

## 第3章

### 连续时间信号的频域分析

### 3.0 引言

前两章的内容是信号与系统的时域分析,时域分析的核心是LTI系统通过“卷积”运算求得任意输入引起的输出。卷积的原理是将信号分解成基本信号的叠加,每个基本分量都对系统产生响应,而总的响应就是各分量激励引起的响应的叠加。“卷积”中应用的基本信号是冲激信号,卷积的过程就是一个将移位和加权后的冲激响应组合起来从而得到总响应的过程。这种方法之所以有效是因为LTI系统具有线性和时不变性。

下面思考这样一个问题,当输入信号为复指数信号 $e(t)=e^{j\omega_1 t}$ 时,通过单位冲激响应为 $h(t)$ 的LTI系统,响应是多少?

我们知道,对于LTI系统,输出等于输入和单位冲激响应的卷积,即

$$r(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega_1(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_1 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_1 \tau} d\tau \quad (3-1)$$

如果将 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_1 \tau} d\tau$ 表示成函数 $H(j\omega_1)$ ,那么一个有趣的现象就出现了,式(3-1)将变成

$$r(t) = e^{j\omega_1 t} H(j\omega_1) \quad (3-2)$$

$e^{j\omega_1 t}$ 虽然是时间的函数,但它却含有频率的意义, $e^{j\omega_1 t}$ 的角频率为 $\omega_1$ 。

因此,当以 $e^{j\omega_1 t}$ 作为输入信号时,得到的输出信号与输入信号同频率,而且也是 $e^{j\omega_1 t}$ 的形式,只是幅度和相位不同。

由此产生了一种新的思路:能不能将信号进行另一种分解,分解成 $e^{j\omega t}$ 这种基本分量的形式,由此得到的输出是各复指数函数对应的输出之叠加?答案当然是肯定的,因为对于LTI系统,当 $e(t)=K_1 e^{j\omega_1 t} + K_2 e^{j\omega_2 t}$ 时,

$$r(t) = K_1 e^{j\omega_1 t} H(j\omega_1) + K_2 e^{j\omega_2 t} H(j\omega_2)$$

对信号进行复指数函数的分解,这就是著名的傅里叶分析。由于复指数函数含有频率的概念,因此这种分析方法相当于是在频域进行,这就是信号的频域分析,也称为信号的傅里叶分析。

根据欧拉公式

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

因此上述分解方法也相当于将信号分解成正弦函数或余弦函数,即三角级数。

其实,三角级数的概念最早见于古巴比伦时代的预测天体运动中。18世纪中叶,欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)和伯努利(D. Bernoulli)等人在振动弦的研究过程中印证了三角级数的概念,但他们最终却抛弃了自己最初的想法。同时拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813)也强烈批评,坚持“一个具有间断点的函数是不可能用三角级数来表示的”。1768年生于法国的傅里叶(J. B. J. Fourier, 1768—1830)在研究热的传播和扩散理论时,洞察出三角级数的重大意义。1807年,他向法兰西科学院提交了一篇论文,运用正弦曲线来描述温度分布。论文里有一个在当时具有争议性的论点:任何周期信号都可以用成谐波关系的正弦函数级数来表示。当时有4位科学家评审他的论文,其中拉

普拉斯和另两位科学家同意傅里叶的观点,而拉格朗日坚决反对,在近 50 年的时间里,拉格朗日坚持认为三角级数无法表示有间断点的函数。几经周折直到 15 年后的 1822 年,傅里叶才在他的 *Theorie analytique de la chaleur*(《热的分析理论》)一书中以另一种方式展示了他的成果。谁是对的呢?拉格朗日是对的:正弦曲线确实无法组合成一个带有间断点的信号。但是,我们可以用正弦曲线来非常逼近地表示它,逼近到两种表示方法不存在能量差别,二者对任何实际的物理系统的作用是相同的,基于此,傅里叶是对的。到 1829 年,德国数学家狄里赫利(Dirichlet)第一个给出了三角级数的收敛条件,严格解释了什么函数可以或不可以由傅里叶级数表示。至此,傅里叶的论点有了数学基础。

不仅如此,傅里叶最重要的另一个成果是,他认为非周期信号可以用“不全成谐波关系的正弦信号加权积分”表示(即后来所谓的傅里叶变换)。为表彰傅里叶的工作,科学界将这种分析方法称为傅里叶分析。傅里叶分析在信号处理、物理学、光学、声学、机械、数论、组合数学、概率、统计、密码学等几乎所有领域都有着广泛的应用,这是傅里叶对人类的最大贡献。

简言之,傅里叶的论点主要有两个,一是周期函数可以表示为谐波关系的正弦函数的加权和;二是非周期函数可以用正弦函数的加权积分表示。由于正弦函数的表达式中既含有时间也含有频率,因此,傅里叶分析实际上揭示了信号的时间特性和频率特性之间的内在联系,是对信号的频率特性的分析,这是傅里叶分析的物理意义。

什么是频域?顾名思义,频域就是频率域,以“频率”为自变量对信号进行分析,分析信号的频率结构(由哪些单一频率的信号合成),并在频率域中对信号进行描述,这就是信号的频域分析,即傅里叶分析。

### 3.1 信号的正交分解

两个正交函数相乘并在某范围内积分,所得积分值为零。由于正交函数具有这样的特性,因此,不同的正交函数分量可以相互分离开,这是将信号分解成正交函数的好处。而且关键的是,时域中的任何波形都可以分解成正交函数,或者说,用完备的正交函数集可以表示任意信号。

正交信号很多,埃尔米特多项式(Hermite Polynomials)、勒让德多项式(Legendre Polynomials)、拉格朗日多项式(Laguerre Polynomials)、贝塞尔函数(Bessel Polynomials)以及正弦函数都是正交函数。尤为值得注意的是,三角函数和复指数函数是正交函数,而且,三角函数集  $\{\sin(n\omega_1 t), \cos(n\omega_1 t)\}$  和复指数函数集  $\{e^{jn\omega_1 t}\}$  是完备的正交函数集。

#### 3.1.1 信号的谐波分量分解

尽管正交信号很多,但傅里叶分析选择了正弦函数作为正交函数进行分解,选择正

弦函数的理由有以下几点:

(1) 正弦波有精确的数学定义。

(2) 正弦波及其微分处处存在,而且其值是有界的。可以用正弦波来描述现实中的波形。

(3) 时域中的任何波形都可由各个频率的正弦波组合进行完整且唯一的描述。

(4) 任何两个不同频率的正弦波都是正交的,因此可以将不同的频率分量相互分离。

其实,最为关键的是,正弦信号含有频率的概念,正弦信号是唯一既含有时间又含有频率变量的函数,从正弦波中既可以看到时间的参量,也可以看到频率的影响。因此,也可以说,正弦波是对频域的描述,这是频域中最重要的规则。

在电气、电子信息、通信、控制等领域中的很多现象,都可以利用正弦波得到满意的解决,如,RLC 电路、互连线的电气效应、通信的带宽、信息码率等。

因此,傅里叶选择了正弦函数进行分解,就具有了非同寻常的工程意义。傅里叶分析几乎涵盖了所有的领域,这是他对人类进步最大的贡献。

以三角函数集  $\{\sin(n\omega_1 t), \cos(n\omega_1 t)\}$  或复指数函数集  $\{e^{jn\omega_1 t}\}$  展开的级数,就是傅里叶级数。 $\sin(\omega_1 t)$  和  $\cos(\omega_1 t)$  是基本的周期信号,与其成谐波关系的函数是  $\sin(n\omega_1 t)$  和  $\cos(n\omega_1 t)$ 。 $e^{j\omega_1 t}$  是基本的周期复指数信号,周期为  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ ,与其成谐波关系的函数是复谐波函数  $e^{jn\omega_1 t}$ 。傅里叶级数就是将信号展开成基本分量和各次谐波分量之和。

### 3.1.2 Dirichlet 条件

Dirichlet 条件是将周期信号展成傅里叶级数的条件,任何周期信号只要满足 Dirichlet 条件,都可以展开成傅里叶级数。Dirichlet 条件包括以下三个方面:

(1) 在一个周期内信号  $f(t)$  是绝对可积的,即

$$\int_T |f(t)| dt < \infty \quad (3-3)$$

这里,  $\int_T$  表示在一个周期  $T$  内的积分,例如,积分限为  $-T/2 \sim T/2$  或  $0 \sim T$ 。

(2) 在一个周期内,信号  $f(t)$  是有界变量,即  $f(t)$  在一个周期内有有限个极大值或极小值。

(3) 一个周期内,信号  $f(t)$  是连续的,只有有限个第一类间断点。

这就是 Dirichlet 条件,是信号  $f(t)$  能进行傅里叶级数展开的充分条件。工程应用中的许多物理信号都能满足 Dirichlet 条件,因此都可以进行傅里叶级数展开。

提示:

① 有些假设的信号不满足 Dirichlet 条件,但这些信号一般并没有已知的工程应用。

② 有些不满足狄里赫利条件的信号也可以展开成傅里叶级数。因为 Dirichlet 条件仅是傅里叶级数展开的充分条件而非必要条件。

## 3.2 周期信号的傅里叶级数展开

### 3.2.1 三角形式的傅里叶级数

三角函数集  $\{\cos(n\omega_1 t), \sin(n\omega_1 t)\}$  是完备的正交函数, 任意周期信号只要满足 Dirichlet 条件, 都可以展开成三角形式的傅里叶级数。

假设一个周期信号  $f(t)$ , 周期为  $T_1$ , 角频率为  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , 那么,  $f(t)$  可以表示成三角函数的线性组合:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(2\omega_1 t) + b_2 \sin(2\omega_1 t) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (3-4)$$

系数

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) dt \quad (3-5)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (3-6)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (3-7)$$

式中,  $\int_{T_1}$  表示在一个周期  $T_1$  内的积分。

其中,  $a_0$  是常数项, 表示的是直流分量。  $a_n$  和  $b_n$  都是  $(n\omega_1)$  的函数 ( $n$  为整数), 或是频率  $\omega$  的函数 (但这里  $\omega = n\omega_1$ , 只能取一系列的离散值), 表示的是谐波成分。一般将周期信号本身所具有的频率称为基频,  $f_1 = 1/T_1$ ,  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  是周期为  $T_1$  的周期信号的基本频率, 展开式中与原信号频率相同的正余弦分量  $a_1, b_1$  称为基波分量。而具有基频整数倍 (如  $2\omega_1, 3\omega_1, \cdots$ ) 的正余弦分量  $a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots$  称为谐波分量, 依次为二次谐波、三次谐波、 $\cdots$ 。  $a_n$  是余弦项的系数, 表示的是  $n$  次谐波的余弦分量,  $b_n$  表示的是  $n$  次谐波的正弦分量。

因此, 任何周期信号在满足 Dirichlet 的条件下都可以分解为直流分量和一系列正弦、余弦分量, 这些正余弦分量的频率是原周期信号频率的整数倍。

### 3.2.2 幅度相位形式的傅里叶级数

将式(3-4)整理:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_1 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_1 t) \right]$$

令  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\tan \phi_n = \frac{b_n}{a_n}$ , 则

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n) \quad (3-8)$$

这就是幅度相位形式的傅里叶级数,  $c_0$  是直流分量,  $c_n$  表示  $n$  次谐波的幅度,  $-\phi_n$  表示  $n$  次谐波的相位。系数间的关系如图 3-1 所示。

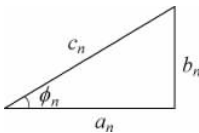


图 3-1 三角级数系数间的关系图

其实, 幅度相位形式的傅里叶级数是三角形形式傅里叶级数的变形, 在工程应用中更常使用。

### 3.2.3 指数形式的傅里叶级数

除了可以展成三角级数外, 周期信号还可以展成复指数函数  $e^{jn\omega_1 t}$  的线性组合

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3-9)$$

这就是指数形式的傅里叶级数展开, 其中, 系数公式

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-10)$$

式(3-9)中,  $n \in (-\infty, +\infty)$ , 负频率的引入是由完备性决定的, 是为了平衡正频率从而使求和的结果为实数值。

### 3.2.4 傅里叶级数展开式各系数间的关系

周期信号可以展开成指数形式的傅里叶级数, 也可以展开成三角形形式或幅度相位形式的傅里叶级数, 三种形式的傅里叶级数表达式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n) \end{aligned}$$

只要求得每种形式展开式中的系数, 代入展开式就可得到傅里叶级数。

下面推导三种展开式的系数之间的关系。

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{1}{2} a_n - j \frac{1}{2} b_n
 \end{aligned}$$

$F_n$  一般是复数, 可以表示成实部、虚部的形式, 也可以表示成模和相位的形式, 即

$$F_n = \operatorname{Re} F_n + j \operatorname{Im} F_n$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

由此可得各系数之间的关系:

直流分量

$$a_0 = c_0 = F_0 \quad (3-11)$$

$n$  次谐波

$$\begin{cases} a_n = 2\operatorname{Re} F_n \\ b_n = -2\operatorname{Im} F_n \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|F_n| \end{cases} \quad (3-12)$$

**【例题 3.1】** 求周期性冲激信号  $\delta_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$  (见图 3-2) 的傅里叶级数展开式。

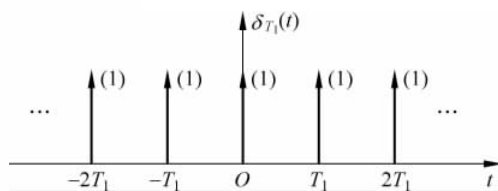


图 3-2 周期性冲激信号

解:

(1) 先求指数形式的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \quad (3-13)$$

则指数形式的傅里叶级数展开式为

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1 t} \quad (3-14)$$

(2) 也可以求三角形式的傅里叶级数展开式。

$$a_0 = F_0 = \frac{1}{T_1}, \quad a_n = 2\operatorname{Re} F_n = \frac{2}{T_1}, \quad b_n = -2\operatorname{Im} F_n = 0$$

则三角形式的傅里叶级数为

$$\delta_{T_1}(t) = \frac{1}{T_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{T_1} \cos(n\omega_1 t) \quad (3-15)$$

式(3-15)表明, 周期性冲激信号含有直流分量以及无穷多的余弦分量, 所有余弦分量

的幅度都是  $c_n = 2/T_1$ , 表明周期性冲激信号含有  $[0, +\infty)$  所有的频率成分, 而且除直流分量为  $1/T_1$  外, 其余的每个频率分量的幅度都是  $2/T_1$ , 甚至无穷大的频率成分依然存在。

根据式(3-15)进行图形合成, 可以更好地理解傅里叶级数展开的物理意义。图 3-3 只是示意性地画出了几个频率成分, 但不难想象无穷多频率成分叠加的效果。

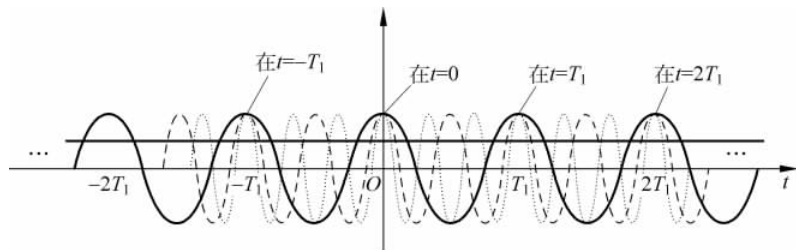


图 3-3 周期性冲激信号的傅里叶级数展开

对于任意整数  $n$ ,  $\cos(n\omega_1 t)$  在  $t = 0, t = T_1, \dots, t = nT_1$  时都为 1 (顶点), 即在  $t = 0, T_1, \dots, nT_1$  点上, 各谐波分量的幅度都为  $(1/T_1 + \infty \cdot 2/T_1)$ , 无穷多项相加的结果为无穷大。而在其他时刻, 无穷多项余弦信号叠加 (函数内插) 的结果为零。这与周期性冲激信号是吻合的。

**【例题 3.2】** 求图 3-4 所示的周期矩形脉冲信号的傅里叶级数展开式。

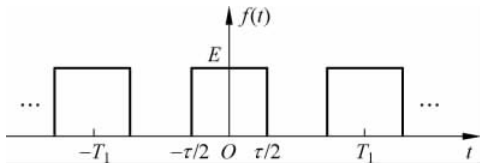


图 3-4 周期矩形信号

**解:** 指数形式的傅里叶级数的系数

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{E}{T_1} \frac{2}{n\omega_1} \sin(n\omega_1 \tau/2) \\ &= \frac{E\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin(n\omega_1 \tau/2)}{n\omega_1 \tau/2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1 \tau/2) \end{aligned}$$

