

第3章

电路的基本分析方法

内容提要

本章引入了网络图论的概念,初步建立电路的图的概念,简单介绍了图、连通图和子图、树、树枝、连支的概念。在图论知识体系的基础上,确定由 KCL 和 KVL 所建立的独立方程的个数。重点研究讨论电路分析的一般方法,即以独立电流、电压变量列写电路方程的方法。包括以支路电流和支路电压为未知变量的支路分析法,以网孔电流为未知变量的网孔电流法,以回路电流为未知变量的回路电流法,以节点电压为未知变量的节点电压法。

电路分析的一般方法是对给定结构和元件的电路,确定电路中的所有支路电压和支路电流,或者某些指定的支路电压和支路电流,这是电路分析普遍适用的方法,也是计算机辅助电路分析的基础。

3.1 教学要点及难点

3.1.1 电路的图

1. 电路的图

电路的图是一个节点集和一个支路集的集合,通常用 $G(\text{Graph})$ 来表示。

在图 G 的定义中,节点集和支路集各自成为一个整体,但任意一条支路的两端必须与节点相连,图中不能有不与节点相连的支路,但允许节点不与支路相连(即允许有孤立节点存在)。

2. 连通图和非连通图

如果一个图 G 的全部节点都被支路连通,称该图为连通图;否则称为非连通图。

3. 有向图和无向图

所有支路都被赋予方向的图,称为有向图;否则称为无向图。

4. 子图、路径、回路和网孔

子图:图 G 的一部分称为子图。

路径:从一个节点出发,依次经过图上的支路和节点(每一节点和支路只经过一次)到达另一个节点,这种子图称为路径。

回路:闭合路径称为回路。

网孔:回路内不含支路的回路称为网孔。

5. 平面图和非平面图

如果把一个图画在平面上,能使其各条支路除与节点连接外不再交叉,这种图称为

平面图；否则称为非平面图。

6. 树

包含了连通图 G 的全部节点,但不含任何回路的连通子图,称为图 G 的树(Tree),用符号“ T ”来表示。

7. 树支和连支

树支:属于树上的支路,称为树支;连支:不属于树上的支路,称为连支。

8. 节点 n 、支路 b 、树支 T 、连支 L 在数量上的关系

在具有 n 个节点, b 条支路的图 G 中,存在如下关系:

$$T = n - 1, \quad L = b - T = b - (n - 1) = b - n + 1$$

9. 单连支回路(又称基本回路)

如果对应任一个树,每增加一个连支,便形成一个含该连支在内的一个回路,该回路中其他支路都是树支,这种回路称为单连支回路(即基本回路)。基本回路一定是独立回路,但独立回路不一定是基本回路。

3.1.2 KCL 和 KVL 的独立方程数

所谓“独立性”,是指每一个变量都是独立的,不能够由其他变量通过线性组合得到。

1. 独立方程

若一个方程可由其他方程组合得到,这些方程线性相关。若每一个方程都无法由其他方程得到,这些方程线性无关。线性无关的方程是独立方程。

全部线性无关的方程构成独立方程组。

2. KCL、KVL 的独立方程数

$$\text{KCL 的独立方程数} = \text{节点数} - 1$$

$$\text{KVL 的独立方程数} = \text{支路数} - \text{节点数} + 1$$

3. 独立方程数与树支 T 、连支 L 在数量上的关系

$$\text{KCL 的独立方程数} = T = \text{节点数} - 1$$

$$\text{KVL 的独立方程数} = L = \text{支路数} - \text{节点数} + 1$$

3.1.3 支路法

支路法以支路电流和支路电压为求解变量。对一个具有 b 条支路和 n 个节点的电

路,总计有 $2b$ 个未知量。根据 KCL 可以列出 $(n-1)$ 个独立方程,根据 KVL 可以列出 $(b-n+1)$ 个独立方程,根据元件的 VCR 对每一条支路又可以列出 b 个方程,总计可列出 $2b$ 个方程,与未知量数目相等。 $2b$ 个方程可解出 b 条支路电流和 b 条支路电压,这种方法称为支路法,也称 $2b$ 法。

支路法又分为支路电流法和支路电压法。以支路电流为未知量,建立联立方程组求解电路的方法,称为支路电流法。以支路电压为未知量,建立联立方程组求解电路的方法,称为支路电压法。

3.1.4 网孔电流法

网孔电流法以网孔电流为求解变量。对一个具有 b 条支路和 n 个节点的电路,根据 KVL 可以列出 $(b-n+1)$ 个独立方程。如果电路中含有无伴电流源,则需要附加一个变量,即无伴电流源的端电压,同时增加一个无伴电流源的电流与网孔电流之间的约束方程。

注 网孔电流法只适用于平面电路,不适用于非平面电路。

网孔电流法的几点说明

- ① 自阻 R_{kk} 恒为正值。
- ② 互阻 R_{kj} 有正、负之分。

当网孔电流 i_{mk} 与网孔电流 i_{mj} 在公共电阻上参考方向相同时,互阻 R_{kj} 为正值;反之,当网孔电流 i_{mk} 与网孔电流 i_{mj} 在公共电阻上参考方向相反时,互阻 R_{kj} 为负值。

在不含受控源的电路中,有 $R_{kj}=R_{jk}$ 。

若两个网孔之间无公共支路,或虽有公共支路但电阻为零(例如,公共支路仅含电压源),则互阻为零。

特例 若将所有网孔电流都取为顺(或逆)时针方向,则互阻总为负值。

- ③ 当电路中存在电流源与电阻的并联组合时,应首先将其等效变换为电压源与电阻的串联组合形式。

④ 当电路中存在无伴电流源时,应将无伴电流源两端的电压作为一个求解变量。此时虽然多了一个未知变量,但无伴电流源所在支路的电流为已知(即无伴电流源的电流),所以可再增加一个无伴电流源的电流与网孔电流之间的约束方程。联立方程组,即可求解。

- ⑤ 当电路中含有受控源,可暂时将其作为独立源处理。

对于含有受控电压源和有伴的受控电流源的情况,可暂时将其作为独立源按照一般的网孔电流法将其列于网孔电流方程的右侧,同时把控制量用网孔电流来表示,然后再将用网孔电流表示的受控源项移至方程左侧。

对于含有无伴受控电流源的电路,可暂时将其作为独立源按照 d 条中的方法予以处理,即在每组方程中补充一个受控电流源与相关网孔电流的方程。即可求解。

注 在含有受控源的电路中,网孔电流方程的互阻是不相等的,因为受控源对电路

的影响将体现在互阻中。

3.1.5 回路电流法

回路分析法以回路电流为求解变量。对一个具有 b 条支路和 n 个节点的电路,根据 KVL 可以列出 $(b-n+1)$ 个独立方程。如果电路中含有无伴电流源,其处理方法有两种(详见本节下文 2. 扩展型回路电流方程列写方法)。

注 网孔电流法适用的范围平面电路,回路电流法也适用;但对于网孔电流法不适用的非平面电路,回路电流法仍然适用。因此,回路电流法具有比网孔电流法更为广泛的适用性,是电路中最常见的一种分析方法。

1. 回路电流法的几点说明

① 自阻 R_{kk} 恒为正值。

② 互阻 R_{kj} 有正、负之分。

当回路电流 i_{lk} 与回路电流 i_{lj} 在公共电阻上参考方向相同时,互阻 R_{kj} 为正值;反之,当回路电流 i_{lk} 与回路电流 i_{lj} 在公共电阻上参考方向相反时,互阻 R_{kj} 为负值。

在不含受控源的电路中,有 $R_{kj} = R_{jk}$ 。

若两个回路之间无公共支路,或虽有公共支路但电阻为零,则互阻为零。

③ 当电路中存在电流源与电阻的并联组合时,应首先将其等效变换为电压源与电阻的串联组合形式。

④ 当电路中存在无伴电流源时,由于电流源两端的电压是未知量,所以无法用一般的回路电流法列写方程。在这种情况下,对一般回路电流法进行扩展,为与一般回路电流法区别,称此种方法为“扩展型回路电流法”(详见本节下文 2. 扩展型回路电流方程列写方法)。

