第5章 时变电磁场

5.1 基本教学内容、主要公式及重要提示

5.1.1 电磁感应定律

1. 法拉第定律

$$e_i = -\frac{d\psi}{dt} \tag{5.1}$$

判定感应电动势方向的两种方法：

方法1：规定 e_i 和 ψ 的正方向满足右手法则，首先由 ψ 的方向确定 e_i 的正方向，如果 $\frac{d\psi}{dt}>0$，则 e_i 为负，如果 $\frac{d\psi}{dt}<0$，则 e_i 为正。

方法2：根据楞次定律，感应电流产生的磁通，总是阻止引起感应电流的磁通的变化。首先设 Φ_m 是穿过导体回路的原磁通，Φ'_m是感应电流产生的穿过导体回路的磁通，如果 Φ_m 增大，Φ'_m与 Φ_m 反方向，如果 Φ_m 减少，Φ'_m与 Φ_m 同方向，这样就可以由 Φ_m 的方向和变化确定 Φ'_m的方向，从而确定感应电动势和感应电流的方向。

2. 动生电动势和感生电动势

(1) 动生电动势

$$e_i = \int_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{5.2}$$

(2) 感生电动势

$$e_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.3}$$

5.1.2 麦克斯韦的两个基本假说

1. 麦克斯韦关于感应电场(涡旋电场)的假说

麦克斯韦关于感应电场(涡旋电场)的假说基本思想是：变化的磁场在其周围空间激发涡旋电场，场方程可以写为

$$\oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\psi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

变化的磁场$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$与涡旋电场 $\boldsymbol{E}_i$ 之间满足左手关系。请注意，涡旋电场的电力线是闭合曲线。

2. 麦克斯韦关于位移电流的假说

麦克斯韦关于位移电流假说的基本思想是：变化的电场在其周围空间激发涡旋磁场，这样，**变化的电场等效于一种电流，称为位移电流**。场方程为

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_c + I_d = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.5}$$

变化的电场$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$与涡旋磁场$\boldsymbol{H}$之间满足右手关系，其中，$I_d$是位移电流，位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5.6}$$

5.1.3 麦克斯韦方程组

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.7}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.8}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{5.9}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \tag{5.10}$$

相应的微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5.11}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.12}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5.13}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{5.14}$$

对于各向同性线性媒质，描述媒质性能的方程为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.17}$$

根据亥姆霍兹定理，一个矢量场的性质由它的旋度和散度唯一地确定，所以麦克斯韦方程组全面地描述了电磁场的基本规律。可以看出在时变电磁场中，磁场的场源包括传导电流和位移电流，电场的场源包括电荷和变化的磁场。

5.1.4 时变场的边界条件

1. 两种媒质界面上的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{5.18}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S \tag{5.19}$$

界面上没有面电流时

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{5.20}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{5.21}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \tag{5.22}$$

界面上没有面电荷时

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{5.23}$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{5.24}$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{5.25}$$

2. 理想导体与媒质界面上的边界条件(设理想导体的下标为2,媒质的下标为1)

$$E_{1t} = 0 \tag{5.26}$$

$$B_{1n} = 0 \tag{5.27}$$

所以,**在理想导体的表面,电场的切向分量为零,磁场的法线分量为零。**

$$D_{1n} = \rho_S \tag{5.28}$$

$$H_{1t} = J_S \tag{5.29}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{J}_S \tag{5.30}$$

式(5.30)常被用来计算导体表面的感应电流。

5.1.5 时变电磁场的能量和能流

1. 时变电磁场的能量密度

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \tag{5.31}$$

2. 瞬时坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$(能流密度矢量)

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{5.32}$$

3. 坡印廷定理

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V \tag{5.33}$$

坡印廷定理描述电磁场中能量的守恒和转换关系。

5.1.6 时变电磁场的矢量位和标量位

1. 矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和标量位 Φ 的引入

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5.35}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{（洛仑兹条件）} \tag{5.36}$$

