第 3 章 固定收益证券及其R语言应用

3.1 债券的定义与分类

3.1.1 债券的定义和特征

固定收益证券也称为债券，即债的证明书，是指要求借款人按照预先规定的时间和方式偿还本金和利息的债务合同。固定收益证券未来的现金流是符合合同规定的，但是这些现金流并不一定是固定不变的。固定收益证券的基本特征包括发行人、到期日、本金和票面利率。其中发行人大致有中央政府及机构、地方政府、公司等。到期日是指固定收益证券所代表的债务合同中规定的终止时间。在到期日，借款人应该按照合同规定偿还全部利息和本金。本金也称为面值，是指借款人承诺在到期日之前支付给债券持有人的金额。债券本金的偿还方式有到期一次偿还和在债券持续期内分期偿还。票面利率是指借款人定期支付的利息占本金的百分比。票面利率一般指年利率，如果利息在一年内支付多次，则实际利率可由 $r=\left(1+\frac{r^{(n)}}{n}\right)^{n}-1$ 换算得出。

1. 票面价值

票面价值简称面值，是指债券发行时所设定的票面金额，它代表着发行人借入并承诺未来某一特定日期(如债券到期日)偿付给债券持有人的金额，是债券的本金。我国发行的债券面值一般是 100 元人民币，美国债券面值一般为 1000 美元。

2. 债券价格

债券价格包括发行价格和买卖价格(或转让价格)，债券第一次公开发售时的价格就是发行价格，已经公开发售的债券可在投资者之间买卖、转让。债券持有者可以在到期日之前按照当时的债券买卖价格将债券销售出去。债券的价格并不一定等于债券的面值。根据债券价格和面值的关系，可以将债券划分为以下三种类型。

(1) 平价债券即债券价格等于债券面值。

(2) 溢价债券即债券价格大于债券面值。

(3) 折价债券即债券价格小于债券面值。

3. 偿还期限

偿还期限简称期限，是指一个时间段，这个时间段的起点是债券的发行日期，终点是债券票面上标明的偿还日期，也称为到期日。在到期日，债券代表的债权债务关系终止，债券的

发行者偿还所有的本息。有些债券(如可赎回债券)的发行者或持有者在债券发行以后可以改变债券最初的偿还期限。

根据债券期限的不同,债券可分为长期债券、短期债券和中期债券。一般来说,偿还期限在10年以上的为长期债券,偿还期限在一年以下的为短期债券,偿还期限在一年或1年以上10年以下含10年的为中期债券,我国国债的期限划分与上述标准相同,但企业债券的期限划分与上述标准有所不同,如短期企业债券是指期限一年以内的,中期是1年以上5年以下,长期是5年以上。

4. 票面利率

票面利率是指债券每年支付的利息与债券面值的比例,通常用年利率的百分数表示。投资者所获得利息等于债券面值乘以票面利率。如某债券的面值为100元,票面利率为8%,投资者每年能获8元的利息。

按照利息支付方式不同,可分为附息债券和零息债券。

附息债券是指在债券面上附有息票的债券,或是按照债券票面标明的利率及支付方式支付利息的债券。

零息债券是指债券合约未规定利息支付的债券,既可以贴现发行也可按面值平价发行。贴现发行的零息债券也称为贴现债券,发行时以一定的折扣率,以低于债券面值的价格发行,到期时发行者按面值偿还。还有一种零息债券是按照面值销售,债券偿还期限内不支付利息,利息累积计算,在到期日利息随本金一次性支付。

3.1.2 债券的分类

债券按以下不同的方式分类如下。

1. 按发行主体分类

按发行主体的不同,可分为政府债券(国债和地方政府债券)、企业债券、金融债券和国际债券。

(1) 政府债券:发行的主题是政府,可分为中央政府债券、地方政府债券和政府机构债券。我国目前法律规定地方政府不能发行债券,将来地方政府发行债券应该是大势所趋。中央政府债券又称为国债。大多数国家规定,购买政府债券获得的收益可免税。国债又可分为无记名(实物)国债、凭证式国债和记账式国债3种。

① 实物国债是一种具有标准格式的债券,在标准格式里,一般印制了债券的面额、利率、债券发行人全称、还本付息方式等各种要素,不记名、不挂失,可上市流通。

② 凭证式国债是一种债权人认购债券的收款凭证,可记名、挂失,可提前兑付,不能上市流通,从购买之日起计息,发行对象主要是个人投资者。

③ 记账式国债是一种只在计算机账户中做记录,而没有实物形态的债券。以计算机记账形式记录债权,通过无纸化方式发行和交易,可以记名、挂失。

(2) 金融债券:是指银行及其分支机构以及非银行金融机构依照法定程序发行并约定在一定期限内还本付息的有价证券。它本质上就是公司债券,唯一的区别就是发行者是金融机构。在英美国家,金融机构发行的债券归类于公司债券。我国和日本等国家,金融机构发行的债券称为金融债券。金融债券的利息收入也免税。

（3）企业债券：是指企业按照法定程序发行的，约定在一定期限还本付息的有价证券，是企业为筹措长期资金而发行的一种债务契约，代表着发行债券的企业和投资者之间的一种债权债务关系。债券持有人是企业的债权人，不是所有者，无权参与管理，但有权按期收回本息，与股东相比，有优先的收益分配权。我国大多企业债券具有的特征：付息方式有零息和附息债券；企业债券期限短期为1年，长期为15年；发行主体绝大多数是信用为AAA级的国有特大企业。

（4）国际债券：是一国政府、金融机构、工商企业或国际组织为筹措资金和融通资金，在国外金融市场上发行的，以外国资产为计价资产的债券。国际债券主要有两种：一是外国债券；二是欧洲债券。

① 外国债券是指某一国借款人在本国以外的某一国家发行的，以该国资产为计价资产的债券。例如，1982年中国国际信托投资公司在日本东京发行的日元债券就是外国债券。

② 欧洲债券是指借款人在本国境外发行的，不以发行市场所在国的资产为计价资产的国际债券。例如，法国一机构在英国债券市场上发行的以美元为计价资产的债券就是欧洲债券。

对于中国的国际债券发行者而言，主要有扬基债券、武士债券和龙债券3种。

① 扬基债券是指美国以外的政府、金融机构、工商企业和国际组织在美国国内发行的，以美元计价资产的债券。其特点是期限长、数额大、控制严。

② 武士债券是指外国发行人在日本债券市场上发行的，以日元计价的中长期债券，期限一般是3～10年，在东京证券交易所交易。

③ 龙债券是指以非日元的亚洲国家或地区资产发行的外国债券，期限一般是3～8年，在香港或新加坡上市，发行人一般是政府，多数以美元计价。

2. 按票面利率分类

按票面利率的不同，可分为零息债券、固定利率债券、浮动利率债券、累息债券、递增债券和推迟利息债券。

（1）零息债券：在债券存续期内不支付利息的债券，该债券以低于面值的价格发行，到期日按面值偿还本金。

（2）固定利率债券：票面利率固定的债券。

（3）浮动利率债券：票面利率不固定，随着某种参考利率而浮动的债券。

（4）累息债券：当期不支付利息，而将应付利息推迟到到期日和本金一起支付的债券。

（5）递增债券：在规定的时期内单次或多次增加票面利率，其中前者称为单次递增债券，后者称为多次递增债券。

（6）推迟利息债券：推迟最初的利息支付至规定的期限，然后按照一般债券的利息支付方式进行支付的债券。

3. 按偿还期限分类

按偿还期限的不同，可分为短期债券、中期债券和长期债券。

4. 按担保性质分类

按担保性质的不同，可分为抵押债券、担保信托债券、保证债券和信用债券。

5. 按募集方式分类

按募集方式的不同,可分为公募债券和私募债券。

3.2 债券定价及其R语言应用

3.2.1 付息债券价格及其R语言应用

更一般的附息债券价格公式可以表述如下:

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^N} \tag{3-1}$$

式中,P 为债券的价格;C_t 为第 t 期支付的利息(现金流);F 为债券面值;N 为债券的期限数;y 为期贴现率;t 为现金流发生的期数。

编制R语言函数如下:

```
bpd <- function(cf,F,y,n){
  t = 1:n
  a = cf/(1 + y)^t
  b = F/(1 + y)^n
  p = sum(a,b)
}
```

例3-1 假设新发行的3年期的债券面值为1000元,以后每半年支付利息50元,市场年收益为10%,那么债券的现值为多少?