⑤ 当电路中含有受控源,可暂时将其作为独立源处理。

对含有受控电压源和有伴受控电流源的支路,可暂时将其作为独立源按一般回路电流法将其列于回路电流方程的右边,同时把控制量用回路电流来表示。然后,再将用回路电流表示的受控源项移到方程的左边。

对含有无伴受控电流源的电路,可按扩展型回路电流法处理。

注 在含有受控源的电路中,回路电流方程的互阻是不相等的,因为受控源对电路的影响将体现在互阻中。

2. 扩展型回路电流方程列写方法

方法一 首先将无伴电流源两端的电压设为一个变量,然后按照“回路电流方程的一般形式”列写回路电流方程。在列写方程时,增添了附加变量(无伴电流源两端的电压)的无伴电流源暂时按电压源处理,其电压值列于方程的右侧。由于在方程中,除了有回路电流变量外,又增加了无伴电流源两端的电压这一变量,所以需要补充一个附加方

程,该附加方程为以回路电流表示无伴电流源的电流。回路电流方程和附加方程两者联立,即可获得电路的解。

特点 对无伴电流源引入电压变量(增加了一个变量),依据 KVL 列写方程;然后将无伴电流源的电流用回路电流表示(增加了一个方程)。联立上述方程,求解电路变量。

方法二 当电路中含有多个无伴电流源时,尽量多选电流源所在支路为连支,这样就可把所选的各电流源的电流分别作为一个独立回路的回路电流,由于这些回路电流均为已知,所以只需列写其他回路电流方程,再将已知回路电流代入其他各回路电流方程中,即可求出各回路电流,简化了电路的计算。

特点 合理地选择“树支”,也就是将无伴电流源所在的支路选为“连支”,那么在包含该连支的基本回路中,回路电流即为无伴电流源的电流(该电流为已知)。这样,该回路的电流方程可以省略不写。

方法一与方法二的对比 对于一个“具有 n 个节点、 b 条支路、1 个无伴电流源的电路”方法一增加了一个未知量,同时增加了一个方程;方法二则减少了一个方程。方法一的方程数为 $(b-n+1)+1=b-n+2$,方法二的方程数为 $(b-n+1)-1=b-n$ 。显然,方法二较方法一更为简便。如果电路中含有一个以上的无伴电流源,方法二的优越性将更加明显,因为每增加一个无伴电流源,方程数就在 $b-n+1$ 的基础上减少 1,而方法一则在 $b-n+1$ 的基础上增加 1。

注 在某些情况下,如果无法将全部无伴电流源所在的支路选为连支,可以采用两种方法混合使用的求解方法。即对于不能作为连支的无伴电流源支路,采用方法一;能够作为连支的无伴电流源支路,采用方法二。

3.1.6 节点电压法

节点分析法以节点电压为求解变量。对一个具有 b 条支路和 n 个节点的电路,根据 KCL 可以列出 $n-1$ 个方程。如果电路中含有无伴电压源,其处理方法有两种(详见本节下文 2. 改进型节点电压方程列写方法)。

节点电压: 是指相对于某一参考节点而言的,所以,对一个具有 n 个节点的电路,可选择任意一个节点为参考节点,其他 $n-1$ 个节点对参考节点的电压称为节点电压(或节点电位),其对应的 $n-1$ 个节点称为独立节点。

节点电压的参考方向: 是由各独立节点指向参考点。即参考节点处是节点电压的负极,各独立节点处是节点电压的正极。

注 节点电压法不仅适用于一般规模的电路,而且也适用于大型电网络,是计算机辅助分析中最为流行的方法。无论是平面电路还是非平面电路,节点电压法都适用。

1. 节点电压法的几点说明

① 自导 G_{kk} 恒为正值。

② 互导 G_{kj} 恒为负值。

在不含受控源的电路中,有 $G_{kj}=G_{jk}$ 。

若两节点之间无公共电阻(电导),则互导为零。

③ 在电路中,若出现电流源与电阻的串联组合支路,此串联电阻视为“无”;同样,若出现电压源与电阻的并联组合支路,此并联电阻也将视为“无”。视为“无”的电阻为“多余元件”,不出现在节点电压方程的自导和互导中。

④ 当电路中含有无伴电压源时,由于无伴电压源支路的电导为无穷大,所以无法用一般的节点电压法列写方程。在这种情况下,对一般节点电压法进行改进,为与一般节点电压法区别,称此种方法为“改进型节点电压法”(详见本节下文 2. 改进型节点电压法方程列写方法)。

⑤ 对于含有受控源的电路,可暂时将受控源作为独立源处理。

对含有受控电流源和有伴受控电压源的支路,可暂时将受控源作为独立源按一般节点电压法,将受控源项列于方程的右边,同时把控制量用节点电压来表示。然后,再将用节点电压表示的受控源项移到方程的左边。

对含有无伴受控电压源的电路,可按改进型节点电压法处理。

2. 改进型节点电压方程列写方法

方法一 首先将无伴电压源中的电流设为一个变量,然后按照“节点电压方程的一般形式”列写节点电压方程。在列写方程时,增添了附加变量(无伴电压源的电流)的无伴电压源暂时按电流源处理。由于在方程中,除了有节点电压变量外,又增加了无伴电压源中的电流这一变量(又称“混合变量法”),所以需要补充一个附加方程,该附加方程为以节点电压表示的无伴电压源的电压。节点电压方程和附加方程两者联立,即可获得电路的解。

方法二 将与无伴电压源相连的一个节点选为参考节点。建议将与无伴电压源的负极相连的那一个节点选为参考节点,这样,与无伴电压源的正极相连的那一个节点(非参考节点)的节点电压便为已知,其值为无伴电压源的电压。

方法一与方法二的对比 对于一个“具有 n 个节点、1 个无伴电压源的电路”,方法一增加了一个未知量,同时增加了一个方程;方法二则减少了一个方程。方法一的方程数为 $(n-1)+1=n$,方法二的方程数为 $(n-1)-1=n-2$ 。显然,方法二较方法一更为便于求解。如果电路中含有 m 个无伴电压源($m \geq 2$),且这 m 个无伴电压源都连接在一个“公共节点”上,应用方法二,将该“公共节点”选为参考节点,则 m 个节点的节点电压为已知,此时方法二的方程数为 $n-1-m$;而应用方法一时,方程数将为 $n-1+m$ 。对比两种方法,方法二的优越性将更加明显。

注 如果某个电路含有 m 个无伴电压源($m \geq 2$),且这 m 个无伴电压源并不连接在同一个节点上,那么可以采用两种方法混合使用的求解方法。

3.1.7 本章难点

① 与电路的图有关的基本概念。

② 用网孔电流法或回路电流法处理含有无伴电流源的电阻电路。

- ③ 用节点电压法处理含有无伴电压源的电阻电路。
- ④ 用节点电压法处理含有电流源与电阻的串联组合支路的电阻电路。
- ⑤ 对含有受控源的电阻电路的处理方法。

3.2 典型例题解析

【例 3.1】 在如图 3.1 所示图 G 中,以 $\{1,2,4\}$ 为树,写出图 G 的基本回路组(单连支回路组)。

分析 图 G 中,有 4 个节点,6 条支路。以 $\{1,2,4\}$ 为树,每增加一个连支,便形成一个含该连支在内的一个回路(取回路中其他支路都是树支),即单连支回路(基本回路)。