2. 达朗贝尔方程

达朗贝尔方程是时变电磁场的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和标量位 Φ 满足的微分方程。

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{5.37}$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.38}$$

5.2 主要的习题类型及典型例题

1. 动生电动势和感生电动势的计算

典型例题：例 5.1。

2. 位移电流的计算

典型例题：习题 5-1、5-2。

3. 利用麦克斯韦方程计算

典型例题：例 5.2。

4. 利用时变电磁场的边界条件计算

典型例题：习题 5-8、5-9。

5. 电磁场能量和能流的计算

典型例题：习题 5-10、5-11、5-13。

6. 利用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 计算时变电磁场的分布

典型例题：习题 5-14。

5.3 习题解答

5-1 已知真空平板电容器的极板面积为 S，间距为 d，当外加电压 $U=U_0\sin\omega t$ 时，计算电容器中的位移电流，证明它等于导线中的传导电流。

解 在电容器中电场为 $E=\dfrac{U_0}{d}\sin\omega t$，则

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \omega U_0}{d}\cos\omega t$$

所以产生的位移电流为

$$I_{\mathrm{d}} = J_{\mathrm{d}} S = \frac{\varepsilon_0 \omega S U_0}{d} \cos\omega t$$

真空平板电容器的电容为 $C=\varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$，所带电荷量为 $Q=CU=CU_0\sin\omega t$，则传导电流为

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = CU_0\omega\cos\omega t = \frac{\varepsilon_0 \omega S U_0}{d}\cos\omega t$$

可见，位移电流与传导电流相等。

5-2　一圆柱形电容器，内导体半径和外导体内半径分别为 a 和 b，长为 l。设外加电压 $U_0\sin\omega t$，试计算电容器极板间的位移电流，证明该位移电流等于导线中的传导电流。

解法 1

设内导体表面的电荷密度为 ρ_l，利用高斯定理求出场强 $\boldsymbol{E}$，再利用场强 $\boldsymbol{E}$ 的积分求出内、外导体间的电位差 U_0，由于 U_0 是已知的，就可以确定 ρ_l，由此可以求出

$$E = \frac{U_0\sin\omega t}{r\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}, \quad D = \varepsilon E$$

位移电流

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{\partial D}{\partial t}\cdot 2\pi r l = \frac{2\pi\varepsilon\omega l}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} U_0\cos\omega t$$

由

$$Z = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}, \quad C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

传导电流

$$I = \frac{U}{Z} = U_0\sin\omega t \cdot \mathrm{j}\omega\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

所以

$$I = \frac{2\pi\varepsilon\omega l}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} U_0\cos\omega t$$

解法 2

设单位长度上的电容为 C_0，单位长度上的电量 $q=C_0U_0\ \sin\omega t$，由高斯定理

$$D\cdot 2\pi r l = C_0 U_0 l\sin\omega t \quad 得\ D = \frac{C_0U_0\sin\omega t}{2\pi r}$$

位移电流

$$J_{\mathrm{d}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{C_0U_0\omega}{2\pi r}\cos\omega t, \quad I_{\mathrm{d}} = \int J_{\mathrm{d}}\mathrm{d}S = C_0U_0\omega l\cos\omega t$$

传导电流

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_0U_0 l\sin\omega t) = C_0U_0\omega l\cos\omega t$$

5-3　当电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_0\cos\omega t$(V/m)，$\omega=1000\mathrm{rad/s}$ 时，计算下列媒质中传导电流密度与位移电流密度的振幅之比：