解 本例中 $F=1000$ 元,$C=50$ 元,$N=6$,$y=10\%/2=5\%$。

$$\text{债券的现值} = \sum_{t=1}^{6} \frac{50}{(1+5\%)^t} + \frac{1000}{(1+5\%)^6} = 1000(\text{元})$$

R语言函数调用及结果如下:

```
res = bpd(50,1000,0.05,6)
res
[1] 1000
```

因此,这种债券以面值出售,如果每年息票低于100元,而其他条件不变,债券的现值就低于1000元,那么,投资者不会付1000元购买这种债券。

从结果可以看出,债券的现值受3个因素影响:到期日、息票和市场收益(也称为应得收益)。市场收益是投资者对一个特定债券需求的现时市场利率。表3-1给出相同息票、不同到期日和不同市场收益的债券价格,而表3-2给出相同到期日、不同息票和市场收益的债券价格。下面来分析3个因素对债券价格的影响。

从表3-1和表3-2可以发现:

(1)债券价格和市场收益相反变化。在到期日相同的条件下,例如表3-1选取15年期债券,如果市场收益由10%下降到8%,债券价格上升17.29%,而市场收益由10%上升到12%,债券价格下降13.77%。市场收益下降和上升同样百分点,引起的债券价格上升的百分数大于下降的百分数。

表 3-1 10%的息票、面值 1000 元的债券价格

到期时间/年	年市场收益				
	6%	8%	10%	12%	14%
1	1038.27	1018.86	1000.00	981.67	963.84
5	1170.60	1081.11	1000.00	926.40	859.53
10	1297.55	1135.90	1000.00	885.30	788.12
15	1392.01	1172.92	1000.00	862.35	751.82
20	1462.30	1197.93	1000.00	849.54	733.37
25	1514.60	1214.82	1000.00	842.38	723.99
30	1553.51	1226.23	1000.00	838.39	719.22

(2) 债券价格和到期日有关。在其他条件相同下,当利率变化时,长期债券价格变化比短期债券价格变化大。例如在表 3-1 中如果市场收益从 10%下跌到 8%,15 年期债券价格上升为 1172.92 元,而 30 年期债券价格上升为 1226.23 元,然而债券价格的百分比变化(15 年期为 17.29%,30 年期为 22.62%),并不因为到期日增长一倍价格变化也增加一倍。因此,债券价格随到期日增加而增长百分数是递减的。

表 3-2 面值 1000 元,5 年期的债券价格

年息票率	年市场收益/元				
	6%	8%	10%	12%	14%
6%	1000.00	919.33	845.66	778.80	718.72
8%	1085.20	1000.00	922.88	852.40	788.96
10%	1170.60	1081.11	1000.00	926.00	869.53
12%	1255.80	1162.66	1077.22	1000.00	929.77
14%	1331.10	1243.77	1154.44	1073.60	1000.00

(3) 债券价格和息票有关。从表 3-2 可以看出,当市场利率变化时,低息票债券(到期日相同)比高息票的债券相对变化要大。例如,年市场收益从 10%下降到 8%,年息票率 6%的债券价格增加了 73.67 元,8%的增加了 77.12 元,10%的增加了 81.11 元,12%的增加了 85.44 元,14%的增加了 89.33 元。但是债券价格分别增加了 8.7%、8.4%、8.1%、7.9%和 7.7%,也就是说,在市场利率变化时低息票债券的相对波动大。

从上面讨论可以得到一个重要的结论:利率下降(上升),使得债券价格上升(下降)。长期债券和低息票债券的价格变化大。因此投资者预期利率下降可购买低息票的长期债券,充分利用到期日和息票对债券价格的影响。相反地,如果投资者预期利率上升,可购买高息票或短期或具有这两种特点的债券。

3.2.2 零息债券价格及其 R 语言应用

零息债券是指在其存续期内不支付利息的债券,因此在债券到期日之前的任何时刻零息债券都无现金流流入,而在债券到期日流入的现金流仅为债券的票面价值。

零息债券的定价公式为

$$P=\frac{F}{(1+y)^N}$$

式中，P 为债券的价格；F 为债券面值；N 为债券的期限；y 为贴现率。

若零息债券的期限不足一年，如距离到期日的天数为 T，则债券价格为

$$P=\frac{F}{(1+y)^{T/365}}$$

编制 R 语言函数如下：

```
lxbpd <- function(F,y,n){
   b = F/(1 + y)^n
return(b)
}
```

例 3-2 考虑一个期限是 8 年，面值是 1000 元，市场年利率是 8%，每半年付息一次的零息债券，计算其价格。

解 本例中，$F=1000$ 元，$N=16$，$y=8\%/2=4\%$，则债券价格为

$$P=\frac{F}{(1+y)^N}=\frac{1000}{(1+4\%)^{16}}$$

R 语言函数调用及结果如下：

```
lxbpd(1000,0.04,16)
[1] 533.9082
```

3.3 债券的到期收益率及其 R 语言应用

计算到期收益率是计算债券价格的逆过程，到期收益率可以通过下式求得

$$P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{F}{(1+y)^N} \tag{3-2}$$

式中，P 为债券当前的市场价格；C 为利息；F 为债券面值；N 为距离到期日的年数；y 为每年的到期收益率。

如果是零息债券，则式(3-2)可变为

$$P=\frac{F}{(1+y)^N}$$

如果是半年支付一次利息，则式(3-2)可变为

$$P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C}{(1+y/2)^t}+\frac{F}{(1+y/2)^N}$$

式中，P 为债券当前的市场价格；C 为每次支付的利息；F 为债券面值；N 为距离到期日的期数；y 为到期收益率。

上述付息债券的到期收益率可整理成如下的形式：

$$\sum_{t=1}^{N}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{F}{(1+y)^N}=\frac{C}{y}(1-(1+y)^{-N})+\frac{F}{(1+y)^N}=\frac{C}{y}+\left(F-\frac{C}{y}\right)(1+y)^{-N}$$

编制 R 语言函数如下：

```
#债券定价函数
```

```
bpd <- function(cf,F,y,n){
   t = 1:n
   a = cf/(1 + y)^t
   b = F/(1 + y)^n
   p = sum(a,b)
}
#二分法求隐含到期收益率
#n 为期数
#cf 为现金流
#bp 为当前的市场价格
byield <- function(n,cf,bp){
  accu = 1e-5
  maxinter = 200
  bot = 0.00;top = 1.00
   res = 0.00
  while(res > bp) {top = top * 2}
      y = 0.5 * (top + bot)
     res = bpd(2.5,100,y,10)
for(i in 0:maxinter) {
   diff = res - bp
   if(abs(diff)< accu) {return(y)}
    if(diff > 0.0)
       bot = y
     else
       top = y
     y = 0.5 * (top + bot)
   res = bpd(2.5,100,y,10)
  }
    {return(y)}
}
```

例 3-3　设某 5 年期债券的面值是 100 元，年票面利率是 5%，每半年付息一次，现在债券的价格是 110 元，求该债券的到期收益率。

解　本例中，$P=110$ 元，$F=100$ 元，$C=100\times5\%/2=2.5$ 元，$N=10$。

根据 $P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{F}{(1+y)^N}$ 得

$$110=\sum_{t=1}^{10}\frac{2.5}{(1+y)^t}+\frac{100}{(1+y)^{10}}$$

不断调整 y 直至计算出来的债券价格 $P=110$ 元为止，这时的 y 就是到期收益率。

R 语言函数调用及结果如下：

```
> byield(10,2.5,110)
[1] 0.01420236
> dd = byield(10,2.5,110)
> dd = 2 * dd
> dd
[1] 0.02840471
> dd = bpd(2.5,100,0.01420236,10)
> dd
[1] 110
```