解 根据分析可得,

$$n = 4, \quad b = 6, \quad T = n - 1 = 3$$

则连支数为

$$L = b - T = b - (n - 1) = b - n + 1 = 3$$

基本回路组为 $\{1,2,3,4\}, \{1,4,5\}, \{1,2,6\}$ 。

【例 3.2】 图 3.2 所示电路中, $U_{S1} = 4\text{V}$, $U_{S3} = 2\text{V}$, $I_{S2} = 0.1\text{A}$, $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, 应用支路电流法,求各支路的电流及电流源发出的电功率 P_2 。

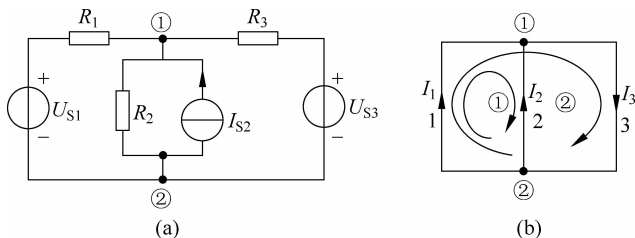


图 3.2 例 3.2

分析 电路中电流源与电阻的并联组合看作一条支路处理,等效变换为电压源与电阻的串联组合。

解 电路中含有一条有伴电流源支路,可以先将其等效变换为 2V 电压源与 20Ω 电阻串联的有伴电压源。应用支路电流法。选定支路电流方向、回路绕行方向,如图 3.2(b) 所示。

对独立节点①,按 KCL 得

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

对独立回路①、②,按 KVL 得

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_{S1} - R_2 I_{S2}$$

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = U_{S1} - U_{S3}$$

代入数据

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$10I_1 - 20I_2 = 2$$

$$10I_1 + 10I_3 = 2$$

解得

$$I_1 = 0.12(\text{A}), \quad I_2 = -0.04(\text{A}), \quad I_3 = 0.08(\text{A})$$

电流源发出的电功率为

$$P_2 = (U_{S1} - R_1 I_1) I_{S2} = 2.8 \times 0.1 = 0.28(\text{W})$$

【例 3.3】 用网孔电流法求图 3.3 所示电路中各电源发出的电功率。

解 设三个网孔电流 I_{m1}, I_{m2}, I_{m3} 如图 3.3 所示。列写如下网孔电流方程

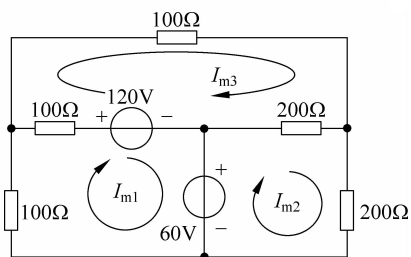


图 3.3 例 3.3

$$(100 + 100)I_{m1} - 0I_{m2} - 100I_{m3} = -180$$

$$0I_{m1} + (200 + 200)I_{m2} - 200I_{m3} = 60$$

$$-100I_{m1} - 200I_{m2} + (100 + 200 + 100)I_{m3} = 120$$

化简为

$$200I_{m1} - 100I_{m3} = -180$$

$$400I_{m2} - 200I_{m3} = 60$$

$$-100I_{m1} - 200I_{m2} + 400I_{m3} = 120$$

联立上述方程,解得

$$I_{m1} = -0.78(\text{A}), \quad I_{m2} = 0.27(\text{A}), \quad I_{m3} = 0.24(\text{A})$$

各电源发出的电功率分别为

$$P_{120\text{V}} = 120 \times (I_{m3} - I_{m1}) = 120 \times (0.20 + 0.80) = 120(\text{W})$$

$$P_{60\text{V}} = 60 \times (I_{m2} - I_{m1}) = 60 \times (0.25 + 0.80) = 63(\text{W})$$

【例 3.4】 电路如图 3.4(a)所示,已知 $U_{S1} = U_{S2} = 1\text{V}$, $I_S = 1\text{A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\Omega$,求各支路的电流。

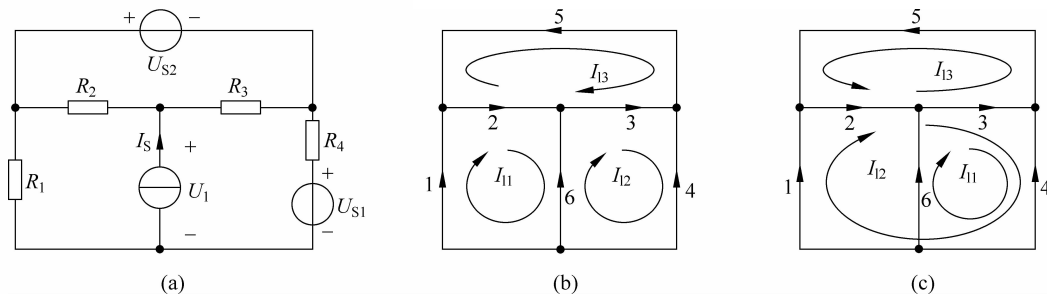


图 3.4 例 3.4

分析 电路中支路数比较多,独立回路数相对较少,可以采用回路电流法求解。但电路中含有无伴电流源支路,所以无法用一般的回路电流法列写方程,可以采用本章要点中介绍的扩展型回路电流法。扩展型回路电流方程列写方法有两种。

解法一 电路中含有一个无伴电流源,先假设其两端的电压为 u_1 ,如图 3.4(a)所示。

选取三个网孔为回路,回路电流方向如图 3.4(b)所示。回路电流方程为

$$(R_1 + R_2)I_{11} - R_2 I_{13} = -U_1$$

$$(R_3 + R_4)I_{12} - R_3 I_{13} = U_1 - U_{S1}$$

$$(R_2 + R_3)I_{13} - R_2 I_{11} - R_3 I_{12} = -U_{S2}$$

这里三个回路电流和一个电流源电压 u_1 ,共四个变量,需增加一个无伴电流源与相关回路关联的电流方程式:

$$I_{12} - I_{11} = I_S$$

联立求解这四个方程,就可以解出三个回路电流和电流源两端的电压,将参数代入上述方程便得

$$2I_{11} - I_{13} = -U_1$$

$$2I_{12} - I_{13} = U_1 - 1$$

$$-I_{11} - I_{12} + 2I_{13} = -1$$

$$I_{12} - I_{11} = 1$$

解得

$$I_{11} = -1.5(\text{A})$$

$$I_{12} = -0.5(\text{A})$$

$$I_{13} = -1.5(\text{A})$$

各支路电流为

$$I_1 = I_{11} = -1.5(\text{A})$$

$$I_2 = I_{11} - I_{13} = 0(\text{A})$$

$$I_2 = I_{12} - I_{13} = -0.5 - (-1.5) = 1(\text{A})$$

$$I_4 = -I_{12} = 0.5(\text{A})$$

$$I_5 = -I_{13} = 1.5(\text{A})$$

$$I_6 = I_{12} - I_{11} = 1(\text{A})$$

解法二 选取电流源支路为连支,该单连支所在的回路电流便为已知电流源的电流,这样,该回路的电流方程可以省略不列写。

如图 3.4(c)所示选取电流源支路 6 为连支(选取 2、3、4 为树)作为一个回路电流 I_{11} ,其他两个回路为 I_{12} 、 I_{13} ,则三个回路电流方程为

$$I_{11} = I_S$$

$$(R_3 + R_4)I_{11} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_1)I_{12} + (R_2 + R_3)I_{13} = -U_{S1}$$

$$R_3 I_{11} + (R_2 + R_3)I_{12} + (R_2 + R_3)I_{13} = -U_{S2}$$

式中,回路电流 I_{11} 是电流源 I_S 的值,等于 1A,此回路电流方程不必列写。上述三个方程代入参数值后得

$$I_{11} = 1$$

$$2I_{11} + 4I_{12} + 2I_{13} = -1$$

$$I_{11} + 2I_{12} + 2I_{13} = 1$$

解得

$$I_{11} = 1(\text{A}) \quad I_{12} = -1.5(\text{A}) \quad I_{13} = 1.5(\text{A})$$

