

当 $\beta=0$～1 时，就可得到在采样点间的输出响应 $y(t)$，如图 3.10 所示。

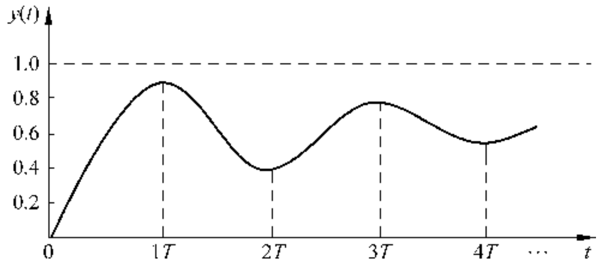

图 3.10 线性离散系统在采样点间的输出响应