债券的到期年收益率应是0.0284,此时债券的价格是110元。

3.4 债券的赎回收益率及其R语言应用

很多债券附有发行者能够在到期日之前回购全部或者部分债券的条款。这种发行者在到期日之前回收债券的权利称为赎回权(Call Option)。拥有赎回权的债券称为可赎回债券(Callable Bond)。发行者执行这个权利,称发行者赎回了债券。发行者赎回债券支付的价格称为赎回价格(Call Price)。

一般情况下,赎回债券不只有一个赎回价格,而是有一个赎回计划。在这个赎回计划中,根据发行者执行赎回权的不同时间规定不同的赎回价格。赎回计划一般将首个赎回日的赎回价格设定高于面值,然后随着时间的推移将赎回价格降低到面值。

当债券可被赎回时,投资者可以计算截至假设赎回日的收益率,而使赎回日现金流的现值等于债券全价的收益率就是赎回收益率,即赎回收益率 y 满足

$$P=\sum_{t=1}^{n2}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{\mathrm{CP}}{(1+y)^{n2}}$$

式中,P 为债券的市场价格;$n2$ 为赎回日前的利息支付期数;C 为各期现金流。

1. 根据赎回年收益率求市场价格

编制R语言函数如下:

```
bpdsh <- function(cf,CP,y,n2){
  t = 1:n2
  a = cf/(1 + y)^t
  b = CP/(1 + y)^n2
  p = sum(a,b)
}
```

例3-4 考虑一种面值是1000元,有效期为18年,年票面利率是6%,每半年付息一次的可赎回债券,赎回年收益率为0.152。假设这个债券最早可以在5年后以1030元的价格赎回,求债券的市场价格。

解 本例中,$C=30$,CP=1030元,$y=15.2\%/2=7.6\%$,$n2=10$。

根据 $P=\sum_{t=1}^{n2}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{\mathrm{CP}}{(1+y)^{n2}}$ 得

$$P=\sum_{t=1}^{10}\frac{30}{(1+y)^t}+\frac{1030}{(1+y)^{10}}$$

R语言函数调用及结果如下:

```
> res = bpdsh(30,1030,0.076,10)
> res
[1] 700.1101
```

2. 根据市场价格求赎回年收益率

编制R语言函数如下:

```
#二分法求隐含到期收益率
```

```
#n2 为期数
#cf 为现金流
#bp 为当前的市场价格
byield <- function(n2,cf,bp){
  accu = 1e-5
  maxinter = 200
  bot = 0.00;top = 1.00
   res = 0.00
  while(res > bp) {top = top * 2}
      y = 0.5 * (top + bot)
     res =  bpdsh(30,1030,y,10)
for(i in 0:maxinter) {
   diff = res - bp
   if(abs(diff)< accu) {return(y)}
    if(diff > 0.0)
       bot = y
     else
       top = y
     y = 0.5 * (top + bot)
     res = bpdsh(30,1030,y,10)
  }
    {return(y)}
}
```

R 语言函数调用及结果如下：

```
> byield(10,1030,700)        #期赎回收益率
[1] 0.07601989
> 2 * byield(10,1030,700)    #年赎回收益率
[1] 0.1520398
```

3.5　利率期限结构及其 R 语言应用

3.5.1　到期收益率和即期收益率

1. 到期收益率（Yield to Maturity，YTM）

计算利率由很多方法，到期收益是最重要、最准确的方法之一，投资者在购入某种债券后一直保留到债券到期、还本付息，这时投资者所得到的收益率就是到期收益。

在说明到期收益率和即期收益率时，均假定投资者购买政府债券，因为这些债券没有违约风险，就是说完全能按期偿付。

（1）折价债券的收益。折价债券是以其面值的折扣出售，到期偿还面值。

例 3-5　市场中有债券甲和乙，面值都是 1000 元，分别为一年和两年到期，现在市场的出售价格各为 943.58 元和 873.44 元，那么它们的到期收益率是多少？

解　甲：$943.58=\dfrac{1000}{1+r_1}$

乙：$873.44=\dfrac{1000}{(1+r_2)^2}$

其中，分子 1000 为债券面值，等式左端为债券购入价格，分母中的 r 是收益率（简称收益）。解上式可得债券甲的到期收益率为 $r_1=6\%$，债券乙的到期收益率为 $r_2=7\%$。

（2）定期付息债券的收益。除折价债券外，最常见的债券是定期付息的息票债券。美国联邦政府的中、长期债券属于这类收益。

例 3-6 债券丙是息票债券，从现在起一年付投资者利息 50 元，并且从现在起两年到期，那时付投资者 1050 元，现在市场的出售价格是 964.27 元，那么它的到期收益是多少？

解 $964.27=\frac{50}{1+r_3}+\frac{1050}{(1+r_3)^2}$

从上式解得 $r_3=6.98\%$。

任何购买债券的投资者都希望在未来某个时间得到一个或多个现金流。这些现金流都在未来出现，它们在适当的平均复折扣率决定其现值。这个直到债券到期还本为止的平均复回报率就是到期收益（率）。到期收益率是测量债券回报非常普遍的方法。任何投资者都可以计算、比较其不同的投资债券到期收益率。

2. 即期收益率（Spot Rate，SR）

对折价债券来说，即期收益率是其年到期收益。在例 3-5 中，债券甲和乙是折价债券，因此，债券甲的一年即期收益率是 6%，债券乙的两年即期利率是 7%。一般来说，t 年的即期利率用 r_t 表示，那么有

$$P_t=\frac{C_t}{(1+r_t)^t} \tag{3-3}$$

式中，P_t 是折价债券的现值，t 年到期，到期价格为 C_t，而 r_t 表示未来 t 年到期现有债券的利率，它是可观测的。例如，$t=2$ 年债券乙的 $P_2=873.44$ 元，$C_2=1000$ 和 $r_2=7\%$。

其实例 3-6 中两年的折价债券是不存在的，因为息票债券期限较长。如果投资者投资两年的债券，他会选择息票债券。假设现值为 P_2，到期价为 C_2，从现在起一年后支付息票等于 C_1。这时两年的即期收益率 r_2 由式（3-4）解出

$$P_2=\frac{C_1}{(1+r_1)}+\frac{C_2}{(1+r_2)^2} \tag{3-4}$$

例 3-7 $P_2=964.27$ 元，$C_1=50$ 元，$r_1=6\%$，$C_2=1050$ 元，求两年即期收益率 r_2。

解 $964.27=\frac{50}{(1+6\%)}+\frac{1050}{(1+r_2)^2}$

解得：$r_2=7\%$

更一般地，

$$PV=\sum_{T=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r_t)^t} \tag{3-5}$$

式中，C_t 为 t 年支付给投资者的现金；r_t 为 t 年到期的即期利率；PV 为债券的现值。

3.5.2 远期利率

由式（3-3）可知，若一年内和两年内现金流均为 1 元，转换为现值分别为 $\frac{1}{1+r_1}$ 和 $\frac{1}{(1+r_2)^2}$。其中 r_1，r_2 分别是一年和两年的即期收益率。

对于两年内支付 1 元的现值还可以用其他方法计算。首先，以一年即期收益率 r_1 为折扣率求出一年的现值为 $1/(1+r_1)$，然后，决定一年后得到 1 元的现值为 $\frac{1/(1+r_1)}{1+f_{1,2}}$。它与两年内得到 1 元的现值相等，即

$$\frac{1}{(1+r_1)(1+f_{1,2})}=\frac{1}{(1+r_2)^2}$$

得

$$(1+r_1)(1+f_{1,2})=(1+r_2)^2 \tag{3-6}$$

那么

$$1+f_{1,2}=\frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} \tag{3-7}$$