各支路电流为

$$I_1 = I_{11} = -1.5(\text{A}) \quad I_2 = I_{12} + I_{13} = 0 \quad I_3 = I_{11} + I_{12} + I_{13} = 1(\text{A})$$

$$I_4 = -I_{11} - I_{12} = 0.5(\text{A}) \quad I_5 = -I_{13} = 1.5(\text{A}) \quad I_6 = 1(\text{A})$$

注 由此例可见,当用回路电流法对含有无伴电流源电路建立方程时,适当地选择树,可将电流源支路选为连支,可以简化电路的计算。

【例 3.5】 如图 3.5 所示电路,求受控源输出的电功率。

分析 对于含有受控源的电路,将受控源作为独立源处理。

解 选两个网孔为独立回路,回路电流 I_{11} 和 I_{12} 如图 3.5 所示。由此回路列写回路电流方程为

$$12I_{11} - 2I_{12} = 6 - 8I$$

$$-2I_{11} + 6I_{12} = 8I - 4$$

附加方程为

$$I = I_{12}$$

把附加方程代入上两个方程中得

$$12I_{11} + 6I_{12} = 6$$

$$-2I_{11} - 2I_{12} = -4$$

解得

$$I_{11} = -1(\text{A}) \quad I_{12} = 3(\text{A})$$

受控源输出的电功率为

$$P_{8I} = 8I \times (I_{12} - I_{11}) = 8 \times 3 \times 4 = 96(\text{W})$$

注 由此例可见,含有受控源的电路所列写的回路方程中 $R_{12} = 6, R_{21} = -2, R_{12} \neq R_{21}$,说明含有受控源的电路的回路方程中,互阻 $R_{ij} \neq R_{ji}$ 。

【例 3.6】 应用节点电压法,确定如图 3.6 所示电路中电源的电流 I_1 和 I_2 。

解 选择④为参考节点,其他节点编号如图 3.6 所示。图中三个独立节点①、②、③的节点电压方程为

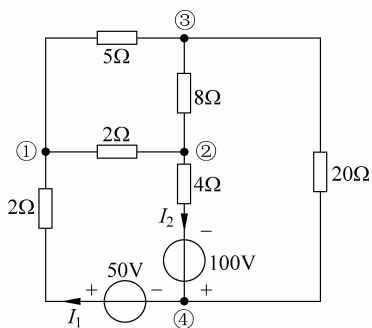


图 3.6 例 3.6

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n1} - \frac{1}{2}U_{n2} - \frac{1}{5}U_{n3} &= \frac{50}{2} \\ -\frac{1}{2}U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)U_{n2} - \frac{1}{8}U_{n3} &= -\frac{100}{4} \\ -\frac{1}{5}U_{n1} - \frac{1}{8}U_{n2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right)U_{n3} &= 0 \end{aligned}$$

经整理

$$\begin{aligned} 12U_{n1} - 5U_{n2} - 2U_{n3} &= 250 \\ -4U_{n1} + 7U_{n2} - U_{n3} &= -200 \\ -8U_{n1} - 5U_{n2} + 15U_{n3} &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$U_{n1} = 11.30(\text{V}) \quad U_{n2} = -22.31(\text{V}) \quad U_{n3} = -1.41(\text{V})$$

电源的电流为

$$I_1 = \frac{1}{2} \times (50 - U_{n1}) = \frac{1}{2} \times (50 - 11.30) = 19.35(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \times (100 + U_{n2}) = \frac{1}{4} \times (100 - 22.32) = 19.42(\text{A})$$

【例 3.7】 电路如图 3.7 所示,求 8A 电流源两端的电压 U 。

分析 电路中支路数比较多,独立回路数和独立节点数相对较少,可以采用回路电流法或节点电压法求解。因电路中含有两个无伴电压源支路,只要参考节点选择合适,就会使节点电压方程大为简化。

解 图中含有两个无伴电压源,选择两个电压源共同的节点 0 为参考节点,独立节点①、②、③节点电压为 U_{n1} 、 U_{n2} 和 U_{n3} ,其中 U_{n1} 、 U_{n2} 均为已知。列出节点电压方程

$$U_{n1} = 6$$

$$U_{n2} = 36$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)U_{n3} - \frac{1}{4}U_{n1} - \frac{1}{2}U_{n2} = -8 + \frac{10}{2}$$

解得

$$U_{n3} = 22(\text{V})$$

$$U = U_{n3} - 2 \times 8 = 22 - 16 = 6(\text{V})$$

注 此例用节点电压法求解,电路中含有 8A 电流源与 2Ω 电阻的串联组合支路, 2Ω 电阻将视为“无”,它既不出现在节点电压方程的自导中,也不出现在互导中。

【例 3.8】 如图 3.8 所示电路,求受控电流源输出的电功率。

分析 用节点电压法求解。在电路中:

① 出现了两个受控源,将受控源作为独立源处理。

② 出现了受控电流源与电阻的串联组合支路,此电阻视为“无”;视为“无”的电阻为“多余元件”,不要写在节点电压方程的自导和互导中。

③ 出现了一个无伴电压源支路,一个无伴受控电压源支路,只要参考节点选择合适,就会使节点电压方程大为简化。

解 根据上述分析,选择无伴电压源支路与无伴受控电压源支路共同的节点 0 为参考节点,节点电压为 U_{n1} 、 U_{n2} 和 U_{n3} 。列写节点电压方程

$$U_{n1} = 0.5I$$

$$U_{n2} = 36$$

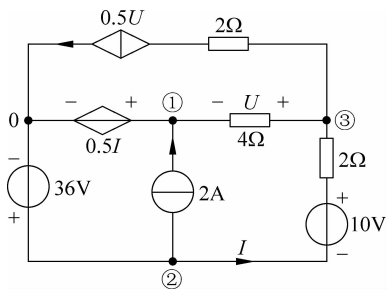


图 3.8 例 3.8

$$-\frac{1}{4}U_{n1} - \frac{1}{2}U_{n2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)U_{n3} = -0.5U + \frac{10}{2}$$

将控制量用节点电压表示为

$$I = (10 + U_{n2} - U_{n3})/2$$

$$U = U_{n3} - U_{n1}$$

将上述两个方程代入节点电压方程中,并整理得

$$4U_{n1} + U_{n3} = 46$$

$$-3U_{n1} + 5U_{n3} = 92$$

解得

$$U_{n1} = 6(\text{V})$$

$$U_{n3} = 22(\text{V})$$

$$U = U_{n3} - U_{n1} = 22 - 6 = 16(\text{V})$$

受控电流源输出的电功率为

$$P_{0.5U} = 0.5U \times (-U_{n3} + 0.5U \times 2) = -48(\text{W})$$

注 与 $0.5U$ 受控电流源串联的 2Ω 电阻,不出现在自导及互导中。

3.3 相关知识扩展——电阻容差对电路性能的影响

电阻容差指的是电阻取值偏差。在电路分析和设计中,电阻数值都是按标准值计算的,而实际生产的电阻阻值通常是离散的,阻值是在标准值附近变化,变化值在容差范围内。电阻容差对电路性能有很大影响,评价这些影响的方法是性能灵敏度分析。

灵敏度分析:研究电路组件的数值对电路输出的影响。

【例 3.9】 图 3.9 所示电路中,研究相对于 R_1 变化时,节点电压 u_1 和 u_2 的灵敏度。

解 应用节点电压法得

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_1 - \frac{1}{R_2}u_2 = -I_{s1}$$

$$-\frac{1}{R_2}u_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_2 = I_{s2}$$