(1) 铜 $\sigma=5.7\times10^7\mathrm{S/m}$，$\varepsilon_{\mathrm{r}}=1$；

(2) 蒸馏水 $\sigma=2\times10^{-4}\mathrm{S/m}$，$\varepsilon_{\mathrm{r}}=80$；

(3) 聚苯乙烯 $\sigma=2\times10^{-16}\,\mathrm{S/m}$,$\varepsilon_r=2.53$。

解
$$\boldsymbol{J}=\sigma E=\boldsymbol{e}_x\sigma E_0\cos\omega t \quad (\mathrm{A/m^2})$$
$$\boldsymbol{J}_d=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_x\varepsilon_0\varepsilon_r\omega E_0\sin\omega t \quad (\mathrm{A/m^2})$$
所以,传导电流密度与位移电流密度的振幅之比为
$$\frac{J_d}{J_{dm}}=\frac{\sigma E_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega E_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}$$
(1) 铜:$\sigma=5.7\times10^7\,\mathrm{S/m}$,$\varepsilon_r=1$,故得
$$\frac{J_d}{J_{dm}}=\frac{5.7\times10^7}{8.854\times10^{-12}\times10^3}=0.64\times10^{16}$$
(2) 蒸馏水:$\sigma=2\times10^{-4}\,\mathrm{S/m}$,$\varepsilon_r=80$,故得
$$\frac{J_d}{J_{dm}}=\frac{2\times10^{-4}}{80\times8.854\times10^{-12}\times10^3}=0.28\times10^3$$
(3) 聚苯乙烯:$\sigma=2\times10^{-16}\,\mathrm{S/m}$,$\varepsilon_r=2.53$,故得
$$\frac{J_d}{J_{dm}}=\frac{10^{-16}}{2.53\times8.854\times10^{-12}\times10^3}=0.45\times10^{-8}$$

5-4 由麦克斯韦方程组出发,导出点电荷的电场强度计算公式和泊松方程。

解 对于静电场由$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$,得
$$\int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\tau=\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_\tau\rho\,\mathrm{d}\tau=q$$
对于点电荷,有
$$D\cdot4\pi r^2=q,\quad E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$
静电场为无旋场,$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$,因而
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\Phi=-\varepsilon\nabla^2\Phi=\rho$$
故
$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}=-\frac{1}{\varepsilon}q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

5-5 将麦克斯韦方程的微分形式写成八个标量方程:

(1) 在直角坐标中;

(2) 在圆柱坐标中;

(3) 在球坐标中。

解 (1) 在直角坐标中
$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=J_x+\dfrac{\partial D_x}{\partial t}\\[2mm]\dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=J_y+\dfrac{\partial D_y}{\partial t}\\[2mm]\dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=J_z+\dfrac{\partial D_z}{\partial t}\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\dfrac{\partial H_x}{\partial t}\\[2mm]\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t}\\[2mm]\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}\end{cases}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho$$

(2) 在圆柱坐标中

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial z}=J_r+\dfrac{\partial D_r}{\partial t}\\ \dfrac{\partial H_r}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial r}=J_\varphi+\dfrac{\partial D_\varphi}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_r}{\partial \varphi}=J_z+\dfrac{\partial D_z}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial z}=-\mu\dfrac{\partial H_r}{\partial t}\\ \dfrac{\partial E_r}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial r}=-\mu\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_r}{\partial \varphi}=-\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}\end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho$$

(3) 在球坐标中

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta H_\varphi)-\dfrac{\partial H_\theta}{\partial \varphi}\right]=J_r+\dfrac{\partial D_r}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial H_r}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]=J_\theta+\dfrac{\partial D_\theta}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\dfrac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]=J_\varphi+\dfrac{\partial D_\varphi}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta E_\varphi)-\dfrac{\partial E_\theta}{\partial \varphi}\right]=-\mu\dfrac{\partial H_r}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial E_r}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right]=-\mu\dfrac{\partial H_\theta}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)-\dfrac{\partial E_r}{\partial \theta}\right]=-\mu\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial t}\end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2B_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta B_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}=\rho$$

5-6　试由微分形式麦克斯韦方程组中的两个旋度方程及电流连续性方程导出两个散度方程。

解　对第二个旋度方程两边取散度,得

$$\nabla\cdot(\nabla\times \boldsymbol{E})=-\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot \boldsymbol{B})=0$$