折扣率 $f_{1,2}$ 称为从一年到两年的远期利率。假设 $r_1=6\%$，$r_2=7\%$，那么 $f_{1,2}=8.01\%$。也就是说，如果一个投资者购买美国联邦政府为期两年的债券的即期收益率为 7%，那么相当于这个投资者要求的第一年债券的利率(一年即期利率)为 6%；并且他与政府签订一个远期合约，从现在起一年后到两年底政府归还本息时的利率是远期利率 8.01%。

远期利率与未来有关，因此是不可观测的。一般来说，

$$(1+r_t)^t=(1+r_1)(1+f_{1,2})(1+f_{2,3})\cdots(1+f_{t-1,t}) \tag{3-8}$$

$$1+f_{t,t+1}=\frac{(1+r_{t+1})^{t+1}}{(1+r_t)^t} \tag{3-9}$$

更一般地，

$$(1+f_{t,t+n})^n=\frac{(1+r_{t+n})^{t+n}}{(1+r_t)^t} \tag{3-10}$$

式中，r_t 是 t 年即期收益率；$f_{t,t+1}$ 是 t 年到 $t+1$ 年的远期利率；$f_{t,t+n}$ 是 t 年到 $t+n$ 年的远期利率；r_{t+n} 是 t 年到 $t+n$ 年的即期收益率。

3.5.3 利率期限结构及其理论

期限结构是指计算在不同期限上的到期收益率。使用 t 代表期限，F 代表面值，P_t 代表特定期限上的债券价格，则不同期限上的到期收益率

$$y_t=\left(\frac{F}{P_t}\right)^{1/t}-1 \tag{3-11}$$

例如，面值 1 万元的零息债券，可分为 3 种期限及其价格，如表 3-3 所示。

表 3-3 利率期限及价格

期限/年	价格/元
1	9500
2	8100
3	7300

编制 R 语言函数如下：

```
options(digits = 3)
```

```
t = 1:3
F = 10000
P = c(9500,8100,7300)
r = (F/P)^(1/t) - 1
[1] 0.05263158 0.11111111 0.11060352
plot.ts(r,type = "o")
```

则得到如图 3-1 所示的图形。

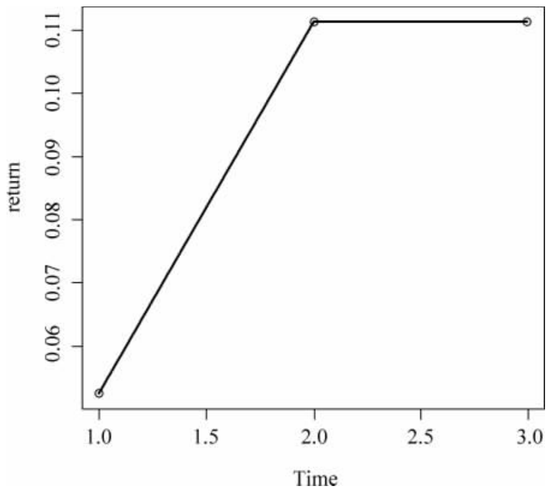

图 3-1 期限结构

由此可见，债券是有一定到期期限的。债券的收益率和到期期限有一定关系。这种关系称为利率的期限结构(Rate Term Structrue)。这里将利率期限结构看做是由一系列的远期利率和一个本期已知的即期收益率组成。

期限结构通常可用收益曲线表示。它是用图形来描述同一种债券的收益和到期结构的关系。图 3-2 为收益曲线的 3 种类型，其中每一种的利率曲线随到期期限变化。

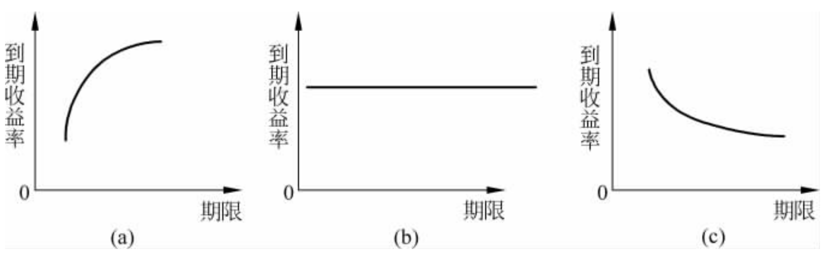

图 3-2 收益曲线的 3 种类型

图 3-2 中横坐标表示期限，纵坐标是收益率。图 3-2(a)表示随着期限越来越长，收益率越来越高；图 3-2(b)表示水平收益率曲线；图 3-2(c)表示随着期限越来越长，收益率越来越低。

一般来说，即期收益率 r_t 随到期期限 t 增加而增加，图 3-2(a)表示的正是这种情形。它符合通常的想法：长期的即期利率高于短期即期利率。图 3-2(b)表示长期的即期利率与短期比较没有太大变化。图 3-2(c)表示的是与图 3-2(a)相反的情形。

下面主要有 3 种理论用于解释利率期限结构。

1. 流动偏好理论

流动偏好理论认为投资者偏好短期债券，因为这些投资容易变现。投资较长的债券就有利率风险，债券发行者必须给投资者以风险补偿。发行者愿意为较长期的债券付较高的回报是因为发行长期债券比短期债券节省成本，不必为频繁的再融资付更多的发行成本；而且长期债券风险较小，不必关注未来高融资的风险。

假设 t 年和 $t+1$ 年的即期利率分别为 r_t，r_{t+1}，t 到 $t+1$ 年的未来预期的即期利率为 $E(r_{t+1})$。一个投资者持有 $t+1$ 年到期的债券，如果投资者在 t 年需要资金，准备出售该债券，这时投资者需要考虑未来预期的即期利率 $E(r_{t,t+1})$，即期利率 r_t，r_{t+1} 和远期利率 $f_{t,t+1}$ 之间的关系。由式(3-12)有

$$(1+r_t)^t(1+f_{t,t+1}) = (1+r_{t+1})^{t+1} \tag{3-12}$$

根据流动偏好理论，只有一种情形下，投资者可能持有债券一直到期，即 $E(r_{t,t+1})<f_{t,t+1}$，那么

$$(1+r_t)^t(1+E(r_{t,t+1})) < (1+r_{t+1})^{t+1} \tag{3-13}$$

这个不等式是流动偏好理论解释期限结构的基础。

远期利率和未来预期的即期利率之差称为流动补偿。它是补偿投资者持有债券而承担的较大利率风险。一般来说，

$$l_{t,t+1} = f_{t,t+1} - E(r_{t,t+1}) \tag{3-14}$$

其中 $l_{t,t+1}$ 是 t 到 $t+1$ 年的流动补偿。为了简便，取到期期限为两年，根据式(3-12)～式(3-14)可得

$$(1+r_1)(1+f_{1,2}) = (1+r_2)^2 \tag{3-15}$$

$$(1+r_1)(1+E(r_{1,2})) < (1+r_2)^2 \tag{3-16}$$

$$l_{1,2} = f_{1,2} - E(r_{1,2}) \tag{3-17}$$

由前面的例子假设 $r_1=6\%$，$r_2=7\%$，那么 $f_{1,2}=8.01\%$。这时如果未来预期的即期利率 $E(r_{1,2})=7.5\%$，小于远期利率 $f_{1,2}=8.01\%$，那么一年后出卖这种两年期的债券，下一年再投资这种债券，两年后 1 元的投资值为 $1\times1.06\times1.075=1.140$。而持有这个债券到期的投资值为 $1\times1.07^2=1.145$，显然后者的回报较大，这是因为有较大程度的价格风险。

由式(3-17)可知，流动补偿为 $l_{1,2}=f_{1,2}-E(r_{1,2})=8.01\%-7.5\%=0.51\%$，它是一年到两年的流动补偿，是对价格风险的补偿。