指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1 \tau/2) e^{jn\omega_1 t}$$

三角形式的傅里叶级数的系数

$$a_0 = F_0 = \frac{E\tau}{T_1}, \quad a_n = 2\text{Re}F_n = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1 \tau/2), \quad b_n = -2\text{Im}F_n = 0$$

则三角形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1 \tau/2) \cos(n\omega_1 t)$$

可以看出, 图 3-4 所示的周期矩形信号含有直流成分和余弦分量, 不含有正弦分量。

与例题 3.1 的周期性冲激信号相比,周期性矩形脉冲信号的傅里叶级数的系数不再是常数,而是 $(n\omega_1)$ 的函数,谐波幅度 $c_n$ 随着频率 $(n\omega_1)$ 的增大按 $\frac{1}{n}$ 规律衰减变化。

实际上,周期性冲激信号的傅里叶级数的系数是常数,这是一种极为特殊的情况。一般情况下,傅里叶级数的系数都是 $(n\omega_1)$ 的函数。

**【例题 3.3】** 求周期性半波正弦信号(见图 3-5)的三角形式的傅里叶级数展开。

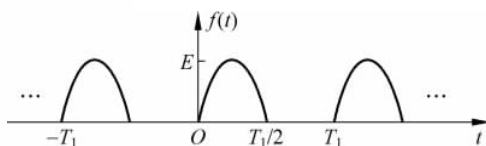


图 3-5 周期性半波正弦信号

**解:** 傅里叶级数的系数

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} E \sin(\omega_1 t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{E}{2\pi(1-n^2)} (1 + e^{-jn\pi}) = \frac{E}{2\pi(1-n^2)} [1 + \cos(n\pi) - j\sin(n\pi)] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} a_0 &= F_0 = \frac{E}{\pi} \\ a_n &= 2\operatorname{Re}F_n = \frac{E}{\pi} \frac{1 + \cos(n\pi)}{1 - n^2} = \begin{cases} \frac{2E}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \\ b_n &= -2\operatorname{Im}F_n = \frac{E \sin(n\pi)}{\pi(1-n^2)} = \begin{cases} \frac{E}{2}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin(\omega_1 t) - \frac{2E}{3\pi} \cos(2\omega_1 t) - \frac{2E}{15\pi} \cos(4\omega_1 t) + \cdots \\ &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin(\omega_1 t) + \sum_{n \text{ 为偶数}} \frac{2E}{\pi(1-n^2)} \cos(n\omega_1 t) \end{aligned}$$

周期性半波正弦信号含有直流、基波正弦分量以及一系列偶次余弦分量。谐波幅度按 $\frac{1}{n^2}$ 规律变化。

试想一下,如果是整波正弦信号 $f(t) = E \sin(\omega_1 t)$ ,那么信号的频率成分是怎样的呢?答案是,只含一个频率成分,那就是 $\omega_1$ ,即基波分量。周期半波正弦信号除含有基波分量 $\frac{E}{2} \sin(\omega_1 t)$ 外,还含有直流以及一系列的谐波成分,原因就在于正弦信号在时域去掉了半波,不再是单一频率的正弦波信号,因此在频域增加了很多频率成分。

**提示:** 信号的傅里叶级数展开式依然是时间函数的表达形式,重要的是傅里叶级数

的系数,系数是频率的函数,也就是说,系数的表示中含有了频率的概念,表达的是信号所含的频率成分。当某些系数为零时,说明原信号  $f(t)$  不含有这些频率分量。同样,系数的大小表示了相应的频率成分在整个信号频率成分含量中权重的大小。

### 3.3 傅里叶级数的性质

本节分析当周期信号进行某种运算或具有某种对称性时傅里叶级数的表现,运算包括线性叠加、位移、微分等;而当信号具有某种对称性时,其傅里叶级数的系数往往呈现某些特征。

#### 3.3.1 线性

由式(3-10)可知,傅里叶级数的系数  $F_n$  与时间信号  $f(t)$  之间的积分运算是一种线性运算,因此傅里叶级数的系数满足叠加性和均匀性。如果  $f_1(t)$  的傅里叶级数系数为  $F_{1n}$ ,  $f_2(t)$  的傅里叶级数系数为  $F_{2n}$ ,则  $K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)$  的傅里叶级数的系数为  $K_1 F_{1n} + K_2 F_{2n}$ 。

#### 3.3.2 位移性质

如果  $f(t)$  的傅里叶级数系数为  $F_n$ ,则  $f(t-\tau)$  的傅里叶级数系数为  $F_n e^{-jn\omega_1\tau}$ 。

**证明:** 根据傅里叶级数的系数公式,  $f(t-\tau)$  的傅里叶级数的系数

$$G_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t-\tau) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

令  $x = t - \tau$ , 则上式变为

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0-\tau}^{t_0+T_1-\tau} f(x) e^{-jn\omega_1(x+\tau)} dx \\ &= \left[ \frac{1}{T_1} \int_{t_0-\tau}^{t_0+T_1-\tau} f(x) e^{-jn\omega_1 x} dx \right] e^{-jn\omega_1 \tau} = F_n e^{-jn\omega_1 \tau} \end{aligned}$$

**【例题 3.4】** 求图 3-6 所示的周期信号的傅里叶级数。

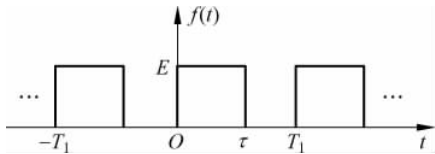


图 3-6 例题 3.4 图

**解:** 本题的  $f(t)$  实际上是例题 3.2 中图 3-4 所示对称矩形信号(门限信号)向右平移  $\tau/2$ , 因此, 它的傅里叶级数系数为

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1\tau/2) e^{-jn\omega_1\tau/2}$$

则  $f(t)$  的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1\tau/2) e^{-jn\omega_1\tau/2} \right) e^{jn\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1\tau/2) e^{jn\omega_1(t-\tau/2)} \end{aligned}$$

### 3.3.3 时域微分性质

若  $f(t)$  的傅里叶级数的系数为  $F_n$ , 则其导数  $\frac{d}{dt}f(t)$  的傅里叶级数的系数为  $j n \omega_1 F_n$ 。

**证明:** 若  $f(t)$  的周期为  $T_1$ , 则其导数  $\frac{d}{dt}f(t)$  也必然是周期为  $T_1$  的周期信号,  $\frac{d}{dt}f(t)$  的傅里叶级数系数

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f'(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \left[ f(t) e^{-jn\omega_1 t} \right]_{t_0}^{t_0+T_1} + \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} j n \omega_1 f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= j n \omega_1 \left[ \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] = j n \omega_1 F_n \end{aligned}$$

对于高阶导数  $\frac{d^k}{dt^k}f(t)$ , 其傅里叶级数的系数为  $(j n \omega_1)^k F_n$ 。

有些信号求导后可能出现比较简单甚至冲激函数的形式, 对这类信号应用微分性质求傅里叶级数可能会简化运算。但需要注意的是, 直流分量要特别考虑。

**【例题 3.5】** 利用性质求解图 3-7(a) 所示的三角周期脉冲信号的傅里叶级数。

**解:** 对  $f(t)$  求导两次, 得到图 3-7(c),  $f''(t)$  的主周期信号为

$$f''_1(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

在例题 3.1 中已经求得周期性冲激信号的傅里叶级数的系数, 结合位移性质和线性性质, 可得  $f''(t)$  的傅里叶级数的系数为

$$\frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1} - \frac{2}{T_1} + \frac{1}{T_1} e^{-jn\omega_1}$$

由微分性质, 得

$$(j n \omega_1)^2 F_n = \frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1} - \frac{2}{T_1} + \frac{1}{T_1} e^{-jn\omega_1}$$

则三角周期脉冲的傅里叶级数的系数为

$$F_n = \frac{2}{T_1} \frac{1 - \cos(n\omega_1)}{(n\omega_1)^2} = \frac{1}{T_1} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1}{2}\right)$$

代入  $T_1=3$ ,  $\omega_1=\frac{2\pi}{3}$ , 得

$$F_n = \frac{1}{3} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

故三角周期脉冲的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) e^{jn\frac{2\pi}{3}t}$$

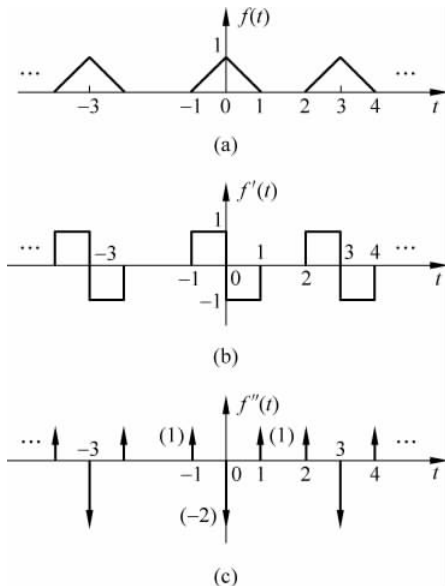


图 3-7 例题 3.5 图

### 3.3.4 时域奇偶对称性

周期信号的对称性分为两类,一类是整周期对称;另一类是半周期对称。整周期对称包括偶对称、奇对称,半周期对称包括奇谐对称和偶谐对称。

#### 1. 偶对称信号

偶对称信号满足

$$f(t) = f(-t)$$

即  $f(t)$  是偶函数。可求得其傅里叶级数的系数

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt \neq 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \neq 0$$

所以,偶对称信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) \quad (3-16)$$

即偶对称信号只含有直流分量和余弦分量,不含有正弦分量。如 3.2 节中的例题 3.1 和例题 3.2,都是偶对称的例子。

## 2. 奇对称信号

奇对称信号满足

$$f(t) = -f(-t)$$

即  $f(t)$  是奇函数,其傅里叶级数的系数

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \neq 0$$

奇对称信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_1 t) \quad (3-17)$$

可见,奇对称信号中不含直流分量,也没有余弦分量,仅仅含有正弦分量。

**【例题 3.6】** 求图 3-8 所示的周期锯齿信号的傅里叶级数展开式。

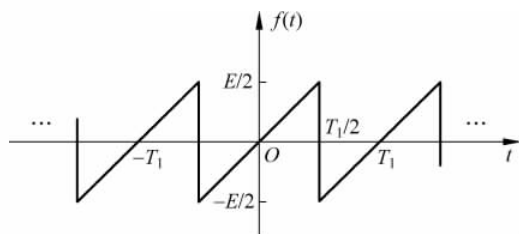


图 3-8 周期锯齿信号

**解:** 信号满足奇对称,故  $f(t)$  只含有正弦分量,不含直流和余弦分量。

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \frac{E}{T_1} t \sin(n\omega_1 t) dt \\ &= \frac{(-1)^{n+1} E}{n\pi} \end{aligned}$$

三角形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} E}{n\pi} \sin(n\omega_1 t)$$

指数形式的傅里叶级数的系数

$$F_0 = a_0 = 0$$

$$F_n = \frac{1}{2} a_n - j \frac{1}{2} b_n = -j \frac{(-1)^{n+1} E}{2n\pi} = j \frac{(-1)^n E}{2n\pi}$$

奇对称周期信号的  $F_n$  是一个纯虚数。

因此,指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left( j \frac{(-1)^n E}{2n\pi} \right) e^{jn\omega_1 t}$$

谐波幅度按  $\frac{1}{n}$  规律变化。

### 3. 奇谐对称信号

如果信号  $f(t)$  满足

$$f(t) = -f(t \pm T_1/2) \quad (3-18)$$

这种信号称为奇谐对称信号。图 3-9 的信号就是一个奇谐对称信号。

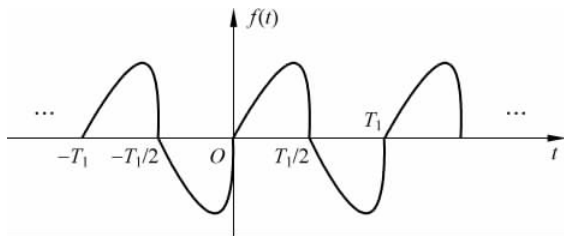


图 3-9 奇谐对称信号

实际上,这是一个半周期对称信号,信号平移半个周期后上下翻转与原信号重合。为什么将这种信号称为奇谐对称信号呢?

下面先求傅里叶级数的系数,将  $f(t)$  表示成两部分

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & -T_1/2 \leq t < 0 \\ -f_1(t - T_1/2), & 0 \leq t < T_1/2 \end{cases}$$

则

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) dt + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} [-f_1(t - T_1/2)] dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} f_1(t - T_1/2) \cos(n\omega_1 t) dt$$

令  $\tau = t - T_1/2$ , 则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(\tau) \cos[n\omega_1(\tau + T_1/2)] d\tau \\ &= \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(\tau) \cos(n\omega_1 \tau + n\pi) d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{4}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) \cos(n\omega_1 t) dt, & n = 2r + 1 \\ 0, & n = 2r \end{cases} \end{aligned}$$

同理

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) \sin(n\omega_1 t) dt, & n = 2r + 1 \\ 0, & n = 2r \end{cases}$$

由此,当  $n$  为偶数时,  $a_n = b_n = 0$ ; 当  $n$  为奇数时,  $a_n = a_{2r+1} \neq 0, b_n = b_{2r+1} \neq 0$ 。

所以,奇谐对称信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \left\{ a_{2r+1} \cos[(2r+1)\omega_1 t] + b_{2r+1} \sin[(2r+1)\omega_1 t] \right\} \quad (3-19)$$

现在明白了吧? 为什么将具有这种对称性的信号称为奇谐对称,原因就是奇谐对称信号的傅里叶级数只含奇次谐波分量,不含直流分量,也不含偶次谐波。

#### 4. 偶谐对称信号

如果信号  $f(t)$  满足

$$f(t) = f(t \pm T_1/2) \quad (3-20)$$

将具有这种对称性的信号称为偶谐对称信号。这也是一个半周期对称信号,信号平移半个周期后与原信号重叠。实际上,偶谐对称信号等同于周期为  $T_1/2$  的偶对称信号。

正是由于周期为  $T_1/2$ ,所以基本角频率为  $2\omega_1$ ,谐波成分是基本角频率的整数倍,即  $2n\omega_1$ ,故这种对称信号将只含有偶次谐波分量。具体证明可以参照奇谐函数的傅里叶级数系数求解过程,这里从略。

**【例题 3.7】** 分析图 3-10 所示信号含有什么频率成分?

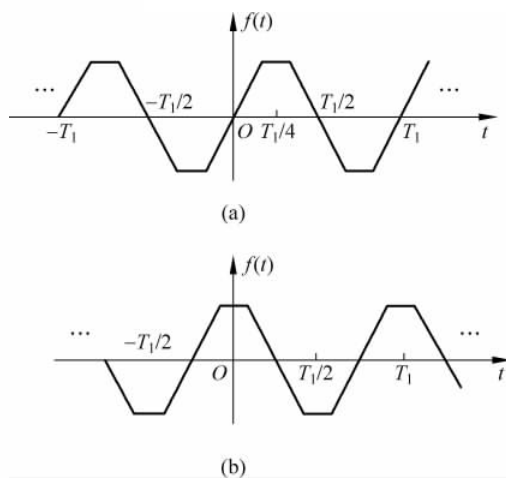


图 3-10 例题 3.7 图

解：图 3-10(a)所示信号  $f(t)$  既是奇函数，又是奇谐函数，因此只含奇次谐波的正弦分量；图 3-10(b)所示信号  $f(t)$  既是偶函数，又是奇谐函数，因此只含奇次谐波的余弦分量。

### 3.4 信号的频谱

傅里叶级数展开式依然是时间函数的表示，但展开式的每一项或是直流分量，或是谐波分量。一个信号到底含有什么频率成分以及各频率成分的相对关系，取决于信号的傅里叶级数的系数。当傅里叶级数的系数  $c_k=0$  时，说明不存在  $k$  次谐波的频率成分。而当  $c_n > c_m$  时，说明信号中所含的  $n$  次谐波分量要比  $m$  次谐波分量大，即  $n$  次谐波分量所占的权重更大一些。