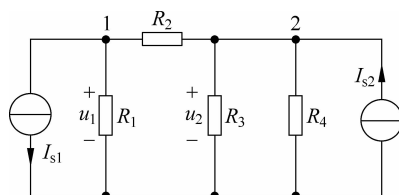


图 3.9 例 3.9

联立求解得

$$u_1 = \frac{R_1 \{R_3 R_4 I_{s2} - [R_3 R_4 + R_2 (R_3 + R_4)] I_{s1}\}}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4} \quad (1)$$

$$u_2 = \frac{R_3 R_4 [(R_1 + R_2) I_{s2} - R_1 I_{s1}]}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4} \quad (2)$$

u_1 相对于 R_1 的灵敏度通过式①对 R_1 求导获得, u_2 相对于 R_1 的灵敏度通过式②对 R_1 求导获得。

$$\frac{du_1}{dR_1} = \frac{[R_3 R_4 + R_2 (R_3 + R_4)] \{R_3 R_4 I_{s2} - [R_3 R_4 + R_2 (R_3 + R_4)] I_{s1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4]^2} \quad (3)$$

$$\frac{du_2}{dR_1} = \frac{R_3 R_4 \{R_3 R_4 I_{s2} - [R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4] I_{s1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4]^2} \quad (4)$$

设图 3.9 中, $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 75\Omega$, $I_{s1} = 12\text{A}$, $I_{s2} = 16\text{A}$ 。如果 R_1 的值的容差与它的标称值相差 10%, 用灵敏度预测 u_1 和 u_2 的值。

根据式①和式②, 求 u_1 和 u_2 的标称值。

$$u_1 = \frac{25 \times \{50 \times 75 \times 16 - [50 \times 75 + 5 \times (50 + 75)] \times 12\}}{(25 + 5) \times (50 + 75) + 50 \times 75} = 25(\text{V})$$

$$u_2 = \frac{50 \times 75 \times [(25 + 5) \times 16 - 25 \times 12]}{(25 + 5) \times (50 + 75) + 50 \times 75} = 90(\text{V})$$

根据式③和式④, 可以求得 R_1 变化时 u_1 和 u_2 的灵敏度,

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dR_1} &= \frac{[50 \times 75 + 5 \times (50 + 75)] \times \{50 \times 75 \times 16 - [50 \times 75 + 5 \times (50 + 75)] \times 12\}}{[(25 + 5) \times (50 + 75) + 50 \times 75]^2} \\ &= \frac{7}{12}(\text{V}/\Omega) \end{aligned}$$

$$\frac{du_2}{dR_1} = \frac{50 \times 75 \times \{50 \times 75 \times 16 - [5 \times (50 + 75) + 50 \times 75] \times 12\}}{[(25 + 5) \times (50 + 75) + 50 \times 75]^2} = 0.5(\text{V}/\Omega)$$

① 假定 R_1 比它的标称值少 10%, 即 $R_1 = 22.5\Omega$, $\Delta R_1 = -2.5\Omega$, 由式③分析预测 Δu_1 为

$$\Delta u_1 = \left(\frac{7}{12}\right) \times (-2.5) = -1.4583(\text{V})$$

所以, 如果 R_1 比它的标称值少 10%, 则分析预测 u_1 为

$$u_1 = 25 - 1.4583 = 23.5417(\text{V})$$

同理可得

$$\Delta u_2 = 0.5 \times (-2.5) = -1.25(\text{V})$$

$$u_2 = 90 - 1.25 = 88.75(\text{V})$$

② 假定 R_1 比它的标称值多 10%, 即 $R_1 = 27.5\Omega$, $\Delta R_1 = 2.5\Omega$, 用灵敏度预测 u_1 和 u_2 的值, 其方法同上。

注 此例仅仅研究了相对于 R_1 值的容差与它的标称值相差 10% 时, 用灵敏度预测 u_1 和 u_2 的值的一种情况, 同理可以分析电路中其他组件值变化时, 电压 u_1 和 u_2 的灵敏度。但要进一步研究, 其工作量非常大, 此时, 可以采用 PSpice 软件的灵敏度函数进行分析。

说明 为了使电路正常工作, 电阻应当接近它的标准值, 即选择容差小的电阻, 但容差较小(比如 0.1%) 的电阻比容差较大(比如 10%) 的电阻价格要贵得多。因此设计者必须考虑电路组件的数值对电路输出的影响, 进而给出可以接受的组件容差值。

3.4 思考与训练

1. 选择思考题

3.1 图 3.10 所示电路中若选择适当的参考点, 可用一个节点电压方程解出 U_a , 该

方程为()。

- A. $(G_2 + G_3)U_a - G_2U_s = I_s$ B. $(G_2 + G_3 + G_1)U_a - G_2U_s = I_s$
 C. $(G_2 + G_3 + G_1)U_a - (G_2 + G_1)U_s = I_s$ D. $(G_2 + G_3)U_a - G_2U_s = -I_s$

3.2 图 3.11 电路中节点 3 的节点电压方程是()。

- A. $-\frac{13}{10}U_3 + \frac{1}{4}U_1 + 3U_4 = 0$ B. $-\frac{3}{2}U_3 + \frac{1}{4}U_1 + 2U_4 - \frac{1}{2}U_2 = 0$
 C. $-\frac{3}{2}U_3 - \frac{1}{4}U_1 - 2U_4 - \frac{1}{2}U_2 = 0$ D. $-\frac{13}{2}U_3 + \frac{1}{4}U_1 - 3U_4 = 0$

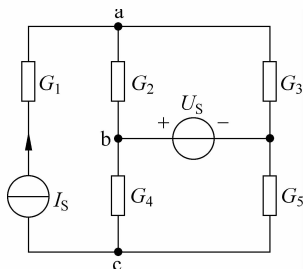


图 3.10 题 3.1

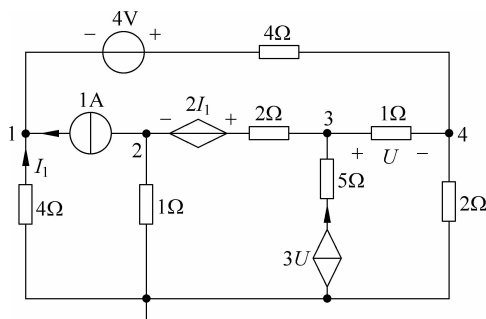


图 3.11 题 3.2

3.3 图 3.12 电路中节点 a 的电压为()。

- A. 20V B. 120V C. 220V D. -60V

3.4 图 3.13 所示电路的节点方程为()。

- A. $(G_1 + G_2 + G_3)U_1 = G_1U_s + I_s$ B. $\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_2 = G_1U_s \\ G_3U_2 = I_s \end{cases}$
 C. $\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_2 = G_1U_s \\ -G_3U_1 + G_3U_2 = I_s \end{cases}$ D. $\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_2 = G_1U_s \\ G_3U_1 - G_3U_2 = I_s \end{cases}$

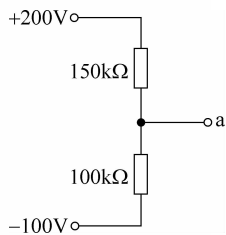


图 3.12 题 3.3

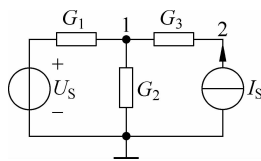


图 3.13 题 3.4

3.5 求解图 3.14 所示电路网孔电流的方程是()。

- A. $\begin{cases} 2i_1 = 10 \\ -2i_1 + 1.5u_x - 4i_3 = 0 \\ 7i_3 - 1.5u_x = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2i_1 - 2i_2 = 10 - 0.5u_x \\ i_2 = 0.25u_x \\ -4i_2 + 7i_3 = 0.5u_x \end{cases}$

$$\text{C. } \begin{cases} 2i_1 - 4i_2 + 2i_3 = 10 \\ 2i_2 = i_3 \\ -2i_2 + 5i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} 2i_1 = 10 \\ -2i_2 - i_3 = 0 \\ 6i_3 - 4i_2 = 0 \end{cases}$$