现在使用式(3-15)～式(3-17)说明收益曲线的类型：

(1) 向下倾斜的收益曲线：当 $r_1>r_2$，式(3-16)成立仅当 $E(r_{1,2})<r_1$，因此，仅当利率实际下降时，观测到向下倾斜的曲线。

假设 $r_1=6\%$，$r_2=5\%$，那么远期利率 $f_{1,2}=4.01\%$。并且

$$(1+0.06)(1+E(r_{1,2})) < 1.05^2$$

流动补偿 $l_{1,2}=0.51\%$，结果

$$E(r_{1,2}) = 4.01\% - 0.51\% = 3.5\%$$

因此，收益曲线是向下倾斜的。因为，现时一年即期利率为 6%，预期的一年到两年的

即期利率下降到3.5%。

(2) 持平的收益曲线：这时当 $r_1=r_2$，式(3-16)成立仅当 $E(r_{1,2})<r_1$，因此，仅当市场预期的短期利率下降时，有一个持平的收益曲线出现。

如果 $r_1=r_2=6\%$，$l_{1,2}=0.51\%$，那么 $f_{1,2}=6\%$，$E(r_{1,2})=6\%-0.51\%=5.49\%$。即从即期利率6%下降到预期的即期利率5.49%。

(3) 向上倾斜的收益曲线：这时 $r_1<r_2$。如果 r_1、r_2 非常接近，那么曲线平缓上升，这可能与预期的即期利率下降是一致的。例如，$r_1=6\%$，$r_2=6.1\%$，而流动补偿仍为0.51%，那么远期利率为6.2%，预期的即期利率 $E(r_{1,2})=6.2\%-0.51\%=5.69\%$。因此，收益曲线平缓向上倾斜是预期的即期利率小幅度下跌。

如果收益曲线的斜率较大，即曲线急剧上升，则可能是市场预期的即期利率上升。例如 $r_1=6\%$，$r_2=6.5\%$，流动补偿为0.51%，那么远期利率为7%，预期的即期利率 $E(r_{1,2})=7\%-0.51\%=6.49\%$。表明市场预期一年即期利率从6%上升到6.49%。

因此，向上倾斜的收益曲线可能表示即期利率预期上升或下降，这取决于曲线斜率的大小。一般来说，斜率越大，预期的即期利率越可能上升。因为在预期的即期利率小幅度下跌时，收益曲线也可能向上倾斜，因此，流动偏好理论推断出向上倾斜的期限结构比向下倾斜的结构要多。

2. 预期理论

预期理论认为，如果人们预期利率会上升(例如在经济周期的上升阶段)，长期利率就会高于短期利率。也就是说，如果所有投资者预期利率上升，收益曲线将向上倾斜；当经济周期从高涨、繁荣即将过渡到衰退时如果人们预期利率保持不变，那么收益曲线将持平；如果在经济衰退初期人们预期未来利率会下降，那么就会形成向下倾斜的收益曲线。

在预期理论下，预期的即期利率等于远期利率。

$$E(r_{t,t+1}) = f_{t,t+1} \tag{3-18}$$

如果 $E(r_{t,t+1})\neq f_{t,t+1}$，例如 $E(r_{t,t+1})>f_{t,t+1}$，投资者不愿意投资 $t+1$ 年到期债券转而在 t 年出售这种债券，在下一年再投资。这时，投资者投资 $t+1$ 年到期债券的资金减少，资金供应少于需求，使得 $t+1$ 年到期债券的即期债券的即期利率上升；相反，在 t 年出售 $t+1$ 年到期债券增多，资金供应多于需求，引起 $E(r_{t,t+1})$ 迅速下降。在 $E(r_{t,t+1})<f_{t,t+1}$ 时，投资者会选择 $t+1$ 年到期的债券，投资者不会在 t 年出售债券在 $t+1$ 年再投资，因此，$t+1$ 年的即期利率上升。结果，无论哪种情形，在预期理论的假设下，市场达到均衡，即式(3-18)成立。也就是说，投资者在持有债券一直到到期和在 t 年出售这种债券下一年再投资得到的回报相同。

由式(3-12)可得

$$1+r_{t+1} = [(1+r_t)^t(1+E(r_{t,t+1}))]^{\frac{1}{t+1}} = [(1+r_1)(1+E(r_{1,2}))\cdots(1+E(r_{t,t+1}))]^{\frac{1}{t+1}} \tag{3-19}$$

预期理论表明，$t+1$ 年的即期利率是同一时期的预期的即期利率的几何平均数减1。简言之，长期利率是短期利率的几何平均数减1。

为了说明收益曲线的类型，同样取到期期限为两年。根据式(3-19)可得

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)^t(1+E(r_{1,2}))$$

(1) 向上倾斜的收益曲线：仍假设 $r_1=6\%$，$r_2=7\%$，那么 $E(r_{1,2})=f_{1,2}=8.01\%$。根据预期理论预期的即期利率等于远期利率，现时一年即期利率为 6%，而一年后利率将上升到 8.01%，因此收益曲线是向上倾斜的。而且无论是投资者持债券到两年期限(即期利率为 7%)还是一年后出售这个债券再以远期利率 8.01%投资，其回报相同。

(2) 持平收益曲线：假设 $r_1=r_2=6\%$，那么 $E(r_{1,2})=f_{1,2}=6\%$，预期的即期利率和现时的即期利率相等，因而收益曲线是水平的。

(3) 向下倾斜收益曲线：假设 $r_1=6\%$，$r_2=5\%$，那么 $E(r_{1,2})=f_{1,2}=4.01\%$，现时一年即期利率为 6%，下一年预期的即期利率将下降到 4.01%。因此，收益曲线向下倾斜。

总之，投资者预期即期利率在未来上升，是向上倾斜的期限结构；反过来，预期即期利率在未来下降，是向下倾斜的期限结构。

预期理论和流动偏好理论之间存在的区别：在预期理论中，预期的即期利率等于远期利率($E(r_{1,2})=f_{1,2}$)；而在流动偏好理论中，预期的即期利率是远期利率减去流动补偿($E(r_{1,2})=f_{1,2}-l_{1,2}$)。因此，使用这两种理论说明收益曲线类型的理由并不一样。

3. 市场分隔理论

市场分隔理论认为不同的投资者和借款者受法律、偏好和不同到期期限的习惯限制。例如，商业银行为了确保资金的流动性，主要投资于短期证券；储蓄银行的主要业务是房地产贷款，因而投资中长期证券；而人寿保险公司可以准确估计死亡率，因而主要投资于长期证券。

由于信息的高成本，投资者和借款者只能专门研究市场的一部分。还有，在已知投资者负债的到期期限的情况下，为了防止资本损失，他们使用与负债相同到期期限的资产套期保值。因此，投资者被限制在与其负债的到期期限相适应的某些到期期限的部分市场上。

总之，不同到期期限的证券不能完全互相替代。甚至在可以得到较高回报时，投资者和借款者也不能随意离开他们所在的那部分市场而进入另一部分市场。

不同到期期限的证券的利率很少或完全不影响其他到期期限的证券的利率。即期利率决定于每个市场部分的供需状况。

在分隔理论下，当短期可贷资金的供需曲线交点低于长期可贷资金的供需交点时，收益曲线向上倾斜。相反，当短期可贷资金的供需曲线交点高于长期可贷资金的供需交点时，收益曲线向下倾斜。

有关利率的期限结构的 3 种理论各有利弊。一般来说，期限结构的每日变动似乎与市场分隔理论相一致，而长期的变动则趋向于预期理论和流动偏好理论。

自从 20 世纪 30 年代起，典型的收益曲线是向上倾斜的，正如流动偏好理论所做的预测一样。长期债券比短期债券对利率的变动更敏感，因而长期债券风险较大，需要的补偿也较大。

经验资料表明，流动补偿确实存在。它的大小和一年到期的联邦证券有关，而一年以上到期的债券的流动补偿并不会递增。因此，预期的即期利率决定期限结构，而且由于流动补偿存在，一年以上的流动补偿不会递增。也就是说，投资一年或一年以上到期的证券大体上有相同的预期回报。