为了直观地表示信号所含各频率成分的大小，可以将傅里叶级数的系数与频率的关系画成图形，这就是信号的频谱。

#### 3.4.1 信号的谱表示

傅里叶级数的系数与时间信号一一对应，不同的时间信号，其傅里叶级数的系数不同。如果将信号的傅里叶级数的系数与频率  $\omega$  的关系表示出来，可以从另外一个角度（即频率的角度）来表示时间信号。

先分析一个简单的信号

$$f(t) = 3\cos(\omega_1 t)$$

如果将这个正弦信号在时域用图形表示出来，需要无穷多个点才能连成余弦曲线，其时域波形见图 3-11(a)。由于正弦信号的三要素是频率、幅度和相角，只要这三个要素确定，正弦信号就完全确定。这个周期信号只有一个频率，那就是  $\omega_1$ ，幅度为 3，相位为零。如果画一个坐标系，横坐标代表频率、纵坐标代表幅度或相位，那么在这样的坐标系中，只需表示正弦信号的三要素就可以了。图 3-11(b)表示幅度-频率的关系，(c)表示相位-频率的关系，二者合起来就完整地描述了这个正弦信号，当然，这种描述是从频域的角度。在频域，单频正弦信号只需一个点就可以表示。从图 3-11(b)看出，信号的频率只有  $\omega_1$ ，相应的幅度为 3；而图 3-11(c)表示相位为零。

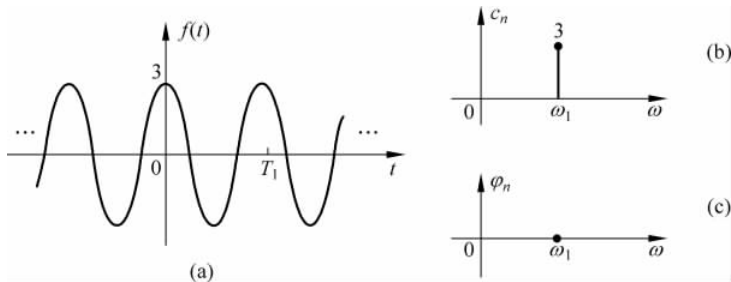


图 3-11 正弦信号的时域表示和频域表示

需要特别说明的是,图 3-11(a)的时域描述和图 3-11(b)、(c)的频域描述,都是正弦信号  $3\cos(\omega_1 t)$  的表示,只是一个在时域(自变量是  $t$ ),一个在频域(自变量是  $\omega$ ),是同一事物的两种表现形式。所谓的“横看成岭侧成峰”,不同的角度,表现的形式不同,但不管观察的角度如何,都是那座山。

再举一个例子,信号  $f(t)$  为

$$f(t) = 3\cos(t - \pi/4) + 2\cos(3t + \pi/3)$$

该信号包含两个正弦信号,分别是基波分量和 3 次谐波,基波频率为  $\omega_1 = 1$ ,基波分量和 3 次谐波分量的幅度分别为 3 和 2,对应的相位分别为  $-\pi/4$  和  $\pi/3$ 。其他频率成分为 0。画出  $f(t)$  的频域描述,如图 3-12 所示。

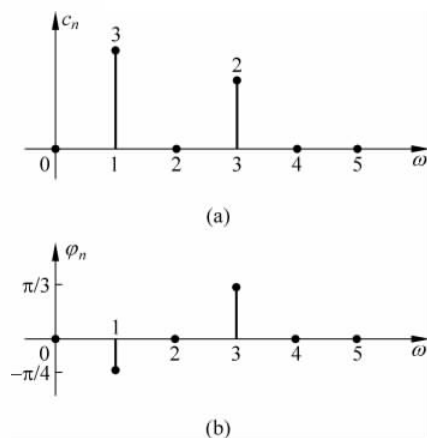


图 3-12 信号  $f(t)$  的频域描述

$f(t)$  的时域波形如图 3-13 所示,从时域波形中很难直接看出信号所含的频率成分,但在图 3-12 的信号频域描述图形中,信号所含的频率成分一目了然,这是信号频域分析的优势所在。

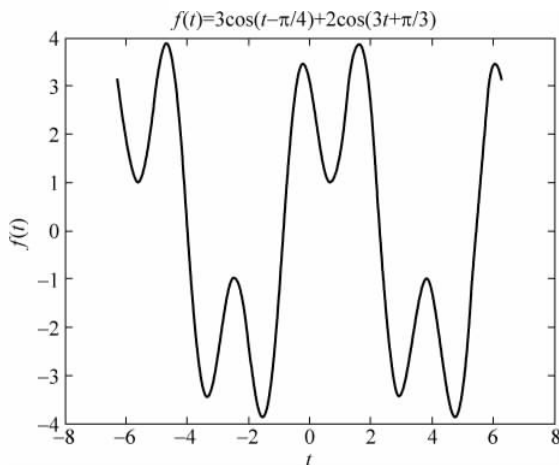


图 3-13  $f(t)$  的时域表示

在信号的频域描述中,幅度谱线的长度代表了频率分量的振幅,相位谱线的长度代表了频率分量的相角大小,它们共同构成信号  $f(t)$  的“谱”。

什么是“谱”?一束白光通过三棱镜后呈现出“红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫”的彩色光带,物理学中用折射和色散来解释。实际上,此现象也表现出了“谱”的概念。七种色光的频率各不相同,红光频率最小,紫光频率最大,所呈现的七彩光带就是白光的“谱”,表明白光含有七种频率成分,而这七种频率成分恰恰是人眼能够识别的可见光频率。不过,工程中大多数信号的频率成分超出了可见光频率范围。

### 3.4.2 周期信号的频谱

傅里叶级数表明周期信号可以分解成若干不同幅度、不同相位、不同频率的余弦波的叠加。类似于图 3-12,将不同频率成分的幅度或相位画成图形,信号所含的频率成分一目了然,这样的图形称为信号的频谱图,是信号各次谐波分量的图形表示。因此,周期信号的频谱描述了周期信号的谐波组成情况,表示周期信号所含的频率成分。其中,幅度与频率的关系称为幅度频谱,简称幅度谱;相位与频率的关系称为相位频谱,简称相位谱。

周期信号既可以展开成指数形式的傅里叶级数,也可以展开成幅度相位形式的傅里叶级数,由各自系数即可得到指数形式的频谱图和三角形式的频谱图。

指数形式的傅里叶级数展开式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

将系数  $F_n$  表示成模和相位的形式

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} \quad (3-21)$$

画出  $|F_n| \sim \omega$  和  $\varphi_n \sim \omega$  的关系图,即得到指数形式的幅度频谱和相位频谱。

对于幅度相位形式的傅里叶级数展开式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

其幅度  $c_n \sim \omega$  和相角  $\varphi_n \sim \omega$  的关系图即为三角形式的幅度频谱和相位频谱。

**【例题 3.8】** 信号  $f(t) = 1 + 3\cos(\omega_1 t - \pi/4) - 2\cos(3\omega_1 t)$ , 画出其幅度频谱和相位频谱。

**解:** 将信号整理成标准形式

$$f(t) = 1 + 3\cos(\omega_1 t - \pi/4) + 2\cos(3\omega_1 t - \pi)$$

可以看出,  $f(t)$  自身就是傅里叶级数的表现形式,有直流分量、基波分量和三次谐波分量。画出各谐波成分的幅度及相位与频率的关系,就表示了该信号的幅度频谱和相位频谱,如图 3-14 所示。

本题的频率成分为有限个,一般将这种信号称为有限频宽信号,或称为带限信号。平常我们说的频带,指的是一段频率范围。当信号的傅里叶级数展开式只有有限项,例

如当  $n > k_{\max}$  时,  $c_n = 0$ , 即

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k_{\max}} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

这种信号就属于带限信号, 其最大频率成分是  $k_{\max}\omega_1$ 。例题 3.8 中的信号的最大角频率是  $3\omega_1$ 。

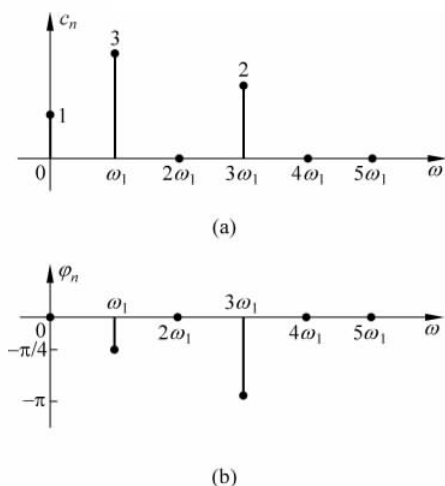


图 3-14 例题 3.8 的信号频谱图

**【例题 3.9】** 画出周期性冲激信号的频谱图。

**解:** 在例题 3.1 中, 已经得到指数形式的傅里叶级数的系数为

$$F_n = 1/T_1, \quad n \in (-\infty, +\infty)$$

幅度相位形式的傅里叶级数的系数

$$c_0 = a_0 = 1/T_1$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n = 2/T_1, \quad n \in [1, +\infty)$$

分别画出指数形式的频谱图和三角形式的频谱图, 见图 3-15(a) 和 (b)。周期性冲激信号含有从直流到无穷大的所有频率成分, 而且随着频率的增大, 信号的频谱是恒定的, 并没有出现衰落的情况。

指数形式的频谱在  $\pm n\omega_1$  (正负频率) 都要表示, 负频率部分的频谱是数学演算的结果; 三角形式的频谱只有正频率部分, 是信号真实的频率分量。将指数形式“负频率”部分的幅度频谱以纵轴折叠到正频率部分, 相应的谐波合起来就是三角形式的幅度频谱。这是欧拉公式的物理意义所在。注意, 不论是指数形式还是三角形式的频谱, 二者直流成分是一致的。因为不管怎样的表现形式, 一个信号的直流成分是唯一的。

图 3-15(c) 是周期性冲激信号的时域波形, 每隔周期  $T_1$  出现一个单位冲激, 无始无终。这样的时间信号含有最丰富的频率成分。

图 3-15 分别从频域和时域对信号进行描述, 显示的是周期性冲激信号在不同域的表现。

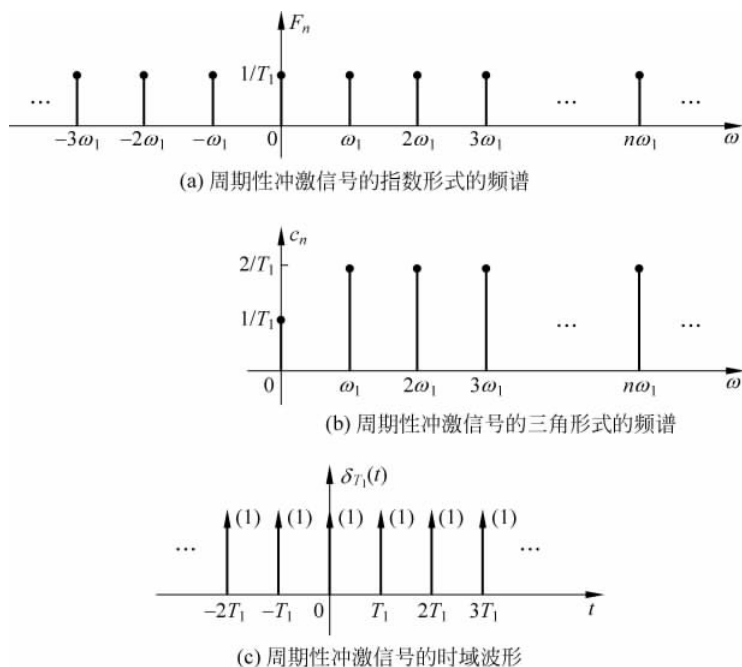


图 3-15 周期性冲激信号的频域和时域的图形表示

**【例题 3.10】** 画出周期性矩形脉冲信号(见图 3-4)的频谱图。假设  $E=1, T_1=8, \tau=2$ 。

**解:** 由  $T_1=8$ , 得周期信号的基本角频率

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{4}$$

在例题 3.2 中已经求得周期矩形信号的指数形式的傅里叶级数的系数和三角形式的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1\tau/2)$$

$$a_n = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}(n\omega_1\tau/2), b_n = 0, a_0 = F_0 = \frac{E\tau}{T_1}$$

代入  $E=1, T_1=8, \tau=2$ , 得

直流分量

$$c_0 = |F_0| = \frac{1}{4}$$

谐波分量

$$F_n = \frac{1}{4} \text{Sa}(n\omega_1)$$

$$c_n = |a_n| = \frac{1}{2} |\text{Sa}(n\omega_1)|$$

由于  $F_n$  是实数, 可以直接画出指数形式的频谱图  $F_n \sim \omega$  (见图 3-16(a)), 也可以分别画出幅度频谱(见图 3-16(b))和相位频谱(见图 3-16(c))。

三角形式的幅度频谱和相位频谱分别见图 3-16(d)和图 3-16(e)。

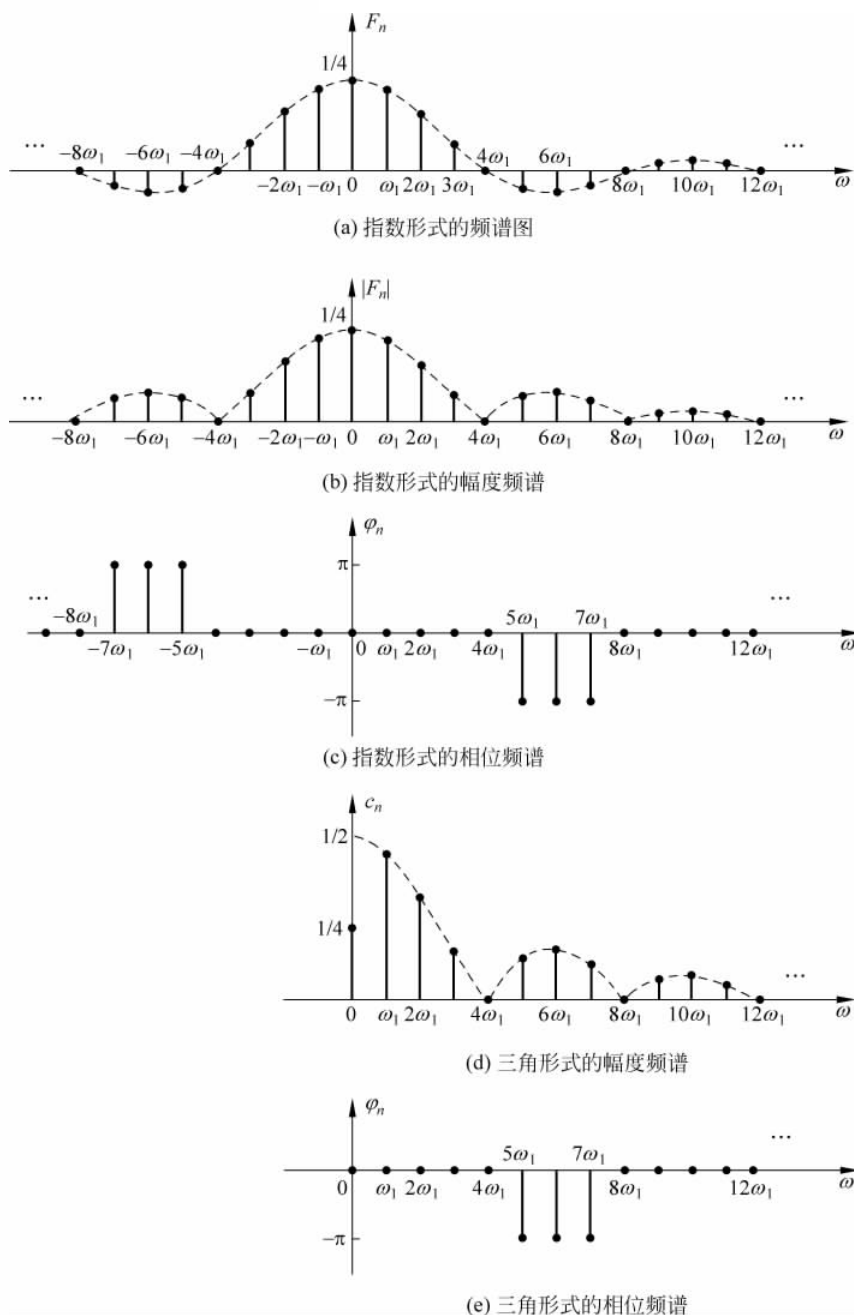


图 3-16 周期矩形脉冲信号的频谱 ( $\omega_1 = \pi/4$ ,  $T_1 = 4\tau$ )