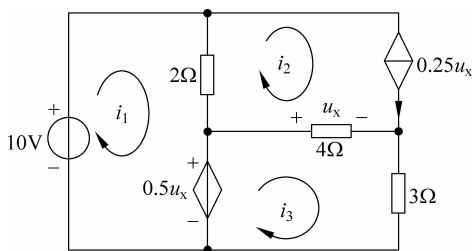


图 3.14 题 3.5

3.6 图 3.15 所示电路中节点电压方程为()。

$$\text{A. } \begin{cases} 8U_1 - 3U_2 = 5 \\ -3U_1 + 4U_2 = 6 \\ U_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} 8U_1 - 3U_2 = 5 \\ -3U_1 + 6U_2 = 4 \\ U_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 8U_1 - 3U_2 = 5 \\ -3U_1 + 8U_2 = 22 \\ U_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} 8U_1 - 3U_2 = 5 \\ -3U_1 + 6U_2 = 4 + 2i_x \\ U_3 = 4 \end{cases}$$

3.7 某电路的图 G 如图 3.16 所示,其中构成 G 的树的支路集合是()。

A. {2,3,4,6}

B. {1,2,5,8}

C. {1,2,3,7}

D. {2,3,5,6}

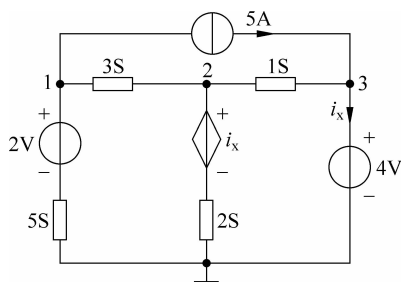


图 3.15 题 3.6

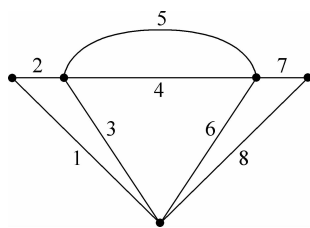


图 3.16 题 3.7

2. 填空训练题

3.8 试用支路电流法求得图 3.17 电路中的 $I_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ A, $I_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ A。

3.9 电路如图 3.18 所示,以节点电压 U_1, U_2 为未知量的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 解得 $U_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ V, $U_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ V。

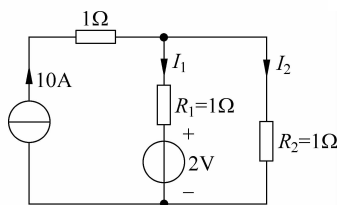


图 3.17 题 3.8

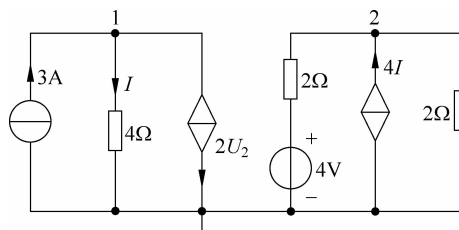


图 3.18 题 3.9

3.10 设图 3.19 电路中所有元件的电导为 1S , 则节点方程为_____。

3.11 图 3.20 电路中, 设节点电压为 U_1 , 则节点电压方程为_____。

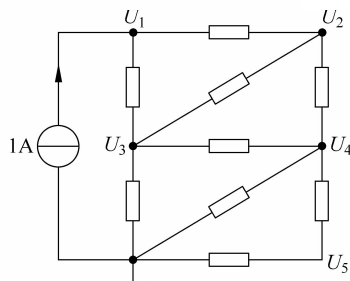


图 3.19 题 3.10

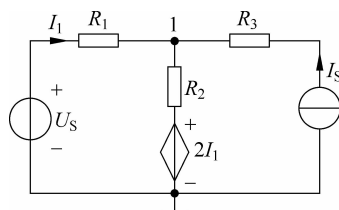


图 3.20 题 3.11

3.12 图 3.21 所示电路的支路电压法方程组为_____、_____。

3.13 图 3.22 所示电路的网孔分析法方程为_____、_____、_____。

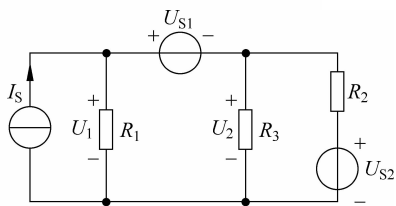


图 3.21 题 3.12

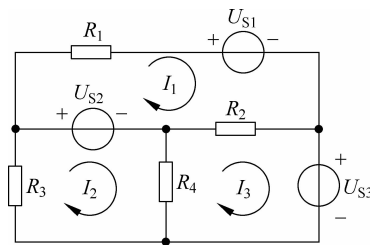


图 3.22 题 3.13

3.14 支路数为 12, 节点数为 5 的连通图生成的树的树支数为_____。

3.15 图 3.23 所示 G 中以 $\{4, 6, 7\}$ 为树, 则基本回路为_____。

3.16 图 3.24 所示电路的独立 KCL 方程数为_____, 其独立的 KVL 方程数为_____。

3.17 一个具有 4 个节点的网络 N , 其节点方程为
$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix},$$
 若

在节点 1、节点 2 间另并入一个电流源 I_s (其方向自节点 1 流向节点 2), 则其节点方程将成为_____。

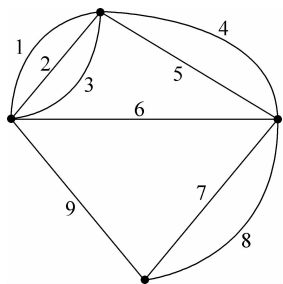


图 3.23 题 3.15

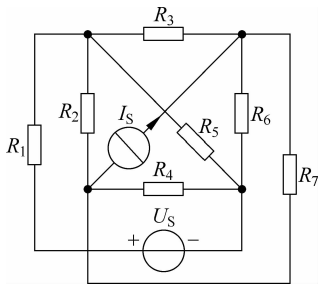


图 3.24 题 3.16

3.18 用网孔分析法求解图 3.25 电路中 I_1 、 I_2 和 I_3 所需的方程组为_____。

3.19 若图 3.26 所示电路中元件 X 为电流源 I_s , 则电路的网孔方程为_____。

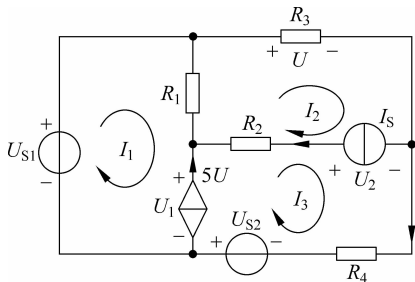


图 3.25 题 3.18

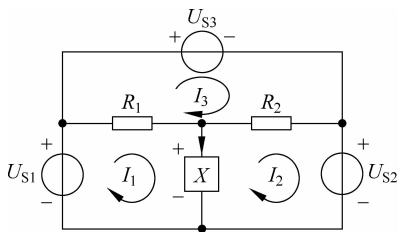


图 3.26 题 3.19

3.20 图 3.27 所示电路的支路电流法方程组为_____。

3.21 用网孔分析法求解图 3.28 电路中电流 I 时, 可以只需列出一个方程, 该方程为_____。

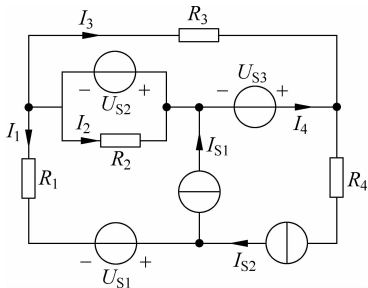


图 3.27 题 3.20

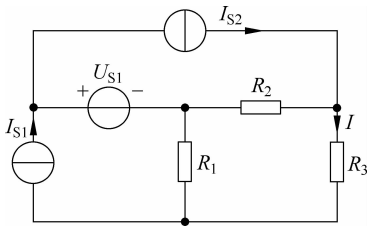


图 3.28 题 3.21

3.22 电路如图 3.29 所示, 在选节点 1 为参考节点后, 只需列出一个节点电压方程就可求解电压 U_{41} , 这个方程是_____, 其解答为_____ V。