总之，在实际的债券交易中，投资者和借款者不必拘泥于任何一种理论，而应该接受 3

种理论中的合理部分，运用所掌握的信息来判断收益曲线的形式。

3.6 债券组合管理及其R语言应用

3.6.1 久期及其R语言计算

收益率的变化导致债券价格的变化，可以用久期来衡量债券价格的收益率的敏感性。久期就是价格变化的百分比除以收益率与1之和变化的百分比，即

$$D=-\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta(1+y)}{1+y}}=-\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta(y)}{1+y}} \quad \text{（实际上就是价格的利率弹性）} \tag{3-20}$$

式中，P 为债券的初始价格；ΔP 为债券价格变化值；y 为到期收益率；$\Delta(1+y)$ 与 Δy（相等）为到期收益率的变化值。

之所以加了一个负号，是因为债券价格与收益率变化的方向相反。将式(3-20)整理可得

$$\frac{\Delta P}{P}=-\frac{D}{1+y}\times\Delta y \tag{3-21}$$

因此如果知道某个债券的久期，就可以根据式(3-21)计算出一定的收益率变化百分比导致的价格变化百分比。

$$P=\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+y)^t} \tag{3-22}$$

式中，C_t 为 t 年的现金流（利息或本金）；y 为债券的年到期收益率；t 为任何有现金流的年数。

式(3-22)对 y 求导数，经过整理得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{1+y}\sum_{t=1}^{n}\frac{t\times C_t}{(1+y)^t} \tag{3-23}$$

将式(3-23)两边同除以 P 可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\times\frac{1}{P}=-\frac{1}{1+y}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{t\times C_t}{(1+y)^t}\times\frac{1}{P}\right] \tag{3-24}$$

比较式(3-20)和式(3-24)可以发现，式(3-24)括号内的式子就是久期，它衡量了债券价格对收益率的敏感性。

对于普通债券而言，久期可以通过式(3-25)计算。

$$D=\sum_{t=1}^{n}\frac{t\times C_t}{(1+y)^t}\times\frac{1}{P} \tag{3-25}$$

式中，C_t 为 t 年的现金流（利息或本金）；y 为债券的年到期收益率；t 为任何有现金流的年数。

$$D=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{t\times C_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+y)^t}}=\sum_{t=1}^{n}t\times w_t \tag{3-26}$$

其中 $w_t=\frac{C_t}{(1+y)^t}/P$。

上面这个公式称为麦考利久期。

编制 R 语言函数如下：

```
dur <- function(cf,F,y,n){
  t = 1:n
  a = cf/(1 + y)^t
  b = F/(1 + y)^n
  p = sum(a,b)
  c = t * cf/(1 + y)^t
  c1 = n * F/(1 + y)^n
  p1 = sum(c,c1)
  D = p1/p
}
```

业内人士通常使用的是修正久期，修正久期是在收益率改变而债券的预期现金流不变的情况下，收益率变化 1%时债券价格变化的百分比。修正久期的计算公式如下：

$$\text{修正久期}=\frac{\text{麦考利久期}}{1+\text{债券到期收益率}/k} \tag{3-27}$$

式中，k 为每年支付利息的次数。

则$\dfrac{\Delta P}{P}=-\dfrac{D}{1+y}\times\Delta y$ 可变为

$$\frac{\Delta P}{P}=-\text{修正久期}\times\Delta y \tag{3-28}$$

例 3-8 票面面值 100 元，息票率 8%的 3 年期的债券，半年付息一次，到期年收益率 10%，求该 3 年期债券的麦考利久期。

解 在本例中，$F=100$ 元，$C=4$ 元，$y=0.05$，$n=6$，则

$$D=\frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{t\times C_t}{(1+y)^t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+y)^t}}=\frac{1\times\dfrac{4}{1+0.05}+2\times\dfrac{4}{(1+0.05)^2}+\cdots+10\times\dfrac{104}{(1+0.05)^6}}{\dfrac{4}{1+0.05}+\dfrac{4}{(1+0.05)^2}+\cdots+\dfrac{104}{(1+0.05)^6}}$$

R 语言函数调用及结果如下：

```
> res = dur(4,100,0.05,6)
> res
[1] 5.434899
```

上面的久期还可按年来算，但久期值有点变化，思考一下为什么？

```
> res/2
[1] 2.717449
```

影响债券价格对市场利率变化的敏感性有 3 个要素：到期时间、息票利率和到期收益率。c 表示每期票面利率；y 表示每期到期收益率；n 表示距离到期日的期数，则有如下法则：

(1) 零息债券的久期等于它的到期时间。

(2) 到期日不变时，债券的久期随着息票利率的降低而延长。

因为票面利率越高,早期的现金流值越大,占债券价格的权重越高,使时间的加权平均越低,即久期越短;反之,票面利率越低,久期越长。

(3) 当息票利率不变时,债券的久期通常随着债券到期时间的增长而增加。

债券的到期时间越长,价格的利率敏感性越强,这与债券的到期时间越长久期越长是一致的。

(4) 在其他因素不变,债券的到期收益率较低时,息票债券的久期较长。

到期收益率越低,后期的现金流现值越大,在债券价格中所占的比重也越高,时间的加权平均值越高,久期越长。

(5) 稳定年金的久期公式如下:

$$D = [(1+y)/y] - [n/(1+y)^n - 1] \tag{3-29}$$

运用年金和面值的关系及久期公式可得到上式。

年金现值系数$\frac{1}{y}\left[1-\frac{1}{(1+y)^n}\right]$,设年金为$A$,则

$$P = A\,\frac{(1+y)^n - 1}{y(1+y)^n} \Rightarrow A = P\,\frac{y(1+y)^n}{(1+y)^n - 1}$$

代入久期计算公式即可得上式。

(6) 永续债券的久期公式如下:

$$D = (1+y)/y \tag{3-30}$$

根据年金的计算方法和数学推导,可以简化麦考利久期的计算公式如下:

$$\text{息票债券的久期} = \frac{1+y}{y} - \frac{(1+y)+n(c-y)}{c[(1+y)^n - 1]+y} \tag{3-31}$$

此公式的R语言函数编制如下:

```
fxzq = function(y,c,n){
dur = (1 + y)/y - (1 + y + n * (c - y))/(c * ((1 + y)^n - 1) + y)
return(dur)
}
```

当息票债券平价出售时,到期收益率等于票面利率,式(3-31)可进一步简化:

$$\text{息票债券的久期} = \frac{1+y}{y} - \frac{(1+y)}{y(1+y)^n} \tag{3-32}$$

此公式的R语言函数编制如下:

```
fxzq1 = function(y,n){
dur = (1 + y)/y - (1 + y)/(y * (1 + y)^n)
return(dur)
}
```

下面来介绍资产组合的久期计算。

资产组合也有久期,其久期是资产组合的有效平均到期时间。其计算方法是对组合中所有资产的久期求加权平均数,权重是各种资产的市场价格占资产总价值的比重。

例 3-9 一个债券组合有3种半年付息的债券构成,相关资料如表3-4所示,求该债券组合久期。

表 3-4　3 种半年付息的债券相关资料

债券名称	面值/元	票面利率/%	到期时间/年	市场价格/元	到期年收益率/%
A	1000	6	6	951.68	7
B	20 000	5.5	5	20 000.00	5.5
C	10 000	7.5	4	9831.68	8

解　先利用久期的简化公式，分别计算 A、B、C 的久期和修正久期。

$$D_{\mathrm{A}} = 10.2001(\text{半年})$$

$$\text{修正久期} = \frac{D_{\mathrm{A}}}{1+3.5\%} = 9.8552(\text{半年}) = 4.9276(\text{年})$$

R 语言函数调用如下：

```
y = 0.035;c = 0.03;n = 12
fxzq(y,c,n)
[1] 10.20008
```

$$D_{\mathrm{B}} = 8.8777(\text{半年})$$

$$\text{修正久期} = \frac{D_{\mathrm{B}}}{1+2.75\%} = 8.6401(\text{半年}) = 4.3201(\text{年})$$