从图 3-16 中可以看出,周期矩形信号含有无穷多的频率成分,其频谱的趋势按照抽样函数的包络变化,高频成分越来越小。在本题的参数下,指数形式频谱的包络是  $\text{Sa}(\omega)/4$ ,三角形式频谱(除去直流外的谐波成分)的包络是  $\text{Sa}(\omega)/2$ ,这是由于指数形式的频谱在正负

频率处都要表现的缘故。另外,本题周期矩形信号的基波分量  $\omega_1 = \pi/4$ , 抽样包络趋势线的第一个零值点为  $2\pi/\tau = \pi = 4\omega_1$ , 恰恰是 4 次谐波的频率成分。因此,对于周期是脉宽 4 倍的周期矩形脉冲信号 ( $T_1 = 4\tau$ ), 其 4 次谐波、8 次谐波、12 次谐波……的傅里叶级数的系数等于零, 即信号不含有 4 次谐波、8 次谐波…… $4k$  次谐波成分(这里  $k$  为整数)。

**【例题 3.11】** 画出例题 3.6 中周期锯齿脉冲的频谱图。

解: 三角形式的傅里叶级数的系数

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}E}{n\pi}$$

故

$$c_0 = a_0 = 0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n|$$

周期锯齿脉冲的三角形式的幅度频谱和相位频谱如图 3-17(a)和(b)所示。

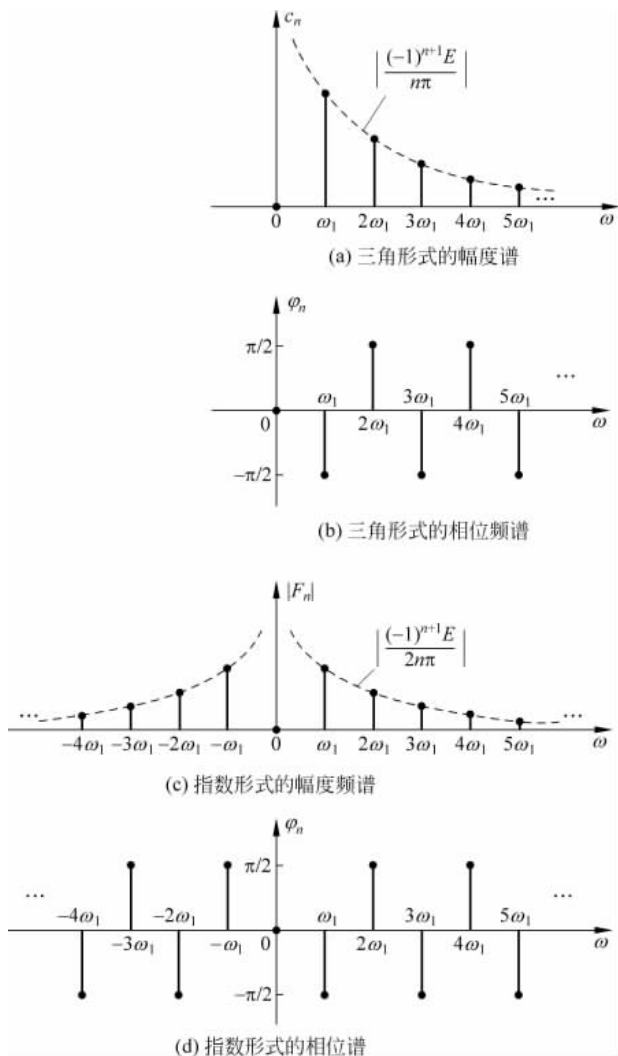


图 3-17 周期锯齿脉冲的频谱图

也可以画出指数形式的频谱图。

$$F_0 = 0, \quad F_n = -j \frac{(-1)^{n+1} E}{2n\pi}$$

由于  $F_n$  是纯虚数,故谐波分量的相位为  $\pm\pi/2$ 。指数形式的频谱见图 3-17(c)和(d)。

通过上述几道例题看出,三角形式的频谱是正频率分量处的频谱,是实际的物理频谱。指数形式的频谱具有“正、负频率”分量,且关于纵轴对称,幅度频谱满足偶对称,相位频谱满足奇对称(读者可自行证明)。如果将“负频率”分量的幅度频谱以纵轴为对称轴纵向折叠到“正频率”,即与三角形式的幅度频谱相吻合。无论是三角形式的频谱,还是指数形式的频谱,都是信号的频率成分的表示,而且二者在物理上是一致的,仅仅是数学演算上的差别。

### 3.4.3 周期信号频谱的特点

不同的信号具有不同的频谱,表明它们所含的频率成分不同。不过,周期信号的频谱具有一些共同的特点。

#### 1. 离散性

周期信号的频谱是一条条离散的谱线。对于幅度频谱,每条谱线代表某一频率分量的幅度,连接各谱线顶点的曲线(包络线)反映了各频率分量幅度的变化情况。对于相位频谱,每条谱线代表某一频率分量的相位值。

#### 2. 谐波性

周期信号的频谱是在基本频率  $\omega_1$ ,  $n$  次谐波  $2\omega_1, 3\omega_1, \dots, n\omega_1, \dots$  上的频谱值,谱线间隔为  $\omega_1$ 。 $\omega_1/2$  或  $(3/2)\omega_1$  是没有意义的,也就是说周期信号不存在“ $1/2$  次谐波”或“ $3/2$  次谐波”。

例如,某周期信号的周期是 1s,分析该信号是否存在 0.5Hz、1Hz、1.5Hz、2Hz 的频率成分。

实际上,由  $T_1=1\text{s}$  可知,  $f_1=1\text{Hz}$ ,因此频率成分只可能是 1Hz、2Hz、3Hz...,不可能存在 0.5Hz、1.5Hz 等非谐波频率成分。

#### 3. 收敛性

一般周期信号的频谱理论上有无限多次谐波,从前面例题中不难看出,一般信号高次谐波的幅度总的趋势是逐渐变小的,也就是说信号的高频分量是逐渐衰减的,但不同信号高次谐波的收敛速度不同。如果对信号  $f(t)$  进行  $k$  阶求导直至出现  $\delta$  函数,那么其傅里叶级数将按  $1/n^k$  的速度收敛(从整体趋势看)。

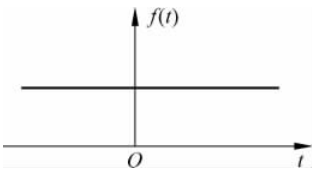
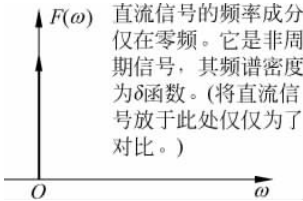
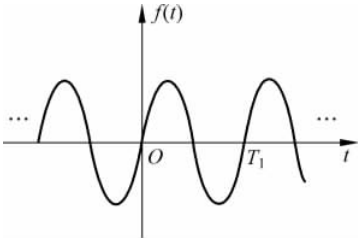
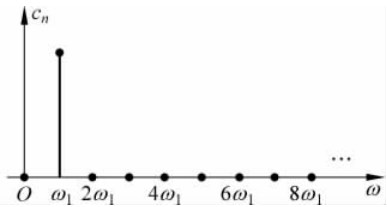
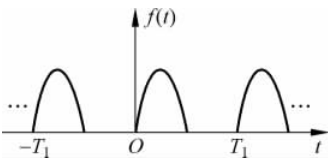
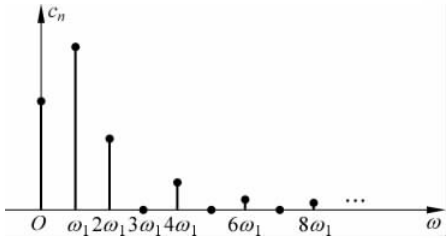
这个结论可用前面的例题验证。周期性矩形方波和锯齿波信号,求导一次就会出现  $\delta$  函数,它们的傅里叶级数的系数都是按  $1/n$  的速度收敛(例题 3.2 和例题 3.6);半波正

弦信号和周期三角脉冲需要求导 2 次才出现  $\delta$  函数,其傅里叶级数的系数按  $1/n^2$  的速度收敛(例题 3.3 和例题 3.5)。如果一个周期信号求导 3 次才出现  $\delta$  函数,那么它的幅度频谱的收敛速度是  $1/n^3$ 。

事实上,信号波形越平滑,需要越高阶求导才可能出现  $\delta$  函数,因此,信号的高次谐波收敛速度很快,即其高次谐波的幅度越小,说明高频成分越少;而越是变化激烈的信号,其高频成分越丰富。在波形跳变点处,往往求导一次即出现  $\delta$  函数,因此具有较为丰富的高频分量。两个极端的例子是直流信号和冲激信号,一个是最平滑的信号,只含有零频率;另一个是变化最激烈的信号,所含的高频成分异常丰富,在无穷大频点处频谱依然是常数。

表 3-1 对一些典型信号的时域和频域进行了对比,从中可以看出时域的平滑对应频域的低频分量,而时域如果剧烈变化,其频域高频成分将变得丰富,即信号中含有很多的高频分量。

表 3-1 信号的时域和频域

| 信号     | 时域波形                                                                                | 幅度频谱                                                                                                                                            |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 直流信号   |   |  直流信号的频率成分仅在零频。它是非周期信号,其频谱密度为 $\delta$ 函数。(将直流信号放于此处仅仅为了对比。) |
| 正弦信号   |  |                                                             |
| 半波正弦信号 |  |                                                             |

续表

| 信号     | 时域波形 | 幅度频谱 |
|--------|------|------|
| 周期矩形脉冲 |      |      |
| 周期冲激信号 |      |      |

小结：

傅里叶级数将信号展成了正弦函数的形式，而正弦信号含有了频率的概念，因此，傅里叶级数展开的目的是分析信号的直流分量和一系列谐波分量，是对信号的频率成分进行分析。

当把一个时间信号用“其傅里叶级数的系数与频率的关系”表示时，就得到了信号的频域表示或者信号的谱表示。

傅里叶级数展开式是时域表示，而傅里叶级数的系数则是频域表示。

因此，对于连续时间信号，其波形描述有两种，一种是第 2 章的时域波形，横坐标是时间  $t$ ，可用示波器观看；另一种是本章的频域描述，横坐标是频率  $\omega$  (或  $f$ )，用频谱仪观看。信号的频域波形也称为频谱。

### 3.5 信号的功率谱

周期为  $T_1$  的周期信号  $f(t)$ ，其时域功率表达式为

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} |f(t)|^2 dt \quad (3-22)$$

下面推导信号功率的频域表示。

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) f^*(t) dt$$

为了在频域求功率，需要将  $f(t)$  展开成傅里叶级数，

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m e^{jm\omega_1 t} \right)^* dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m^* \left( \frac{1}{T_1} \int_{T_1} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt \right)$$

其中

$$\frac{1}{T_1} \int_{T_1} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

所以

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \quad (3-23)$$

这就是周期信号功率的频域求解公式,表明周期信号的平均功率等于频域中直流分量、基波分量以及各次谐波分量的平均功率之和。

将式(3-23)进一步整理

$$P = F_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|F_n|^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(c_n/2)^2$$

即

$$P = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2 \quad (3-24)$$

$c_n/\sqrt{2}$ 表示谐波成分的有效值,因此,周期信号的平均功率等于有效值的平方之和。

信号的平均功率既可以在时域求得,也可以在频域通过幅度谱求得。即

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2 \quad (3-25)$$

式(3-25)体现了能量守恒的概念,称为帕塞瓦尔(Parseval)定理。

想一想:

为什么可以用信号的频谱求功率?

这是因为,一个信号的时域描述和频域描述(频谱)表示的是同一个信号,是同一信号的不同表现形式,二者所包含的信息是完全相同的,仅仅是从不同的角度表现而已。因此,自然而然就可以既在时域求功率,也可以在频域求功率了。

将各次谐波的平均功率与频率的关系绘成图形,就是周期信号的功率谱。

**【例题 3.12】** 周期电流信号  $i(t) = 1 - \sin(\pi t) + \cos(\pi t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi t + \pi/6)$ , 单位为 A, 画出该信号的频谱和功率谱, 并计算平均功率。

**解:** 将信号进行整理

$$i(t) = 1 + \sqrt{2} \cos(\pi t + \pi/4) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi t + \pi/6)$$

可知直流成分  $c_0 = 1$ ; 基波角频率  $\omega_1 = \pi$ ,  $c_1 = \sqrt{2}$ ,  $\varphi_1 = \pi/4$ ; 信号含有二次谐波  $2\omega_1 = 2\pi$ , 二次谐波的幅度  $c_2 = 1/\sqrt{2}$ , 相位  $\varphi_2 = \pi/6$ 。因此信号的频谱如图 3-18 所示。信号的功率

谱如图 3-19 所示。

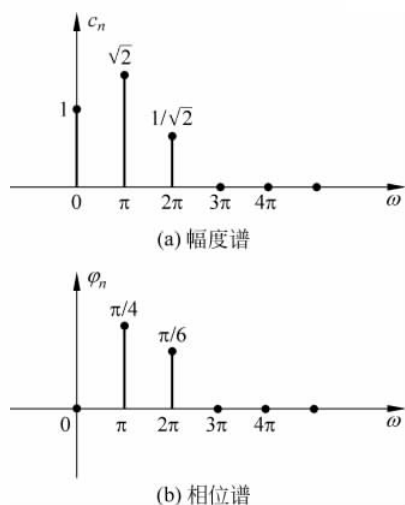


图 3-18 例题 3.12 信号的频谱图

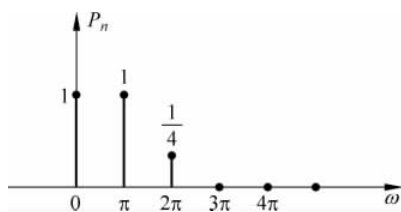


图 3-19 例题 3.12 信号的功率谱

信号的平均功率既可以在时域求,也可以在频域求。本题只有有限的频率成分,应用 Parseval 定理利用信号的频谱成分求功率非常简单。

$$\begin{aligned}
 P &= c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n / \sqrt{2})^2 \\
 &= c_0^2 + (c_1 / \sqrt{2})^2 + (c_2 / \sqrt{2})^2 \\
 &= 1^2 + (\sqrt{2} / \sqrt{2})^2 + ((1/\sqrt{2}) / \sqrt{2})^2 \\
 &= 2.25 \quad (\text{W})
 \end{aligned}$$

#### 深层理解:

一个连续时间周期信号,既可以分析其频谱,也可以求其功率谱。那么,频谱和功率谱的根本区别在哪里呢?