即$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=$常数,此式总是成立的,无论$\boldsymbol{B}$是否存在。故常数必须为零,即$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。

对第一个旋度方程两边取散度并由电流连续性方程,得

$$\nabla\cdot(\nabla\times \boldsymbol{H})=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot \boldsymbol{D}-\rho)=0$$

故

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}=\rho$$

5-7 利用麦克斯韦方程证明：通过任意闭合曲面的传导电流与位移电流之和等于零。

解 将麦克斯韦方程

$$\nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$$

两边取散度可得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}})=\nabla\cdot(\nabla\times \boldsymbol{H})=0$$

将上式对任意体积积分，并利用散度定理，即得

$$\oint_S(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}})\cdot \mathrm{d}S=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}})\mathrm{d}V=0$$

5-8 在由理想导电壁($\sigma=\infty$)限定的区域内($0\leqslant x\leqslant a$)存在一个如下的电磁场，验证它们是否满足边界条件，写出导电壁上的面电流密度表达式。

$$E_y=H_0\mu\omega\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)$$

$$H_x=-H_0k\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)$$

$$H_z=H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(kz-\omega t)$$

解 $x=0,x=a$ 处，$E_t=E_y=0,B_n=B_x=0$，满足边界条件。

由 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$，得

$$x=0\quad \boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_x\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z$$

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_zH_z\big|_{x=0}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t)$$

$$x=a\quad \boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{J}_S=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_zH_z\big|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_yH_0\cos(kz-\omega t)$$

5-9 设区域Ⅰ($z<0$)的媒质参数 $\varepsilon_{\mathrm{r1}}=1,\mu_{\mathrm{r1}}=1,\sigma_1=0$；区域Ⅱ($z>0$)的媒质参数 $\varepsilon_{\mathrm{r2}}=5,\mu_{\mathrm{r2}}=20,\sigma_2=0$。区域Ⅰ中的电场强度

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_x[60\cos(15\times10^8t-5z)+20\cos(15\times10^8t+5z)]\ (\mathrm{V/m})$$

区域Ⅱ中的电场强度

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_xA\cos(15\times10^8t-50z)\quad(\mathrm{V/m})$$

求：(1) 常数 A；

(2) 磁场强度 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$；

(3) 证明在 $z=0$ 处 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 满足边界条件。

解 (1) 在无耗媒质的分界面 $z=0$ 处，有

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_x[60\cos(15\times10^8t)+20\cos(15\times10^8t)]=\boldsymbol{e}_x80\cos(15\times10^8t)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_xA\cos(15\times10^8t)\quad(\mathrm{V/m})$$

由于 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 恰好为切向电场，根据边界条件 $E_{1\mathrm{t}}=E_{2\mathrm{t}}$，得 $A=80\mathrm{V/m}$。

(2) 根据麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\mu_1\frac{\partial\boldsymbol{H}_1}{\partial t}$$

有

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_1}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_1}{\partial z}=-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\mu_0}[300\sin(15\times10^8t-5z)-100\sin(15\times10^8t+5z)]$$

所以

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{e}_y[0.1592\cos(15\times10^8t-5z)-0.0531\cos(15\times10^8t+5z)]\quad(\mathrm{A/m})$$

同理,有

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{e}_y[0.1061\cos(15\times10^8t-50z)]\quad(\mathrm{A/m})$$

(3) 将 $z=0$ 代入上面的 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 的表达式,得

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{e}_y[0.106\cos(15\times10^8t)]\quad(\mathrm{A/m}),\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{e}_y[0.106\cos(15\times10^8t)]\quad(\mathrm{A/m})$$

这里 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 正好是分界面上的切向分量,两者相等。由于分界面上 $J_S=0$,故 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 满足边界条件。