R 语言函数调用如下：

```
y = 0.0275;n = 10
fxzq1(y,n)
[1] 8.877678
```

$$D_{\mathrm{C}} = 7.0484(\text{半年})$$

$$\text{修正久期} = \frac{D_{\mathrm{C}}}{1+4\%} = 6.7773(\text{半年}) = 3.3887(\text{年})$$

R 语言函数调用如下：

```
y = 0.04;c = 0.0375;n = 8
fxzq(y,c,n)
[1] 7.048409
```

A、B、C 市场价格的权重分别是 0.0309、0.6497、0.3194。因此，该债券组合的久期为

$$D = 4.9276 \times 0.0309 + 4.320 \times 0.6497 + 3.3887 \times 0.3194 = 4.0414(\text{年})$$

这就表明，当组合中的 3 种债券的年收益率都变动一个百分点时，组合的市场价格将会变动 4.0414%。

用修正久期估计价格波动时，可认为$\frac{\Delta P}{P} = -\text{修正久期} \times \Delta y$，这表明债券的价格的变动百分比与收益率的变动值成正比例，从图形上看应该是一条直线，斜率就是修正久期。但事实上，价格与收益率之间的关系并不是线性的，在图形中应表现为一条凸形曲线，这就造成了久期估计的误差。

因此，在收益率变化较大的情况下，为了更精确地估计债券价格的变化，必须考虑价格收益率曲线的凸度性质。

3.6.2 凸度及其R语言计算

1. 凸度的定义

久期本质上是价值曲线在当前利率和债券价格点的斜率,凸度则是斜率的变化量。债券价格 P 随利率 y 的变化而变化,习惯上就可以把债券价格视为利率函数,利用泰勒展开得到

$$\Delta P \approx \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2}(\Delta y)^2 + \varepsilon \tag{3-33}$$

式中,ε 为误差项。

数学上利用级数展开式

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \cdots$$

取前面3项,有

$$P_t = P + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\bigg|_{\Delta y=0}\Delta y + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2}\bigg|_{\Delta y=0}(\Delta y)^2$$

上式两边同时除以价格 P,则上式变为

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\times\frac{1}{P}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2}\times\frac{1}{P}\times(\Delta y)^2 \tag{3-34}$$

这样定义凸度 C 如下:

$$C = \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2}\times\frac{1}{P} \tag{3-35}$$

可见,凸度与价格—收益率函数的二阶导数对应。凸度与初始价格的乘积是价格—收益率曲线的曲率,即

$$C\times P = \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}y^2} \tag{3-36}$$

2. 凸度的计算

为了更准确地计算债券价格的变化,需要计算债券的久期和凸度。对于普通债券而言,凸度 C 的计算公式是

$$C = \frac{1}{P\times(1+y)^2}\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{C_t}{(1+y)^t}\times(t^2+t)\right] \tag{3-37}$$

式中,t 为现金流发生的时间;C_t 为第 t 期的现金流;y 为每期的到期收益率;n 为距离到期日的期数;P 为债券的市场价格。

对于零息债券,凸度的计算公式可以进一步简化:

$$C = \frac{t^2+t}{(1+y)^2}$$

令 $w_t = \dfrac{C_t}{(1+y)^t P}$,那么

$$C = \frac{1}{(1+y)^2}\sum_{t=1}^{n}(t^2+t)\times w_t \tag{3-38}$$

可发现凸度的计算与久期非常相似,区别在于它是 t^2+t(而不是 t)的加权平均,再除以 $(1+y)^2$,权重仍然是按到期收益率贴现的每期现金流现值占债券市场价格的比重。

注意：式(3-38)计算出的结果是以期数为单位的凸度，为了转化成以年为单位的凸度，还要把它除以每年付息次数的平方值。

编制R语言函数如下：

```
conv <- function(cf,F,y,n){
  t = 1:n
  a = cf/(1 + y)^t
  b = F/(1 + y)^n
  p = sum(a,b)
  c = (t^2 + t) * cf/(1 + y)^t
  c1 = (n^2 + n) * F/(1 + y)^n
  p1 = sum(c,c1)
  con = p1/p * (1 + y)^( - 2)
}
```

例 3-10 票面面值100元，息票率8%的3年期的债券，半年付息一次，到期年收益率10%，求该3年期债券的凸度。

解 在本例中，$F=100$元，$C=4$元，$y=0.05$，$n=6$，则

$$C=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{(t^2+t)\times C_t}{(1+y)^t}}{P(1+y)^2}$$

$$=\frac{(1^2+1)\times\frac{4}{1+0.05}+(2^2+2)\times\frac{4}{(1+0.05)^2}+\cdots+(10^2+10)\times\frac{104}{(1+0.05)^6}}{\left(\frac{4}{1+0.05}+\frac{4}{(1+0.05)^2}+\cdots+\frac{104}{(1+0.05)^6}\right)(1+0.05)^2}$$

R语言函数调用及结果如下：

```
> res = conv(4,100,0.05,6)
> res
[1] 33.3495
```

上面的凸度是按期计算，还可按年来计算，但凸度值有点变化，思考一下为什么？

```
> res/4
[1] 8.337375
```

3. 凸度与价格波动的关系

因为$\frac{\Delta P}{P}=-$修正久期$\times\Delta y$，所以则有

$$C=\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}\times\frac{1}{P}$$

因此式(3-34)可修正为久期与价格波动的关系：

$$\frac{\Delta P}{P}=-\text{修正久期}\times\Delta y+\frac{1}{2}\times C\times(\Delta y)^2 \tag{3-39}$$

例 3-11 上面两例中年修正久期为2.588047，年凸度为8.337375，如果预期未来收益将为11%，则利用式(3-39)可得

$$\frac{\Delta P}{P}=-\text{修正久期}\times\Delta y+\frac{1}{2}\times C\times(\Delta y)^2$$

$$= -2.588\,047 \times 1\% + 0.5 \times 8.337\,375 \times (1\%)^2$$
$$= -2.505\%$$

即收益增长1%,价格下降2.505%

$$P = 100 \times (1 - 2.505\%) = 97.495\,33(\text{元})$$

3.6.3 免疫及其R语言计算

大家知道债券组合的主要风险来自利率变化,就是期限结构的改变。免疫是保护债券组合避免利率风险的一种策略。管理者选择久期等于负债的到期期限的债券组合,利用价格风险和再投资率风险互相抵消的特点,保证管理者不受损失。

许多债券组合在到期时都希望达到目标值,如养老金的管理者要安排每年得到的现金流能满足养老金的支付。

如果债券管理者为投资者管理一个面值为1000美元,息票率是8%,息票再投资率是8%的5年期债券。其久期计算的R语言函数调用如下:

```
y = 0.08;c = 0.08;n = 5
fxzq(y,c,n)
[1] 4.312127
```

那么,1~4年的息票再投资所得为

$$80 \times (1.08^4 + 1.08^3 + 1.08^2 + 1.08) = 389.36(\text{美元})$$

第5年的本息为1080美元,总所得为

$$1080 + 389.36 = 1469.36(\text{美元})$$

即投资者现在每投资1美元,5年后所得1.469美元。它实现的复收益为

$$\text{RCY} = \left(\frac{1469.36}{1000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 8\%$$

如果利率在投资初期从8%突然跌到6%,那么1~4年的息票再投资所得为

$$80 \times (1.06^4 + 1.06^3 + 1.06^2 + 1.06) = 370.96(\text{美元})$$

第5年的本息为1080美元,总所得为

$$1080 + 379.96 = 1450.96(\text{美元})$$

即投资者现在每投资1美元,5年后所得1.450 96美元。它实现的复收益为

$$\text{RCY} = \left(\frac{1450.96}{1000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 7.73\%$$

使用免疫策略可以避免这种结果,即不使复利率下降。如果另一个债券的久期等于这个债券的到期期限,那么那个债券是免疫的。这就是利率变化在给定到期期限上不影响实现复收益的情况。