信号的频谱只是将这个信号从“时域表示”转换成“频域表示”,是同一个信号的不同表现形式。而功率谱是从能量的观点对信号进行研究,对于功率有限信号,功率谱指的是信号在每个频率分量上的功率,反映了信号功率在频域的分布状况。从式(3-25)看出,功率谱只保留了频谱的幅度信息,而丢失了相位信息。所以,频谱不同的信号其功率谱有可能是相同的。

频谱是信号的各次谐波与频率的分布关系( $|F_n| \sim \omega$  和  $\varphi_n \sim \omega$ ),量纲就是信号  $f(t)$  的单位,假如  $f(t)$  是电压信号,通过傅里叶级数展开成正余弦分量,这些分量自然还是电压信号,振幅或幅度  $c_n$  的量纲是(V);而功率谱则是周期信号各次谐波的平均功率随频率的分布情况( $|F_n|^2 \sim \omega$ ),量纲是(W)。频谱和功率谱的关系归根结底还是信号和功率(能量)之间的关系。

### 3.6 有限项和均方误差

一般周期信号的傅里叶级数有无穷多项,即信号的频率成分有无穷多,但在实际工程中,往往截取其主要的频率成分,即用有限项代替无限项,这样做的结果必然产生误差。

$f(t)$  的傅里叶级数展开式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n)$$

如果用有限项(例如,前  $N+1$  项)来逼近原信号,前  $N+1$  项的傅里叶级数表示式为

$$s_N(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n)$$

用  $s_N(t)$  逼近  $f(t)$ ,引起的误差函数为

$$\epsilon_N(t) = f(t) - s_N(t) \quad (3-26)$$

则均方误差

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon_N^2(t)} &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} [f(t) - s_N(t)]^2 dt \\ &= \overline{f^2(t)} - \overline{s_N^2(t)} \\ &= \left[ c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2 \right] - \left[ c_0^2 + \sum_{n=1}^N (c_n/\sqrt{2})^2 \right] \end{aligned} \quad (3-27)$$

图 3-20 示出了对周期矩形脉冲信号只取有限项频率成分时的频谱图和时域波形图,随着所取频率成分的增多,波形越来越接近于原信号。

其中矩形方波信号(见图 3-20(a))的周期为  $T_1=1$ ,主周期为

$$f_1(t) = 2[u(t+1/4) - u(t-1/4)]$$

其傅里叶级数有无穷多项,展开式为

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t) - \frac{4}{3\pi} \cos(6\pi t) + \frac{4}{5\pi} \cos(10\pi t) - \frac{4}{7\pi} \cos(14\pi t) + \dots$$

该信号的基本频率为  $\omega_1=2\pi$ 。

直流分量加上基本分量(见图 3-20(b))

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t)$$

直流分量、基本分量、3 次谐波之和(见图 3-20(c))

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t) - \frac{4}{3\pi} \cos(6\pi t)$$

当进行前四项相加时,即由直流成分、基本分量、3 次谐波和 5 次谐波组成的信号为

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t) - \frac{4}{3\pi} \cos(6\pi t) + \frac{4}{5\pi} \cos(10\pi t)$$

见图 3-20(d)。

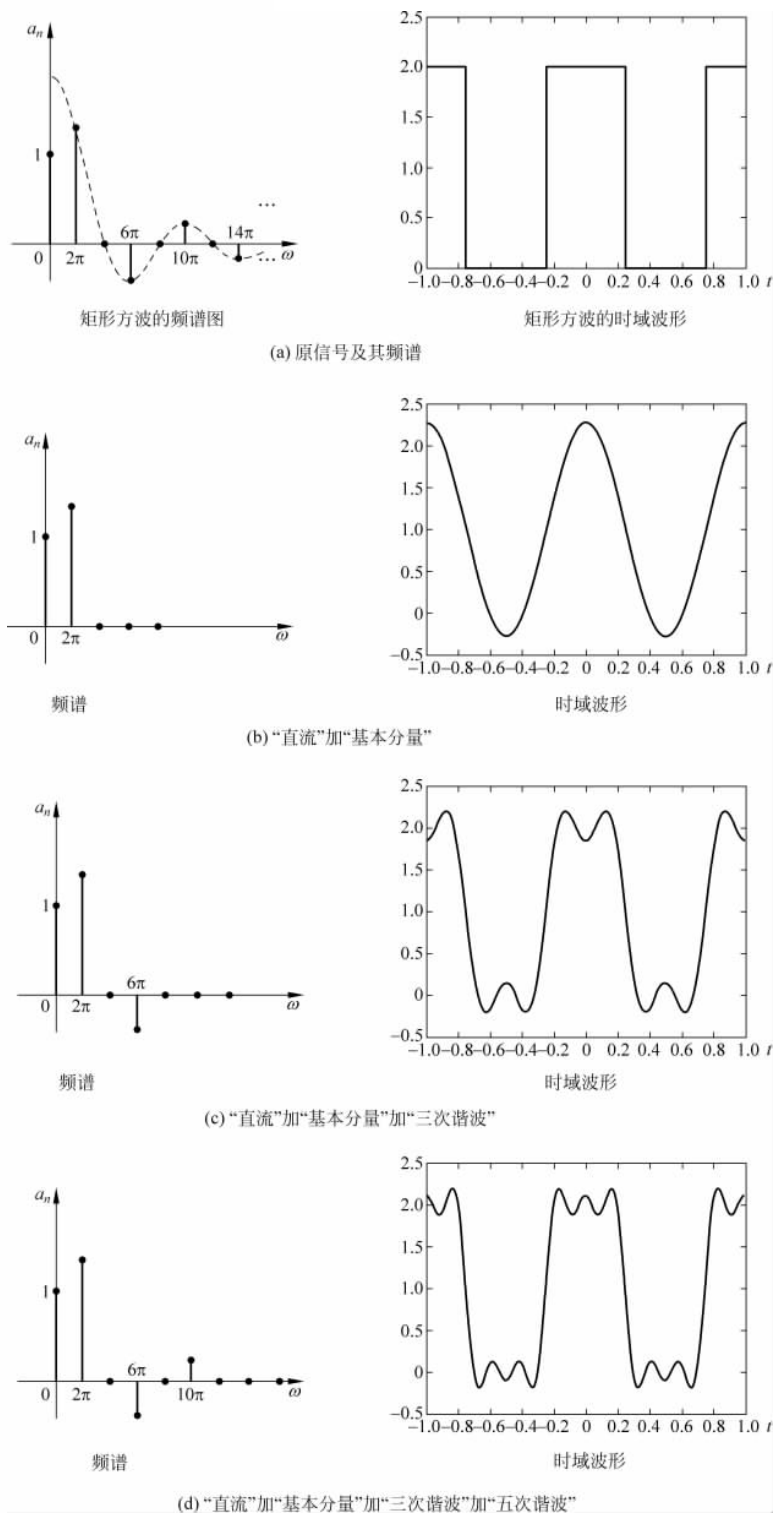


图 3-20 傅里叶级数的有限项

从傅里叶级数展开的角度来看,有限项傅里叶级数所取的项数越多,相加后的波形越接近于原来的信号。当  $f(t)$  为脉冲信号时,低频分量影响脉冲的顶部,而高频分量影响跳变沿。所取的项数越多,所含的高频谐波分量越多,合成后的波形越陡峭。这也印证了“时域波形变化越激烈,所含的高频分量越丰富”的观点。而且所取项数越多,顶部的波纹越小,波纹数越多,整体效果是顶部越近似“平坦”。

但是,对于有间断点的时间信号,当用有限项傅里叶级数逼近原信号时,虽然项数  $N$  越多顶部波纹越小越平滑,但在间断点处的第一个峰起值(“过冲”)的幅度却不会随着  $N$  的增大而减小或消失,如图 3-21 所示。这个峰起值是一个恒定值,约等于间断点处跳变值的 8.95%(证明见下一章)。即使  $N \rightarrow \infty$ ,无穷多项级数收敛于原信号,但是在间断点处却不收敛。事实上,当  $N \rightarrow \infty$  时,这 8.95% 的过冲也存在,这种现象称为吉布斯(Gibbs)现象,是为了纪念吉布斯(Josiah Gibbs)第一次用数学描述了这种现象。

对于有间断点的时间信号,虽然在数学上证明原信号和它的傅里叶级数表达式处处相等,但在间断点附近明显存在着过冲或波纹,所取的项数越多,波纹越紧密地集中在间断点附近。当  $N \rightarrow \infty$  时,峰起的波纹宽度趋于零,幅度恒定为 8.95%,由于零宽度的过冲不包含任何能量,所以,当  $N \rightarrow \infty$  时,傅里叶级数表示的信号功率收敛于原信号的功率。而且,当  $N \rightarrow \infty$  时,在任何时刻  $t$ ,傅里叶级数表示的函数值都趋近于原信号的值。它们在任意有限的时间间隔上有相同的能量,对任意物理系统的作用是一样的。

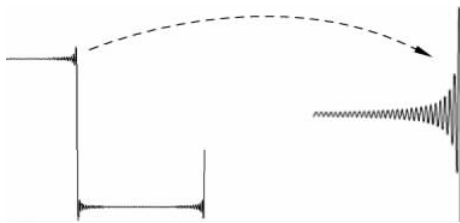


图 3-21 Gibbs 现象

另外,需要说明的是,在傅里叶级数的展开式中,如果任一频谱分量的幅度或相位发生相对变化,合成的波形一般会产生失真。

### 3.7 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶级数是一种很好的分析工具,但作用有限。它可以把工程中任何实用的有限时间信号和无限时间周期信号用一组成谐波关系的三角级数的线性组合来表示,但却不能描述非周期的无限时间信号。

本节将把傅里叶级数的思想应用于非周期信号,引出傅里叶变换。最终将发现,傅里叶级数其实只是傅里叶变换的一种特殊情况(只含有离散的频率分量)。

### 3.7.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

一个周期信号  $f_{T_1}(t)$  当其周期  $T_1 \rightarrow \infty$  时将变成非周期信号  $f(t)$ , 即

$$f(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} f_{T_1}(t) \quad (3-28)$$

在前面的傅里叶级数分析中已经知道, 周期信号的频谱  $F_n$  是一条条离散的谱线, 谱线间隔为  $\omega_1$ 。周期信号  $f_{T_1}(t)$  的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_{T_1}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-29)$$

当周期  $T_1$  增大时, 谱线间隔  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  将变小, 谱线将变密, 但频谱包络依然保持原来的包络形状(因为函数关系并没有改变)。当  $T_1 \rightarrow \infty$  时, 显然  $\omega_1 \rightarrow 0$ , 谱线间隔无限变小, 谱线连成一片,  $n\omega_1 \rightarrow \omega$ , 即离散变量  $n\omega_1$  趋于连续变量  $\omega$ 。但同时出现了另一个现象,  $F_n \rightarrow 0$ , 即谱线幅度将无限变小趋于零, 是信号在频域消失了吗? 当然不是, 根据 Parseval 能量守恒定理, 频域中依然具有能量。这该怎么理解呢?

对式(3-29)取极限

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_{T_1}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

考虑式(3-28), 有

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} (F_n \cdot T_1) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_{T_1}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

定义

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-30)$$

这就是著名的傅里叶正变换公式, 一般用符号  $\mathcal{F}[\ ]$  表示, 即

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

由傅里叶正变换公式可以求出非周期信号  $f(t)$  的每个连续频率分量。

**提示:** 在整个推导过程中, 周期  $T_1$  的作用相当玄妙。

我们已经知道, 傅里叶级数的系数  $F_n$  表示信号的频谱, 那么傅里叶变换  $F(\omega)$  具有什么含义呢?

根据公式

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} (F_n \cdot T_1) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{2\pi F_n}{\omega_1} = \lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{F_n}{f_1} \quad (3-31)$$

可知  $F(\omega)$  表示的是单位频带内的频谱, 即频谱密度的概念。因此,  $F(\omega)$  是  $f(t)$  的频谱密度函数或谱密度。

考虑到  $F_n$  的量纲是物理信号的单位, 如电压信号的频谱的单位是 V, 由于频率间隔  $f_1$  属于频率的范畴, 单位是 Hz, 因此, 电压信号的傅里叶变换  $F(\omega)$  的单位是 V/Hz。

根据傅里叶积分公式, 并不是所有的非周期信号都存在傅里叶变换。只有当  $f(t)$  满

足绝对可积条件时,傅里叶积分才收敛。即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3-32)$$

这是傅里叶变换存在的充分条件。虽然这是一个比较苛刻的条件,数学中有些信号无法满足,但工程中的大部分实际信号都满足这个条件,因此,傅里叶分析有非常实际的物理意义。而且,引入冲激函数后,可以对一些傅里叶积分不收敛的信号进行广义傅里叶变换。

将  $F(\omega)$  写成模和相位的形式

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-33)$$

$|F(\omega)|$  称为  $f(t)$  的幅度频谱密度函数,也简称幅度谱;  $\varphi(\omega)$  称为相位频谱密度函数,简称相位谱。

下面由傅里叶级数展开式推导傅里叶反变换的公式。

周期信号  $f_{T_1}(t)$  的傅里叶级数展开式

$$f_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

代入  $F_n$  的表达式,得

$$\begin{aligned} f_{T_1}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_{T_1}(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_{T_1}(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

当  $T_1 \rightarrow \infty$  时,  $f_{T_1}(t) \rightarrow f(t)$ , 而  $n\omega_1 \rightarrow \omega$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$ ,  $\omega_1 \rightarrow d\omega$ 。上式变为

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_1 t} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} \omega_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \omega_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-34)$$

这就是傅里叶反变换的公式,用符号表示为  $\mathcal{F}^{-1}[\ ]$ 。傅里叶反变换的公式表明非周期信号也可以进行频率分量的分解,只不过不再是分解成“成谐波关系的正弦信号的加权和”,而是分解成“频率连续变化的正弦函数的加权积分”。将  $f(t)$  的所有频率分量(无限精度)  $F(\omega)$  重新结合就可以还原出原信号  $f(t)$ 。

提示: 周期信号的傅里叶级数展开,得到了一系列离散的频率成分,它们是直流、基

波以及频率是基波频率整数倍的谐波,其频谱是离散的;而傅里叶变换也是寻找信号的频率成分,对于非周期信号,其频率成分是连续变化的,频谱密度将是连续曲线。

傅里叶变换是“从时域到频域”,而傅里叶反变换是“从频域到时域”。

### 3.7.2 典型信号的傅里叶变换

本节对一些典型信号求解傅里叶变换,画出频谱密度图,分析它们的频域特性,理解信号傅里叶变换的深层含义。

#### 1. 单边指数信号

单边指数信号的时域表达式

$$f(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

根据傅里叶变换公式

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned} \quad (3-35)$$

这是一个复数表达式,求其模和相位,得到幅度频谱密度函数和相位频谱密度函数

$$\begin{cases} |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\omega/a) \end{cases}$$

画出其幅度频谱密度和相位频谱密度,如图 3-22 所示。非周期信号的频谱密度是连续曲线。

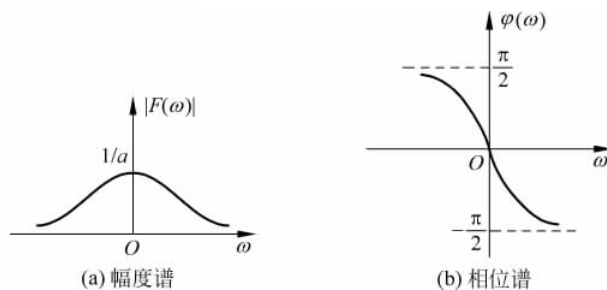


图 3-22 单边指数信号的频谱密度图

#### 2. 双边指数信号

双边指数信号的时域表达式

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

其傅里叶变换(频域表达式)为

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
 \end{aligned} \quad (3-36)$$

双边指数信号的傅里叶变换是一个正实数,因此

$$\begin{cases} |F(\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

其频谱密度如图 3-23 所示,由于是正实数,因此该图也是双边指数信号的幅度谱,相位谱为零。

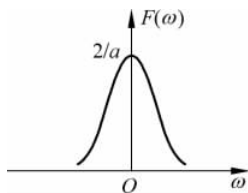


图 3-23 双边指数信号的频谱密度图

深入分析:

分别画出单边指数信号和双边指数信号的时域波形及其各自的幅度谱,如图 3-24 所示。

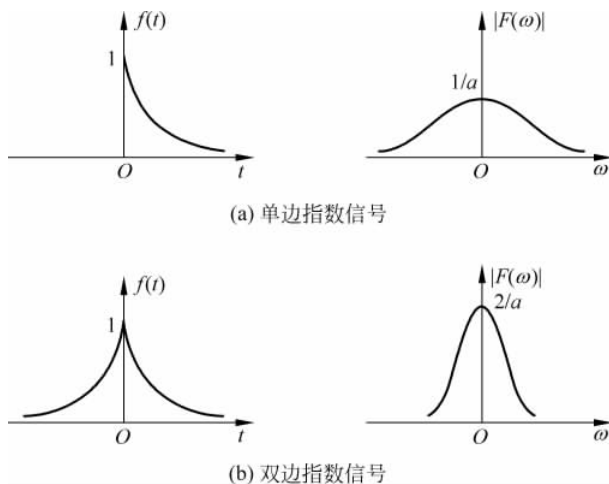


图 3-24 单边指数信号和双边指数信号的时域及频域图

通过对比不难发现信号的时域和频域之间内在的联系。首先分析单边指数信号和双边指数信号的直流成分,从它们的时间函数波形很容易看出,双边指数信号的均值是单边指数信号均值的 2 倍,即双边指数信号的直流分量等于单边指数信号的直流分量的 2 倍。这点可以从二者的幅度谱来验证,单边指数信号的零频(直流) $F(0)=1/a$ ,而双边