5-10　设电场强度和磁场强度分别为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t+\psi_e)$,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\cos(\omega t+\psi_m)$,证明其坡印廷矢量的平均值为 $\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos(\psi_e-\psi_m)$。

解　$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos(\omega t+\psi_e)\cos(\omega t+\psi_m)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2T}\int_0^T\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0[\cos(2\omega t+\psi_e+\psi_m)+\cos(\psi_e-\psi_m)]\mathrm{d}t$$

由于 $\int_0^T\cos(2\omega t+\psi_e+\psi_m)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+\psi_e+\psi_m)\Big|_0^T=0$,得

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos(\psi_e-\psi_m)$$

5-11　已知真空区域中时变电磁场的瞬时值为 $\boldsymbol{H}(y,t)=\boldsymbol{e}_x\cos(20x)\cos(\omega t-k_yy)$,试求电场强度的复矢量、能量密度及能流密度矢量的平均值。

解　由 $\boldsymbol{H}(y,t)=\boldsymbol{e}_x\cos(20x)\cos(\omega t-k_yy)$,可得其复数形式为

$$\boldsymbol{H}(y)=\boldsymbol{e}_x\cos(20x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_yy}$$

因真空中传导电流为零,$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$,得

$$\boldsymbol{E}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{H}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{e}_y\frac{\partial H_x}{\partial z}-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z120\pi\cos(20x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_yy}$$

能量密度的平均值

$$w_{av}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(y)+\frac{1}{2}\mu_0H^2(y)=4\pi\times10^{-7}\cos^2(20x)$$

能流密度的平均值

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\boldsymbol{e}_y60\pi\cos^2(20x)$$

5-12　一个真空中的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}E_0\sin kz,\quad\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos kz$$

其中,$k=2\pi/\lambda=\omega/c$,λ 是波长。求 $z=0,\lambda/8,\lambda/4$ 各点的坡印廷矢量的瞬时值和平均值。

解　电磁场的瞬时值为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\sin(kz)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),\quad\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos(kz)\cos(\omega t)$$

空间任一点的瞬时坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin(2kz)\sin(2\omega t)$$

$$z=0, S=0$$

$$z=\lambda/8,\quad 2kz=\frac{\pi}{2},\quad \boldsymbol{S}=-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin(2\omega t)$$

$$z=\lambda/4,\quad 2kz=\pi,\quad S=0$$

任一点的坡印廷矢量的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}\mathrm{d}t=-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin(2kz)\cdot\frac{1}{T}\int_0^T\sin(2\omega t)\mathrm{d}t=0$$

5-13　已知电磁波的电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\cos(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)$，求此电磁波的磁场、瞬时值能流密度矢量及其在一周期内的平均值。

解　由麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$，有 $\boldsymbol{H}=-\dfrac{1}{\mu_0}\int\nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}t$

而

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\boldsymbol{e}_yE_0\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sin(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)$$

所以

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_yE_0\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int\sin(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_yE_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)=\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E$$

瞬时能流密度

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_zE_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos^2(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)$$

平均能流密度

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2$$

5-14　已知时变电磁场中矢量位 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_m\sin(\omega t-kz)$，其中 A_m、k 是常数。求电场强度、磁场强度和瞬时坡印廷矢量。

解　$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial A_x}{\partial z}=-\boldsymbol{e}_ykA_m\cos(\omega t-kz)$

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\mu}A_m\cos(\omega t-kz)$$

由洛仑兹条件得

$$\mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\quad 得\quad \Phi=C$$

由式 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$，得

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_x\omega A_m\cos(\omega t-kz)$$

坡印廷矢量的瞬时值

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)=[-\boldsymbol{e}_x\omega A_m\cos(\omega t-kz)]\times\left[-\boldsymbol{e}_y\frac{k}{\mu}A_m\cos(\omega t-kz)\right]$$

$$=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega k}{\mu}A_m^2\cos^2(\omega t-kz)$$