一个6年期面值为1000美元息票率和再投资率都是8%的债券的久期4.99年(即5年)。

R语言函数调用如下:

```
y = 0.08;c = 0.08;n = 6
fxzq(y,c,n)
[1] 4.99271
```

在第 5 年出售，所得为 1469.96 美元，为什么？

这是因为 1～4 年的息票再投资所得为

$$80\times(1.06^4+1.06^3+1.06^2+1.06)=370.96(\text{美元})$$

第 5 年的息票所得为 80 美元。债券还有 1 年到期，现价为

$$\frac{1080}{1.06}=1019\ \text{美元}$$

总所得为 370.96＋80＋1019＝1469.96 美元，实现复收益

$$\mathrm{RCY}=\left(\frac{1469.96}{1000}\right)^{\frac{1}{5}}-1=8\%$$

由于利率下降，再投资收入减少约 19 美元，而资本盈余 19 美元补偿了损失。

上述计算过程结果如表 3-5 所示。

表 3-5 债券免疫的现金流变化

时间/年	现　金　流	8%(r)	6%(r)	9%(r)
1	80	80×1.08^4	80×1.06^4	80×1.09^4
2	80	80×1.08^3	80×1.06^3	80×1.09^3
3	80	80×1.08^2	80×1.06^2	80×1.09^2
4	80	80×1.08	80×1.06	80×1.09
5	80	80	80	80
利息总收入		469.36	450.96	478.7768
5 年后债券价格	$1080/(1+r)$	1000	1019	990.8257
5 年后债券的终值		1469.36	1469.96	1469.602

通过表 3-5 可以看到，利率从 8%降到 6%，债券的利息再投资收入减少，但是销售价格却从 1000 美元涨到 1019 美元，两者基本相互抵消。当利率从 8%上涨到 9%时，利息收入的增加基本上被价格的降低所抵消。因此，从上例可以看出，不论利率如何变化，再投资风险和价格风险相互抵消，债券的利率风险被消除了。

因此，可以看出利率风险可分为两部分：

(1) 如果利率下降，再投资收入减少，而债券价格上升；

(2) 如果利率上升，再投资收入增加，而债券价格下降。免疫是利用再投资收入和债券价格相反变动、互相抵消来消除利率风险。

免疫策略广泛用于减少利率风险。它不仅可以使用免疫应用于个别债券，而且可以使用免疫应用于债券组合。这时债券组合的久期是包含各个债券久期的加权平均和。假设 w_i 是债券组合中的第 i 个债券的权重，D_i 是第 i 个债券的久期，D_{P} 是 N 个债券组成的投资组合的久期，则

$$D_{\mathrm{P}}=\sum_{i=1}^{N}w_iD_i$$

我们考虑由两个债券组成的免疫债券投资组合。前面 5 年期债券，面值 1000 美元，息票率和再投资率为 8%，它的久期为 4.312 年，而与它期限不同的 8 年期债券的久期为 6.202 年。如果在投资初期利率从 8%降到 6%，就用这两个债券构成免疫债券组合，它的久期应等于 5 年到期期限。因为

$$63.5\% \times 4.312 + 36.4\% \times 6.202 = 5$$

所以在这个债券组合中，5 年期债券占 63.6%，8 年期债券占 36.4%。5 年后出售这个债券组合。8 年期债券还有 3 年到期，出售的市价为

$$P = \frac{80}{1.06} + \frac{80}{1.06^2} + \frac{1080}{1.06^3} = 1053.84(\text{美元})$$

总所得计算如下：

1～4 年息票再投资收入

$$80 \times (1.06^4 + 1.06^3 + 1.06^2 + 1.06) = 370.96(\text{美元})$$

5 年期债券最后一年所得

$$1080 \times 63.6\% = 686.88(\text{美元})$$

8 年期债券在第 5 年的息票所得

$$80 \times 36.4\% = 29.12(\text{美元})$$

第 5 年出售 8 年期债券所得

$$1053.84 \times 36.4\% = 383.60(\text{美元})$$

总所得为

$$370.96 + 686.88 + 29.12 + 383.60 = 1470.56(\text{美元})$$

实现复收益

$$\text{RCY} = \left(\frac{1470.56}{1000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 8.02\%$$

与 5 年期债券相比较，利率从 8%跌到 6%，再投资所得减少 18.4 美元(389.36 美元－370.96 美元)而资本盈余增加 19.6 美元(1470.56 美元－1450.96 美元)，大致抵消。因而两者实现复收益可以认为是相同的，这个债券组合是免疫的。

债券的预期实现复收益可用下式估计

$$E(i) = y + \left(1 - \frac{D}{H}\right)(r - y) \tag{3-40}$$

式中，$E(i)$为债券的实现复收益的预期值；y 为现时市场的到期收益；H 为投资者持有债券的时期；D 为久期；r 为在购买时预估的再投资率。

到期收益 y 和久期 D 描述债券的特征，而持有债券的时期 H 和再投资率 r 表示投资者选择的意愿。再投资率 r 是从市场中得到的未来利率的一个估计值。

例 3-12 息票率是 8%，再投资率也是 8%的 5 年期债券，在投资初期预期利率从 8%跌到 6%，那么债券实现复收益的预期值是多少？

解 由式(3-40)得

$$E(i) = y + \left(1 - \frac{D}{H}\right)(r - y) = 8\% + \left(1 - \frac{4.312}{5}\right) \times (6\% - 8\%) = 7.725\%$$

这里投资者持有债券直到期限，所以 $H=5$。一般来说，投资者持有期可能小于债券的到期期限。实现复收益的预期值 7.725%与实现复收益 7.73%相差不到 0.1%。

从式(3-40)可知，如果实现复收益的预期值等于再投资率，必须 $1-\frac{D}{H}=0$ 或 $r=y$ 或两者都成立。前一式子成立，即久期 D 与投资者持有期限相同。这正是债券免疫要求久期 D 等于到期期限的条件，不管再投资率如何改变，实现复收益将等于到期收益 y。

免疫通常被认为是消极投资策略。因此，购买这种债券组合一直要保存到期。构造免疫债券组合时，一般假定收益曲线是水平的或者做平移，但实际变动要复杂得多。当收益曲线变动时，债券的久期会改变且债券组合的久期也会改变，为了使债券组合免疫，需要频繁地再调整，重新构造债券组合，这样的免疫是积极投资策略。

思考与练习

1. 假设新发行的3年期的债券面值为1000元，以后每半年支付利息50元，市场年收益为10%，那么债券的现值为多少？

2. 现在投资者面临着两种可供选择的美国息票债券：债券A有4%的息票率，债券B有10%的息票率。两种债券都还有8年到期，每半年付息一次，初始到期收益率YTM都为9%。投资者根据市场信息判断利率会立即发生变动，或者上升2%，或者下降2%。他想知道这种利率的改变将对两个债券的价格产生怎样的影响？

3. 有一种10年后到期的债券，每年付息一次，下一次付息正好在一年后，面值为100元，票面利率为8%，市场价格是107.02元，求它的到期收益率。

4. 一年期债券的到期利率是6.3%，两年期零息债券的到期利率是7.9%。

(1) 第2年的远期利率是多少？

(2) 根据期望假设，明年的一年期利率的期望值是多少？

(3) 根据流动性偏好理论，明年期的一年期利率的期望值比(2)得到的值高还是低？

5. 票面面值100元，息票率8%的3年期的债券，半年付息一次，到期收益率10%，求该3年期债券的凸度。

6. 某养老基金管理公司已建立一个养老基金，其债务是每年向受益人支付300万元，永不终止。基金管理者计划建立一个债券组合来满足这个要求，债券组合由债券A和债券B组成，债券组合及债券A、B的到期收益率均为15%，债券A的票面利率10%、期限5年、每年付息一次；债券B的票面利率8%、期限20年、每年付息一次。那么要使此债务完全免疫，每种债券的持有比例各为多少？（保留4位小数，假设不允许卖空）