指数信号的零频(直流) $F(0)=2/a$ 。其次,观看它们的时间函数波形,单边指数信号变化更激烈(在 $t=0$ 有断点),而双边指数信号相对更平滑一些。相应地,单边指数信号的幅度谱按 $1/\omega$ 衰减;而双边指数信号的幅度谱按 $1/\omega^2$ 衰减,衰减得更快,表明双边指数信号的高频含量相对较少。也印证了“变化激烈的信号所含的高频成分更丰富”,而“变化缓慢(平滑)的信号含有更多的低频分量”的观点。

### 3. 矩形脉冲信号

这里所说的矩形脉冲实际上是门限信号,工程中有时将具有矩形波形的信号统称为方波。

矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-37)$$

矩形脉冲信号的傅里叶变换是抽样函数,如图 3-25 所示。

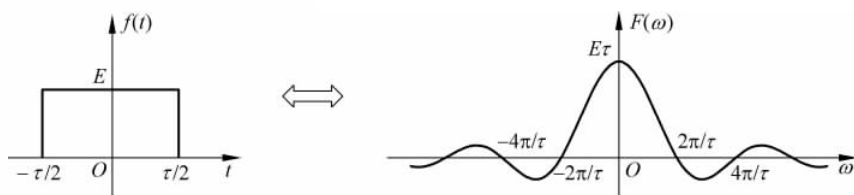


图 3-25 矩形脉冲信号的波形及其傅里叶变换

由于 $F(\omega)$ 是实函数,因此,幅度谱是 $F(\omega)$ 的绝对值,相位根据 $F(\omega)$ 的正或负取 $0$ 或 $\pm\pi$ 。

$$|F(\omega)| = \left| E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & F(\omega) > 0 \\ \pm\pi, & F(\omega) < 0 \end{cases}$$

图 3-26 示出其幅度谱和相位谱。

### 4. 钟形脉冲信号

钟形脉冲信号也称为高斯函数,时间函数表达式

$$f(t) = E e^{-(t/\tau)^2}$$

其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \sqrt{\pi} E\tau e^{-(\omega\tau/2)^2} \quad (3-38)$$

高斯函数的傅里叶变换依然是高斯的,如图 3-27 所示。高斯函数是速降函数。

$$\begin{cases} |F(\omega)| = \sqrt{\pi} E\tau e^{-(\omega\tau/2)^2} \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

一个有意思的情况是,如果令 $E=1, \tau=1/\sqrt{\pi}$ ,则

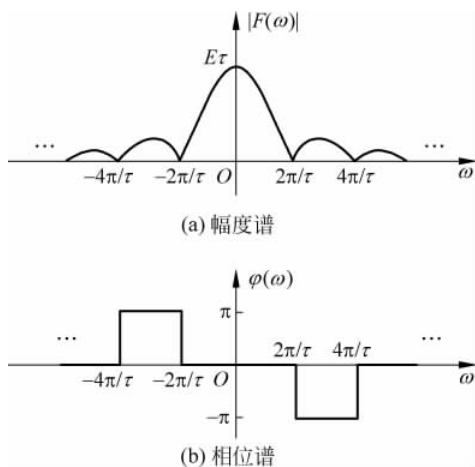


图 3-26 矩形脉冲信号的频谱密度

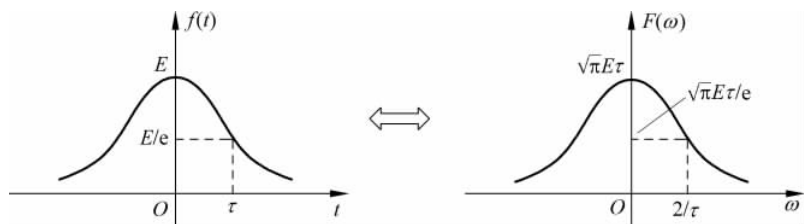


图 3-27 高斯信号及其频谱

$$\mathcal{F}[e^{-\pi t^2}] = e^{-\pi f^2} \quad (3-39)$$

上面四个信号既典型又实用,下面分析几个典型但特殊的信号,这些信号中有的不符合傅里叶积分的收敛条件,但引入冲激函数的概念后依然可以进行傅里叶分析。

### 5. 单位冲激信号

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

由于  $\delta(t) e^{-j\omega t} = \delta(t)$ , 故

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (3-40)$$

$\delta(t)$  的傅里叶变换是常数,说明它等量地含有所有的频率成分,频谱密度是均匀的,通常称为均匀谱,或白色谱,如图 3-28 所示。

单位冲激信号是变化最激烈的信号,其频宽无限大,即使无穷大频点依然具有恒定的频率成分。

### 6. 直流信号

直流信号不满足绝对可积条件,不能直接由傅里叶变换公式求得。为了对直流信号进行傅里叶分析,可借助于矩形信号,当矩形信号的脉宽取极限时就得到直流。因此,将

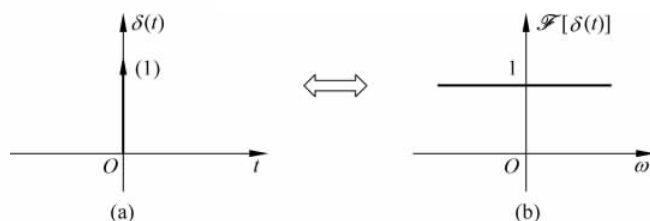


图 3-28 冲激信号及其频谱

矩形脉冲的傅里叶变换取极限,即可得到直流信号的傅里叶变换。

直流信号

$$f(t) = E$$

其傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[E] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-j\omega t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} E e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2E}{\omega} \sin(\omega\tau) = 2\pi E \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau}{\pi} \text{Sa}(\omega\tau) \right]\end{aligned}$$

根据式(2-26),可得

$$\mathcal{F}[E] = 2\pi E \delta(\omega) \quad (3-41)$$

直流信号的傅里叶变换是“零频”,这与实际是吻合的,如图 3-29 所示。

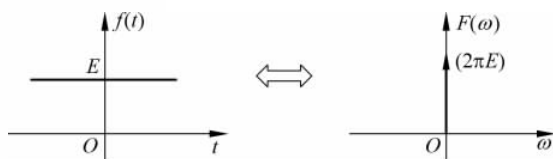


图 3-29 直流信号的傅里叶变换

令  $E=1$ , 有

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-42)$$

由式(3-42),显然下列式子成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-43)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad (3-44)$$

## 7. 符号函数

符号函数也不满足绝对可积条件,不能应用傅里叶积分公式进行求解。

将符号函数表示成如下的极限形式

$$\begin{aligned}f(t) = \text{sgn}(t) &= e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \Big|_{a \rightarrow 0} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \right] \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega}
 \end{aligned} \quad (3-45)$$

符号函数的傅里叶变换是一个纯虚数,其幅度谱和相位谱见图 3-30。

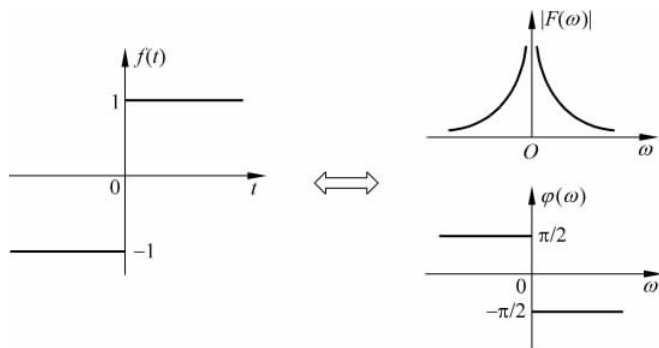


图 3-30 符号函数及其频谱图

### 8. 单位阶跃信号

单位阶跃信号可以表示成直流信号和符号函数相加,即

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

由直流信号和符号函数的傅里叶变换可得

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-46)$$

单位阶跃信号的波形及幅度频谱如图 3-31 所示。

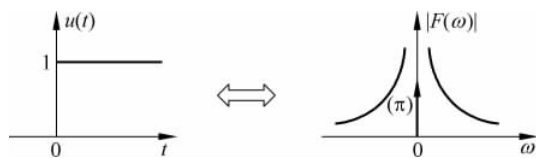


图 3-31 单位阶跃信号的波形及其幅度频谱

**想一想:** 符号函数和阶跃信号的傅里叶变换的差异在哪里? 为什么会有这种差异?

### 3.7.3 傅里叶变换的性质

通过傅里叶变换,一个时间信号  $f(t)$  可以表示成频谱密度函数  $F(\omega)$ , 同样利用傅里叶反变换可以由  $F(\omega)$  唯一求得  $f(t)$ , 因此傅里叶分析建立了时域和频域之间的联系。为了更进一步了解时域和频域之间的内在联系, 简化运算, 便于应用傅里叶变换分析问题, 本

节介绍傅里叶变换的性质,分析信号在一个域中的变化在另一个域中会有怎样的表现。

### 1. 线性

傅里叶变换是线性变换,满足线性关系。

若  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ ,  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \quad (3-47)$$

**【例题 3.13】** 求图 3-32 所示信号的傅里叶变换。

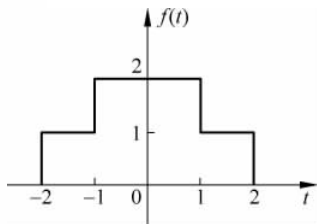


图 3-32 例题 3.13 图

**解:**  $f(t)$  可以看成两个矩形脉冲的叠加

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

其中,

$$f_1(t) = u(t+1) - u(t-1), \quad \mathcal{F}[f_1(t)] = 2\text{Sa}(\omega)$$

$$f_2(t) = u(t+2) - u(t-2), \quad \mathcal{F}[f_2(t)] = 4\text{Sa}(2\omega)$$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)] \\ &= \mathcal{F}[f_1(t)] + \mathcal{F}[f_2(t)] = 2\text{Sa}(\omega) + 4\text{Sa}(2\omega) \end{aligned}$$

### 2. 对偶性

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (3-48)$$

这个性质之所以存在,源于连续时间信号的傅里叶变换和反变换的定义式非常相近,仅仅是  $e$  的指数符号和积分变量名不同。

**证明:**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

则

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将变量  $t$  和  $\omega$  互换符号,得到

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

等号右端的积分就是  $F(t)$  的傅里叶变换,故

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(t)]$$

即

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

这就是傅里叶变换的对偶性质,表明了信号的时域和频域之间的对称关系。从数学上看,对偶性相当于对一个函数进行傅里叶积分后再傅里叶积分一次,结果等于原函数的转置乘以  $2\pi$ 。

当  $f(t)$  是偶函数时,有

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(\omega)$$

利用对偶性可以简化傅里叶变换的分析计算。

例如,  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ , 则  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 。

这比直接用傅里叶积分求解简单得多。

下面例举第二个利用对偶性简化分析的信号——矩形脉冲和抽样函数的傅里叶变换。

前面已经知道,矩形脉冲信号的傅里叶变换是抽样函数,那么根据对偶性,抽样函数的傅里叶变换一定是矩形函数形式,如图 3-33 所示。

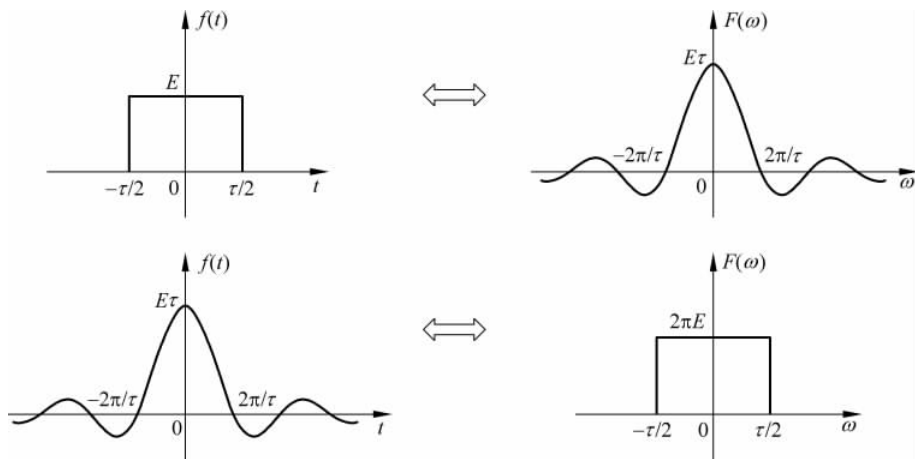


图 3-33 矩形脉冲和抽样函数的傅里叶变换对

写出数学表达式,矩形信号

$$f(t) = E[u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)]$$

其傅里叶变换

$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

根据对偶性,如果时间信号

$$f(t) = E\tau \text{Sa}(t\tau/2)$$

则其傅里叶变换必为

$$F(\omega) = 2\pi E[u(\omega + \tau/2) - u(\omega - \tau/2)]$$

**诀窍：**

关于矩形信号和抽样信号之间的傅里叶变换对的计算问题,有一些规律性的技巧,无须进行繁琐的积分计算或者记忆公式。下面以一道例题来说明。

**【例题 3.14】** 求  $\text{Sa}(t)$  的傅里叶变换。

**解：** 根据对偶性,  $\text{Sa}(t)$  的傅里叶变换是矩形函数,下面应用两个公式来确定关键点的坐标。

傅里叶变换和傅里叶反变换公式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

分别令  $\omega=0$  和  $t=0$ , 有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (3-49)$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega \quad (3-50)$$

式(3-49)是傅里叶正变换在  $\omega=0$  的公式,由此求得的  $F(0)$  是信号  $f(t)$  的直流成分——零频; 式(3-50)是傅里叶反变换在  $t=0$  的公式,由此求得的  $f(0)$  是时间信号在零时刻的值。

据此关系可以确定抽样信号傅里叶变换中矩形的坐标值,如图 3-34 所示。

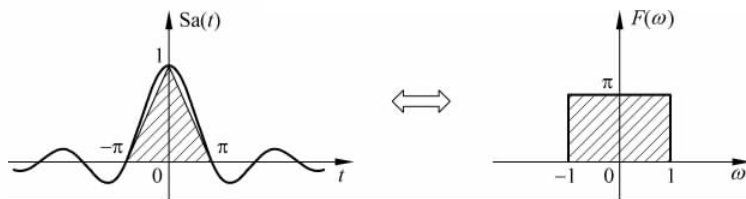


图 3-34 例题 3.14 抽样函数的傅里叶变换求解

由图 3-34 直接写出  $\text{Sa}(t)$  的傅里叶变换的表达式

$$\mathcal{F}[\text{Sa}(t)] = \pi[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)]$$

对于矩形脉冲信号的傅里叶变换,也可先直接画出其傅里叶变换的图形,再写出数学表达式。

**【例题 3.15】** 求  $f(t)=1/t$  的傅里叶变换,并画出其幅度谱和相位谱。

**解：**

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$$

根据对偶性,有

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{jt}\right] = 2\pi \text{sgn}(-\omega) = -2\pi \text{sgn}(\omega)$$

故

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi \operatorname{sgn}(\omega) = \pi e^{-j\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega)}$$

画出其幅度谱和相位谱,如图 3-35 所示。

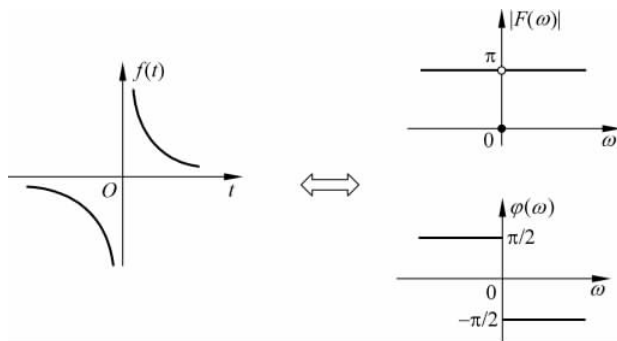


图 3-35 例题 3.15 图

一般来讲,时限信号的频谱是无限宽度的( $-\infty < \omega < +\infty$ ),由傅里叶变换的对偶性,频带有限的信号其时域一定是无限持续时间( $-\infty < t < +\infty$ )。

### 3. 共轭对称性

对于实信号  $f(t)$ ,其傅里叶变换满足共轭对称性。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right]^*$$