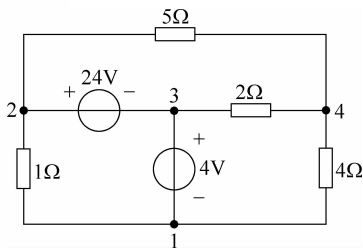


图 3.29 题 3.22

3. 综合计算题

3.23 试用支路电流法求图 3.30 电路的各支路电流。

3.24 选取参考节点后,试用节点分析法求图 3.31 所示电路中的电流 I 。

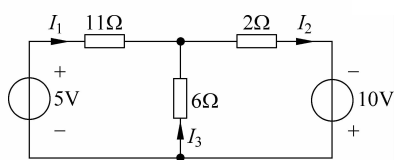


图 3.30 题 3.23

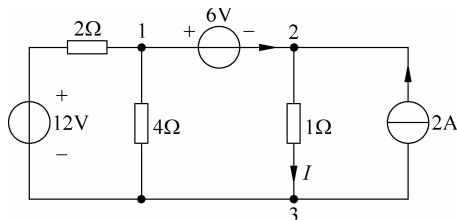


图 3.31 题 3.24

3.25 已知图 3.32 电路中 $I_1=6\text{A}$, $I_2=4\text{A}$ 。求 U_{S1} 和 U_{S2} 及它们供出的电功率 P_1 和 P_2 。

3.26 用节点分析法求图 3.33 电路中 U_x, I_x 的值。

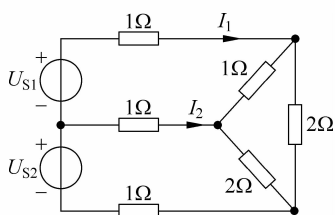


图 3.32 题 3.25

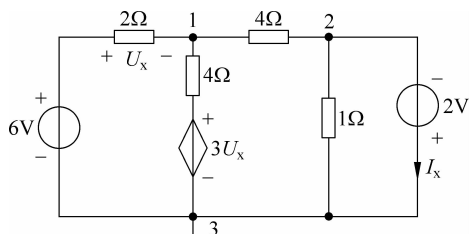


图 3.33 题 3.26

3.27 图 3.34 所示电路的回路方程为
$$\begin{cases} 300I_1 - 200I_2 = 3 \\ -100I_1 + 1200I_2 = -12 \end{cases}$$
, 试画出方框图中可能的电路结构, 并标注参数。

3.28 电路如图 3.35 所示,线性电阻 R 可调。欲使受控源发出 5W 电功率, R 应为何值?可否调节 R 使受控源吸收 $\frac{1}{2}\text{W}$ 电功率,并求此时的 R 值。