即

$$F(\omega) = F^*(-\omega) \quad (3-51)$$

同样,若时间函数是共轭对称的,即  $f(t) = f^*(-t)$ ,则其傅里叶变换必为实函数。也就是说,如果函数在一个域(时间或频率)中是共轭对称的,则在另一个域中为实数。

对于实信号,将式(3-51)表示成实部和虚部

$$\operatorname{Re} F(\omega) + j\operatorname{Im} F(\omega) = \operatorname{Re} F(-\omega) - j\operatorname{Im} F(-\omega)$$

则有

$$\begin{cases} \operatorname{Re} F(\omega) = \operatorname{Re} F(-\omega) \\ \operatorname{Im} F(\omega) = -\operatorname{Im} F(-\omega) \end{cases} \quad (3-52)$$

以及

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} F(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} F(j\omega)]^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} F(\omega)}{\operatorname{Re} F(\omega)} \end{cases} \quad (3-53)$$

由此看出,实信号傅里叶变换满足某种对称性,具体来说,实部满足偶对称,虚部满足奇对称;模满足偶对称,相位满足奇对称。

由实信号的傅里叶变换的共轭对称性,可以简化一些具有某种对称性的信号的傅里

叶变换表达式。

(1) 如果  $f(t)$  是  $t$  的实函数、偶函数, 则

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \operatorname{Re} F(\omega) \end{aligned} \quad (3-54)$$

实偶信号的傅里叶变换  $F(\omega)$  是  $\omega$  的实函数、偶函数, 相位为 0 或  $\pm\pi$ 。例如, 单位冲激信号、矩形脉冲、抽样函数都是实偶函数, 它们的傅里叶变换都是实偶的。

(2) 如果  $f(t)$  是  $t$  的实函数、奇函数, 则

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = -j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = j \operatorname{Im} F(\omega) \quad (3-55)$$

实奇信号的傅里叶变换  $F(\omega)$  是  $\omega$  的虚函数、奇函数, 相位为  $\pm\pi/2$ 。例如, 符号函数和例题 3.15 中的信号都是实奇函数, 它们的傅里叶变换都是纯虚数且奇对称。

(3) 对信号进行奇偶分量分解

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

根据前面的对称性分析, 可得

$$\begin{cases} \mathcal{F}[f_e(t)] = \operatorname{Re} F(\omega) \\ \mathcal{F}[f_o(t)] = j \operatorname{Im} F(\omega) \end{cases} \quad (3-56)$$

即一个信号的偶分量的傅里叶变换对应其傅里叶变换的实部, 奇分量的傅里叶变换对应其傅里叶变换的虚部。

这可以用一个例子来验证, 例如,  $u(t)$  的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

将  $u(t)$  分解成奇偶分量

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

奇偶分量与傅里叶变换的实虚部之间的对应关系一目了然。

#### 4. 展缩性质

这个性质指的是时间信号被压缩或扩展后, 其傅里叶变换的频谱将扩展或压缩。

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-57)$$

当  $a > 1$  时, 时域压缩, 频域将扩展; 当  $0 < a < 1$  时, 时域扩展, 频域将压缩; 当  $a = -1$  时, 时域翻折, 频域也翻折。展缩性质再一次体现了时域和频域之间相反的关系。

证明: 当  $a > 0$  时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当  $a < 0$  时的证明(略)。

下面以矩形脉冲为例说明展缩性质,如图 3-36 所示。

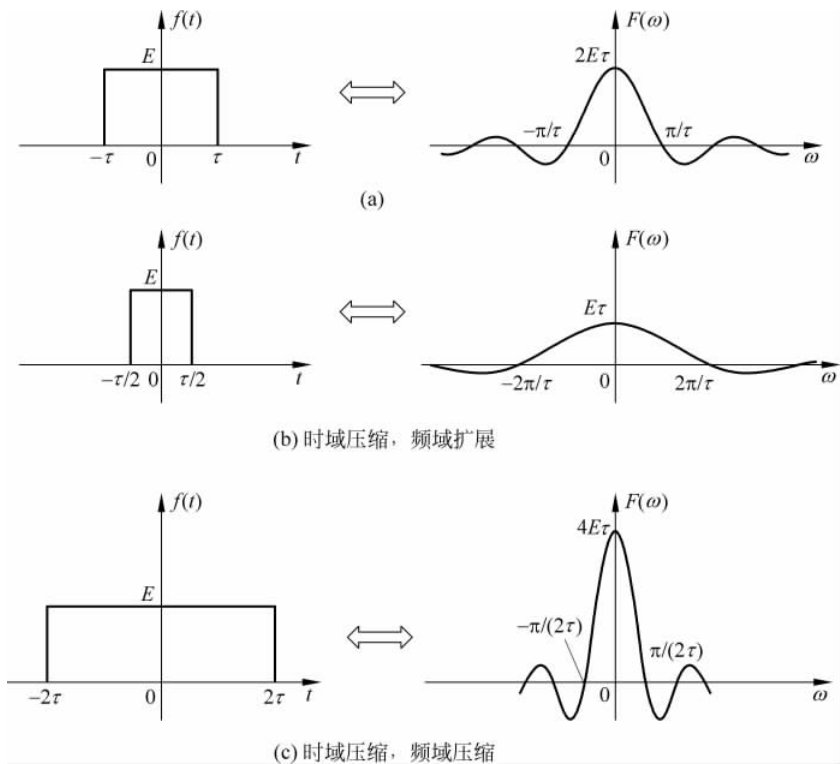


图 3-36 展缩性质

展缩性质在实际中的应用非常多,如声音的录制和播放。如果正常录制后快放,相当于时域压缩,其频域将扩展,额外增加了高频成分,声音听起来尖锐而急促。又如高速通信,每个码所占的时宽很窄,其频带必定很宽,占据带宽很大。

### 5. 时移特性

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \quad (3-58)$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

信号时域位移后其幅度谱并没有改变,改变的是相位谱。因此,“时域位移”导致“频

域相移”。当  $t_0 > 0$ , 时域延时, 频域中的相位有一个  $(-\omega t_0)$  的增量。在实际系统中, 延时是物理存在的, 因此在频域中往往体现在信号负相位的增量。

**【例题 3.16】** 求  $\delta(t-\tau)$  的傅里叶变换。

**解:** 由  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ , 得

$$\mathcal{F}[\delta(t-\tau)] = e^{-j\omega\tau} \quad (3-59)$$

$\delta(t-\tau)$  的频谱密度的幅度为 1; 相位为  $-\omega\tau$ , 是  $\omega$  的线性函数。当  $\tau > 0$  时, 实际上这是理想延时器的频谱特性。理想延时器的单位冲激响应及其频谱密度如图 3-37 所示。

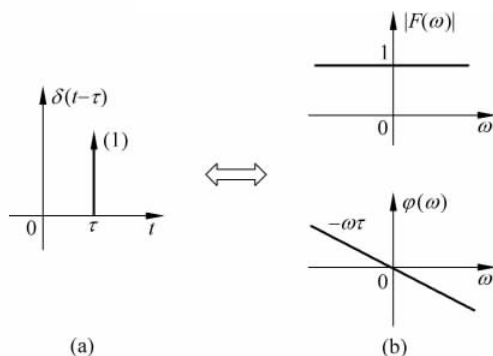


图 3-37 理想延时器的单位冲激响应及其频谱密度

**【例题 3.17】** 已知  $F(\omega) = \cos(\omega)$ , 求对应的时间函数  $f(t)$ 。

**解:** 如果直接利用傅里叶反变换公式求解, 需要做一个并不简单的积分运算。下面利用性质求解, 由欧拉公式

$$F(\omega) = \cos(\omega) = \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})$$

根据时移性质, 或者参考例题 3.16, 得

$$f(t) = \frac{1}{2}[\delta(t+1) + \delta(t-1)]$$

综合展缩性质和位移性质, 有

$$\mathcal{F}[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega}{a}t_0} \quad (3-60)$$

## 6. 频移特性

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0) \quad (3-61)$$

**证明:**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

$f(t)e^{j\omega_0 t}$  的傅里叶变换与  $f(t)$  的傅里叶变换函数形式相同, 仅仅位移了  $\omega_0$ 。

同样,

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$$

实际上,  $f(t)e^{j\omega_0 t}$  这种运算是通信早期的一种调制方式, 其频谱密度作位移运算, 称为频谱搬移。通常将  $f(t)e^{j\omega_0 t}$  称为复调制, 一般实际中是  $f(t)\cos(\omega_0 t)$  或  $f(t)\sin(\omega_0 t)$ , 在通信中将  $\cos(\omega_0 t)$  或  $\sin(\omega_0 t)$  称为载波。利用欧拉公式以及频移特性, 可以求出  $f(t)\cos(\omega_0 t)$  或  $f(t)\sin(\omega_0 t)$  的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (3-62)$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin(\omega_0 t)] = \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)] \quad (3-63)$$

**【例题 3.18】** 信号  $f(t)$  是一个矩形脉冲, 通过乘法器与  $\cos(\omega_0 t)$  相乘, 如图 3-38 所示。画出输出信号的频谱图。

解:  $f(t)$  的傅里叶变换是抽样函数

$$\mathcal{F}[f(t)] = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)] &= \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{\tau}{2}\text{Sa}[(\omega - \omega_0)\tau/2] + \frac{\tau}{2}\text{Sa}[(\omega + \omega_0)\tau/2] \end{aligned}$$

图解过程见图 3-38, 调制后的频谱图形与原信号的频谱图形一样, 仅仅向左和向右搬移了  $\omega_0$ , 幅度变为原来的一半。

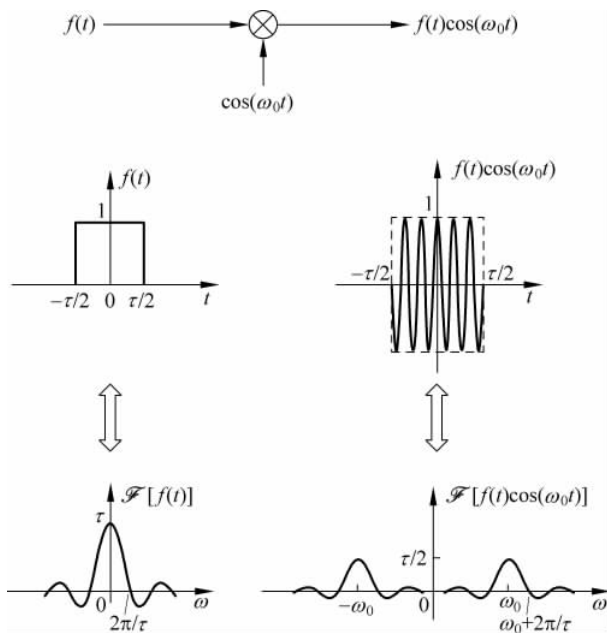


图 3-38 频谱搬移

**【例题 3.19】** 求  $e^{j\omega_1 t}$  的傅里叶变换。

解：利用典型信号的傅里叶变换和傅里叶变换的性质求解，考虑

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_1 t}] = F(\omega - \omega_1)$$

将  $e^{j\omega_1 t}$  看成  $1 \cdot e^{j\omega_1 t}$ ，故

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) \quad (3-64)$$

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_1) \quad (3-65)$$

## 7. 时域卷积定理

若  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ ,  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ ，则

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (3-66)$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} F_2(\omega) d\tau \\ &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \end{aligned}$$

提示：时域卷积定理简言之就是“时域卷积，频域相乘”，这是信号与系统分析中最重要的一个定理，它建立了时域分析和频域分析之间的联系，是非常有效的分析工具，可以简化傅里叶变换的数学运算，有时甚至是唯一有效的运算途径。除此之外，卷积定理也是系统频域分析的核心内容，是系统、输入信号以及输出信号三者之间在时域和频域之间的内在联系，也是第4章的核心内容之一。

**【例题 3.20】** 用时域卷积定理求三角脉冲(见图 3-39)的傅里叶变换。

解：三角脉冲可以表示为两个等宽矩形脉冲的卷积，矩形脉冲  $f_1(t)$  见图 3-40。

$$f(t) = f_1(t) * f_1(t)$$

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \sqrt{E\tau/2} \text{Sa}(\omega\tau/4)$$

故三角脉冲的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[f(t)] = \sqrt{E\tau/2} \text{Sa}(\omega\tau/4) \cdot \sqrt{E\tau/2} \text{Sa}(\omega\tau/4) = (E\tau/2) \text{Sa}^2(\omega\tau/4)$$

## 8. 频域卷积定理

若  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ ,  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ ，则

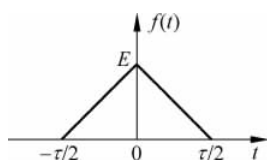


图 3-39 三角脉冲信号

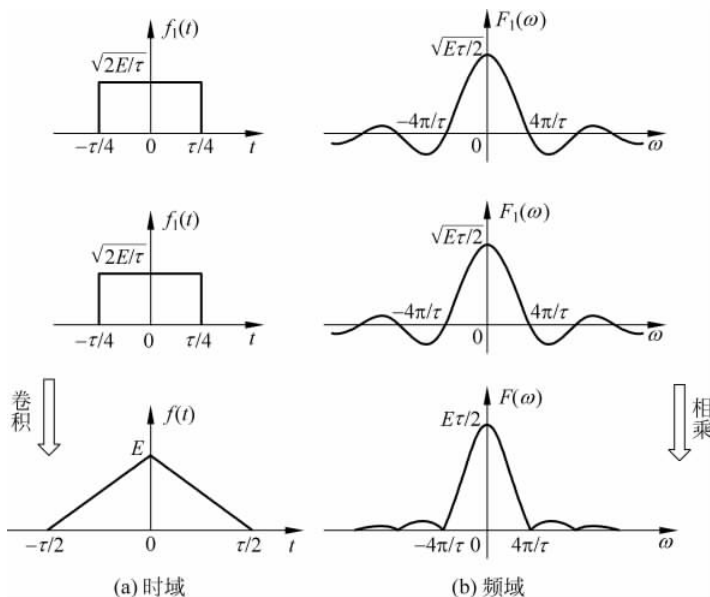


图 3-40 三角脉冲的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (3-67)$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) \cdot f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j(\omega - \Omega)t} dt \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\Omega) F_2(\omega - \Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \end{aligned}$$

频域卷积定理说明“时域相乘,频域卷积”,与时域卷积定理非常相似,这是傅里叶变换对偶性的又一表现。式(3-67)中的  $1/2\pi$  是因为频域采用了角频率  $\omega$  的缘故。

两个卷积定理告诉我们,信号在一个域的卷积运算,对应着另一个域的乘法运算,反之亦然。

### 9. 时域积分特性

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega) \quad (3-68)$$

证明:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * u(t)$$

根据时域卷积定理,有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[u(t)] \\ &= F(\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)\end{aligned}$$

#### 10. 时域微分特性

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega F(\omega) \quad (3-69)$$

证明: 傅里叶反变换公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两端对  $t$  求导

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega) F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

上式等号右端是傅里叶反变换的形式, 即  $\frac{d}{dt}f(t)$  是  $(j\omega)F(\omega)$  的傅里叶反变换, 因此

$$j\omega F(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$$

同样, 可得高阶微分的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (3-70)$$

**【例题 3.21】** 用微分性质求矩形脉冲的傅里叶变换。

解: 设矩形脉冲

$$f(t) = E[u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)]$$

其导数

$$f'(t) = E[\delta(t + \tau/2) - \delta(t - \tau/2)]$$

则

$$\mathcal{F}[f'(t)] = E(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = 2jE\sin(\omega\tau/2)$$

根据微分性质

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)$$

故

$$F(\omega) = \frac{\mathcal{F}[f'(t)]}{j\omega} = \frac{2jE\sin(\omega\tau/2)}{j\omega} = E\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

#### 11. 频域微分特性

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[-jtf(t)] = \frac{d}{d\omega}F(\omega) \quad (3-71)$$

证明：由傅里叶变换公式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

两端对  $\omega$  求导,得

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[-jtf(t)]$$

同样,频域高阶微分性质为

$$\mathcal{F}[(-jt)^n f(t)] = \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega) \quad (3-72)$$