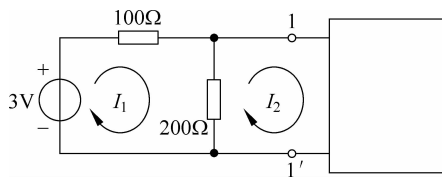


图 3.34 题 3.27

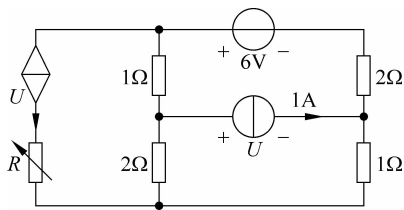


图 3.35 题 3.28

3.29 试求如图 3.36 所示电路中的 U_1 与 I 。

3.30 试用支路电压法求解图 3.37 电路的 U_1 与 U_2 。

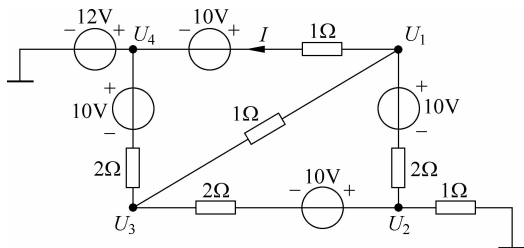


图 3.36 题 3.29

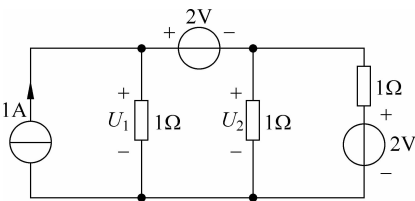


图 3.37 题 3.30

3.31 电路如图 3.38 所示,求网孔电流 I_1 、 I_2 、 I_3 。

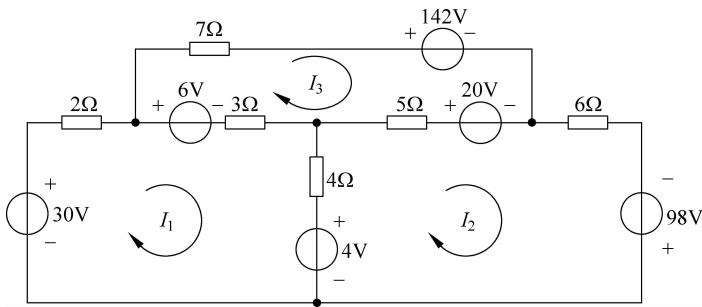


图 3.38 题 3.31

3.32 试用网孔分析法求解图 3.39 电路中的支路电流 I_1 。

3.33 电路如图 3.40 所示,试用网孔法求解支路电流 I_1 和 I_4 。

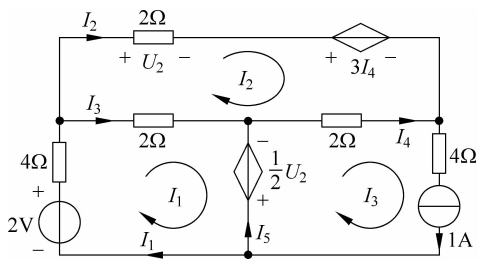


图 3.39 题 3.32

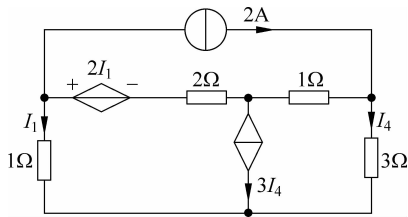


图 3.40 题 3.33

3.34 求图 3.41 所示电路中的 U_2 。

3.35 试用支路电压法求解图 3.42 所示电路的支路电压 U_1 、 U_2 、 U_3 和 U_4 。

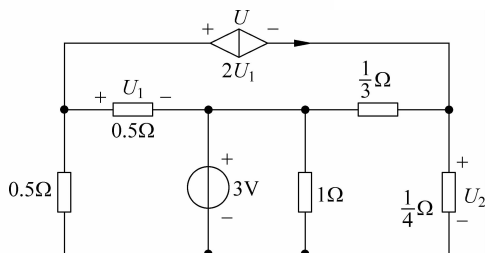


图 3.41 题 3.34

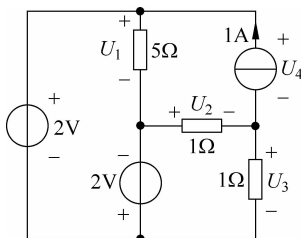


图 3.42 题 3.35

3.36 试求图 3.43 电路中的电压 U 和电流 I 。

3.37 试用节点分析法求图 3.44 电路中的各支路电流。

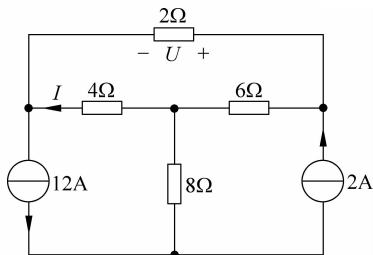


图 3.43 题 3.36

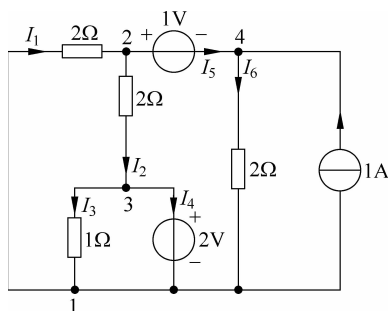


图 3.44 题 3.37

3.38 试用节点分析法求图 3.45 电路中的电压 U_{ab} 及 U_{ac} 。

3.39 用回路电流法求图 3.46 所示电路中的电流 I 。

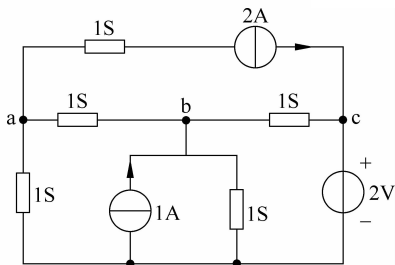


图 3.45 题 3.38

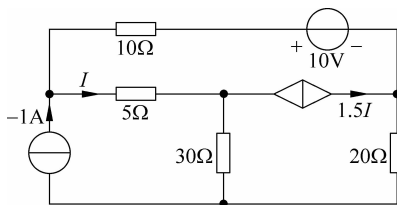


图 3.46 题 3.39

3.40 电路如图 3.47 所示,试计算 $\frac{U_2}{U_s}$ 。

3.41 试用节点分析法求图 3.48 所示电路中受控源发出的电功率。

3.42 试用支路电流法求解图 3.49 所示电路各支路的电流 I_1 、 I_2 、 I_3 和 I_4 。

3.43 图 3.50 所示电路中若电阻 R_x 可变,试用网孔分析法分别求 $I_1 = f_1(U_x)$ 与 $U_2 = f_2(I_x)$ 两个关系式。

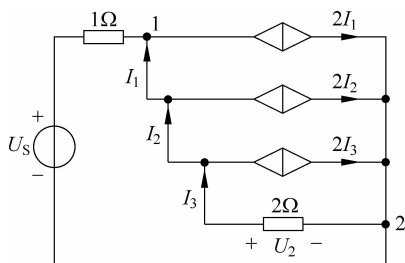


图 3.47 题 3.40

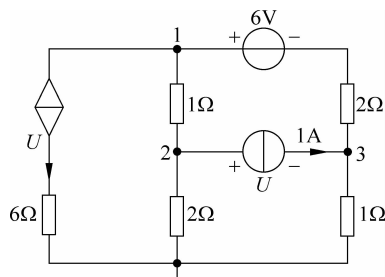


图 3.48 题 3.41

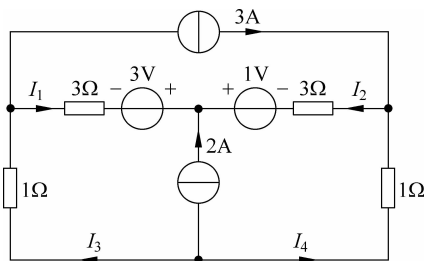


图 3.49 题 3.42

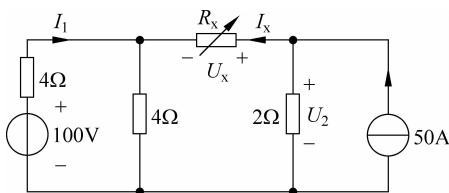


图 3.50 题 3.43

3.44 试用节点分析法求图 3.51 所示电路中的电压 U_o 。

3.45 电路如图 3.52 所示,试求 3 个电流源的电压 U_{14} 、 U_{24} 和 U_{23} 。

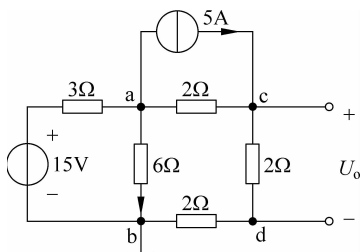


图 3.51 题 3.44

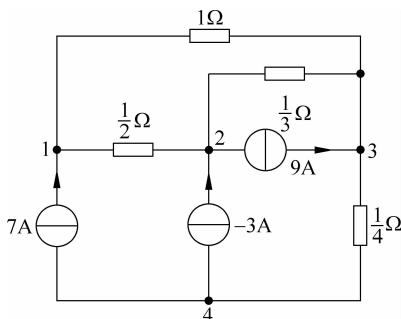


图 3.52 题 3.45

3.46 电路如图 3.53 所示,试用节点分析法求解: ①当 $I_s=1A$ 时的 U_o , ②当 $U_o=0$ 时的 I_s 。

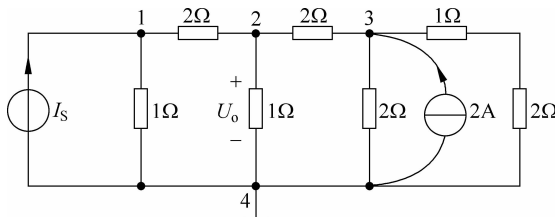


图 3.53 题 3.46

3.47 电路如图 3.54 所示,试用网孔分析法求解电路中受控源发出的电功率。

3.48 电路如图 3.55 所示,用网孔法求 U_x 。

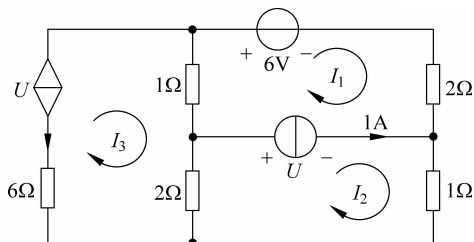


图 3.54 题 3.47

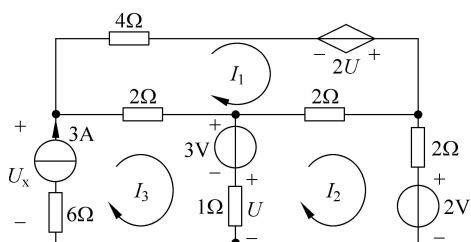


图 3.55 题 3.48

3.49 电路如图 3.56 所示,试求支路电流 I 。

3.50 欲使图 3.57 所示电路中 2Ω 电阻的电功率为 4Ω 电阻的电功率的两倍,求 U_s 的值。

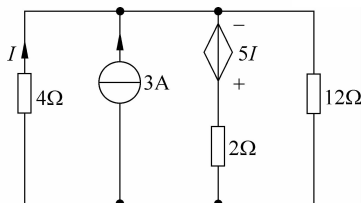


图 3.56 题 3.49

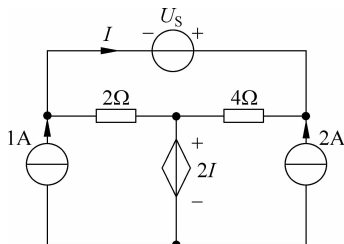


图 3.57 题 3.50

3.51 欲使图 3.58 所示电路中支路电压 $U_o=0$,试确定电流源 I_s 的大小。

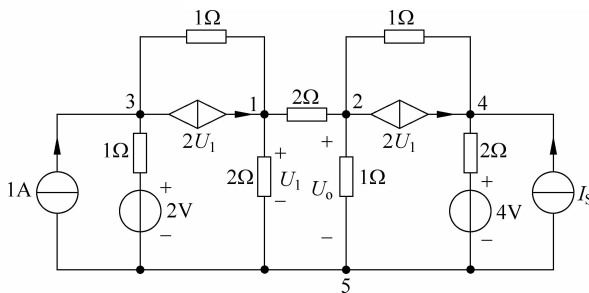


图 3.58 题 3.51