**【例题 3.22】** 求  $f(t)=tu(t)$  的傅里叶变换,并求  $f(t)=|t|$  和  $f(t)=t$  的傅里叶变换。

解：根据微分性质

$$\mathcal{F}[-jtu(t)] = \frac{d}{d\omega}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \pi\delta'(\omega) + \frac{j}{\omega^2}$$

故

$$\mathcal{F}[tu(t)] = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

将  $f(t)=tu(t)$  进行奇偶分量分解,有

$$f_e(t) = |t|/2, \quad f_o(t) = t/2$$

根据实信号的奇偶性和傅里叶变换的虚实性的关系,得

$$\mathcal{F}[f_e(t)] = -1/\omega^2, \quad \mathcal{F}[f_o(t)] = j\pi\delta'(\omega)$$

故

$$\mathcal{F}[|t|] = -2/\omega^2$$

$$\mathcal{F}[t] = j2\pi\delta'(\omega)$$

实际上,  $f(t)=tu(t)$  不满足绝对可积条件,无法应用傅里叶积分公式求其傅里叶变换。

## 12. 因果信号的傅里叶变换

因果信号指的是当  $t < 0$  时  $f(t)=0$  的信号,即单边信号,因此有

$$f(t) = f(t)u(t)$$

上式两端求傅里叶变换,并应用傅里叶变换的频域卷积定理,有

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

将  $F(\omega)$  写成实部和虚部的形式

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

则

$$R(\omega) + jX(\omega) = \frac{1}{2\pi}[R(\omega) + jX(\omega)] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[R(\omega) + jX(\omega)] * \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}[R(\omega) + jX(\omega)] * \frac{1}{j\omega} \\
&= \frac{1}{2}[R(\omega) + jX(\omega)] + \frac{1}{2\pi}\left\{[R(\omega) * \frac{1}{j\omega}] + [jX(\omega) * \frac{1}{j\omega}]\right\}
\end{aligned}$$

整理得

$$R(\omega) + jX(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[X(\omega) * \frac{1}{\omega}\right] - j\frac{1}{\pi}\left[R(\omega) * \frac{1}{\omega}\right]$$

因此

$$\begin{cases} R(\omega) = X(\omega) * \frac{1}{\pi\omega} \\ X(\omega) = R(\omega) * \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right) \end{cases} \quad (3-73)$$

式(3-73)表明,因果信号傅里叶变换的实部由其虚部确定,虚部由其实部确定。即,因果信号的傅里叶变换的实部和虚部之间满足唯一互相被确定的关系,彼此之间互不独立,可以互算。也说明因果信号频谱的实部包含了其虚部的全部信息,反之亦然。

### 13. Parseval 定理

实信号  $f(t)$  的能量定义为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

这是时域的能量计算公式。下面推导信号  $f(t)$  在频域中的能量表示。

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

交换积分次序

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

因此,信号  $f(t)$  的能量

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3-74)$$

这就是 Parseval 定理,也称为能量守恒定理。时域中的能量等于频域中的能量,说明信号在进行傅里叶变换前后,其能量是守恒的。这也从另一个角度说明,信号的时域表示和它的频域表示所含的信息是相同的,只是同一个信号在两个不同域的表现形式而已。另外,式(3-74)也说明,信号的能量只与信号的幅度频谱密度  $|F(\omega)|$  有关,与相位频谱密度无关。

一般将  $|F(\omega)|^2$  称为信号  $f(t)$  的能量谱密度。

**【例题 3.23】** 用 Parseval 定理证明  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Sa}(\omega)|^2 d\omega = \pi$ 。

证明：设  $F(\omega) = \text{Sa}(\omega)$ ，则

$$f(t) = \frac{1}{2}[u(t+1) - u(t-1)]$$

由 Parseval 定理，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Sa}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = 2\pi[(1/2)^2 \cdot 2] = \pi$$

### 3.8 周期信号的傅里叶变换

前面分析了非周期信号的傅里叶变换，对于周期信号，不满足整个时间域内绝对可积的条件，但借助冲激函数，同样可以求其傅里叶变换，表示的是周期信号的频谱密度。

#### 3.8.1 典型周期信号的傅里叶变换

先从最简单的周期信号——正余弦信号开始，看看它们的傅里叶变换具有怎样的特点。

##### 1. 正弦信号的傅里叶变换

正弦信号是最简单的周期信号，根据欧拉公式

$$\cos(\omega_1 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})$$

$$\sin(\omega_1 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})$$

由式(3-64)和式(3-65)得

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega - \omega_1) + 2\pi\delta(\omega + \omega_1)]$$

即

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1) \quad (3-75)$$

$\cos(\omega_1 t)$  的频谱密度如图 3-41 所示。

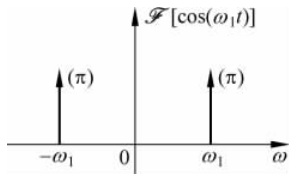


图 3-41  $\cos(\omega_1 t)$  的频谱密度

## 深入思考:

这个结果是不是很有意思呢?  $\cos(\omega_1 t)$  的频率成分当然是  $\omega_1$ , 从频谱图看出, 频谱成分仅仅位于  $\omega_1$  处(注意,  $-\omega_1$  是数学演算的结果, 代表的频率成分也是  $\omega_1$ )。另外, 正弦信号的傅里叶变换为什么是  $\delta$  函数呢? 这里先分析  $\cos(\omega_1 t)$  的频谱, 即  $\cos(\omega_1 t)$  的傅里叶级数的系数。直观地看,  $f(t) = \cos(\omega_1 t)$  的频谱为

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或者考虑指数形式的频谱

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})$$

即

$$F_n = \begin{cases} 1/2, & n = \pm 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\cos(\omega_1 t)$  的频谱如图 3-42 所示。

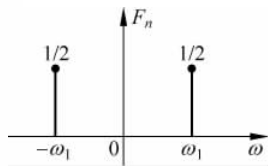


图 3-42  $\cos(\omega_1 t)$  的频谱

傅里叶变换是频谱密度的概念, 是单位频带的频谱, 即

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi F_n}{\omega}$$

这下能理解  $\cos(\omega_1 t)$  的傅里叶变换是  $\delta$  函数了吧。

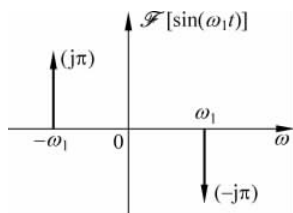
同样可以得到正弦函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(\omega_1 t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})\right] \\ &= \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega - \omega_1) - 2\pi\delta(\omega + \omega_1)] \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_1 t)] = -j\pi\delta(\omega - \omega_1) + j\pi\delta(\omega + \omega_1) \quad (3-76)$$

正弦函数的傅里叶变换也是  $\pm\omega_1$  处的  $\delta$  函数, 如图 3-43 所示。与余弦函数相比, 二者幅频特性一样, 相频特性是相位相差  $-\pi/2$ 。其实, 数学上正弦函数与余弦函数的相角相差就是一  $\pi/2$ , 这也说明正弦函数和余弦函数是正交的。

图 3-43  $\sin(\omega_1 t)$  的频谱密度

## 2. 周期性冲激信号的傅里叶变换

周期性冲激信号不满足绝对可积的条件,也不能由傅里叶变换的积分公式直接求解。首先将其展开成傅里叶级数

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1 t}$$

两端进行傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\delta_{T_1}(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1 t}\right] = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}] = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_1)$$

故

$$\mathcal{F}[\delta_{T_1}(t)] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3-77)$$

可见周期性冲激信号的傅里叶变换是位于谐波点  $n\omega_1$  处的一系列冲激,其频率成分是谐波成分  $n\omega_1$ ,其频谱密度如图 3-44 所示。

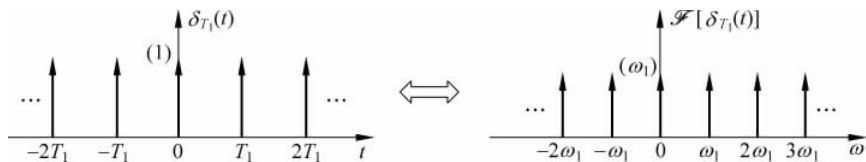


图 3-44 周期性冲激信号及其频谱密度

## 3.8.2 一般周期信号的傅里叶变换

不论是单频率的正弦信号,还是频率成分最丰富的周期性冲激信号,它们的傅里叶变换都是冲激函数。下面分析一般周期信号的傅里叶变换,分别从主周期信号的傅里叶变换和周期信号的傅里叶级数的系数出发,推导出一般周期信号的傅里叶变换公式。

### 1. 用主周期信号的傅里叶变换表示

周期信号可以表示成主周期信号与冲激串的卷积,即

$$f_{T_1}(t) = f_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] &= \mathcal{F}\left[f_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)\right] \\ &= \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)\right] \\ &= F_1(\omega) \left[\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)\right]\end{aligned}$$

故

$$\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_1 F_1(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3-78)$$

一般周期信号的傅里叶变换是一系列在谐波频率点上的冲激,冲激的强度为  $\omega_1 F_1(n\omega_1) = \omega_1 F_1(\omega) \big|_{\omega=n\omega_1}$ ,按照单周期信号傅里叶变换的  $\omega_1$  倍的包络变化,其频谱密度如图 3-45 所示。

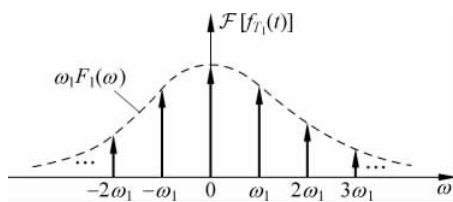


图 3-45 一般周期信号的频谱密度

## 2. 由周期信号的傅里叶级数的系数表示傅里叶变换

将周期信号展开成傅里叶级数

$$f_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

两端求傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n [2\pi \delta(\omega - n\omega_1)]\end{aligned}$$

故

$$\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3-79)$$

式(3-79)说明周期信号的傅里叶变换是由一串在谐波频率( $n\omega_1$ )点上的冲激函数组成,其强度等于傅里叶级数系数的  $2\pi$  倍,即  $2\pi F_n$ 。

因此,周期信号的傅里叶变换是一系列冲激函数,这些冲激函数位于谐波频率( $n\omega_1$ )处,其强度等于  $\omega_1 F_1(\omega)|_{\omega=n\omega_1}$  或  $2\pi F_n$ ,而二者应该相等,故有

$$\omega_1 F_1(\omega)|_{\omega=n\omega_1} = 2\pi F_n$$

由此得出周期信号傅里叶级数系数的另一个计算公式

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega)|_{\omega=n\omega_1} \quad (3-80)$$

即,周期信号傅里叶级数的系数可以由单周期的傅里叶变换在谐波频率点上取值除以周期得到。当然,式(3-80)也印证了傅里叶级数的系数公式和傅里叶变换公式之间的关系。

**【例题 3.24】** 矩形脉冲信号  $f_1(t)$  如图 3-46 所示。

(1) 求  $f_1(t)$  的傅里叶变换并画出其频谱。

(2) 如果将  $f_1(t)$  以  $T_1=4$  为周期进行周期延拓得到周期信号  $f(t)$ ,求  $f(t)$  的傅里叶级数展开式,并画出周期信号  $f(t)$  的频谱图。

(3) 求周期信号  $f(t)$  的傅里叶变换,画出频谱密度图。

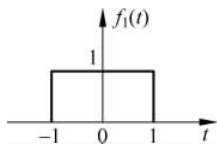


图 3-46 矩形脉冲信号

解:

(1)  $f_1(t)$  的傅里叶变换

$$F_1(\omega) = 2\text{Sa}(\omega)$$

(2) 周期信号  $f(t)$  的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega)|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{2} \text{Sa}(n\omega_1)$$

其中,  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{2}$ 。

则  $f(t)$  的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

## (3) 周期信号的傅里叶变换

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \text{Sa}(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

图 3-47 分别画出了矩形脉冲信号  $f_1(t)$  的频谱密度、周期信号  $f(t)$  的频谱图和频谱密度图。

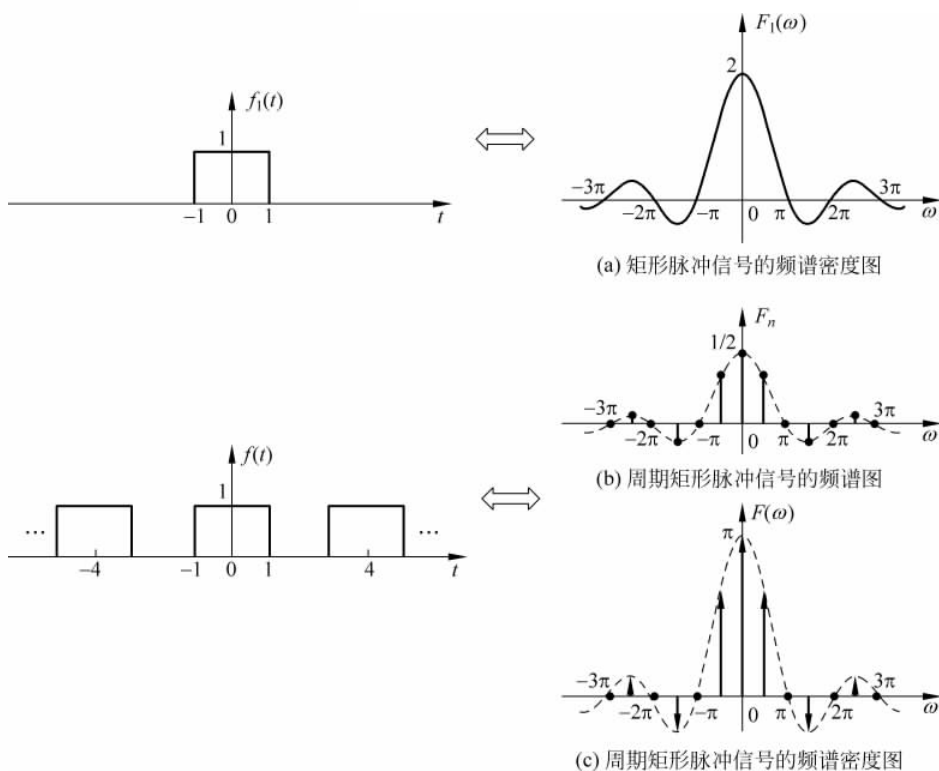


图 3-47 例题 3.24 图

周期信号的频谱指的是傅里叶级数的系数,而周期信号的频谱密度指的是傅里叶变换。二者相同点是“时域周期,频域离散”。不同的是,周期信号的傅里叶级数系数是有限值,反映的是频谱的概念;而周期信号的傅里叶变换是冲激函数,不是有限值,反映的是频谱密度(单位频带内的频谱)的概念。

## 本章结语

时域是真实世界,是唯一客观存在的域。频域是一个数学架构,虽然它不是真实的,但是频域中的频率却是一个物理量,因此,频域是有物理意义的。正弦信号是唯一同时存在于时域和频域中的信号,由它可以建立时域和频域之间的联系,这就是傅里叶分析。

本章在频域对信号进行分析。

如果知道时间信号,要分析它所含有的频谱成分,可以通过傅里叶积分求出其频谱或频谱密度,即对信号进行频谱分析。这个过程就是傅里叶级数的谱系数或傅里叶正变换。

傅里叶级数系数显示的是离散谐波,而傅里叶变换显示的是连续频率。二者都属于傅里叶分析,都将原来的时域信号变成另外一种形式(频域中的形式),但所包含的信息不变。

信号在频域中的表现形式就是信号的频谱(或频谱密度),频谱是信号的频域描述,频域中不可能产生新的信息,同一波形的时域或频域描述所含的信息完全相同。例如,信号幅度增加一倍,那么各个频率成分的幅度也增加一倍。

如果知道频谱,要想观察它的时域波形,只需将每个频率分量变换成它的时域正弦波,再将其全部叠加即可,这个过程就是傅里叶级数展开或傅里叶反变换,也称为信号的正交分解。

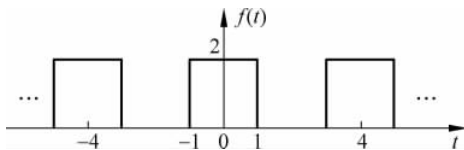
傅里叶级数和傅里叶变换的性质,进一步揭示了时域和频域之间的内在联系,可以简化运算,便于分析实际中的应用。

信号的频率特性除去频谱和频谱密度外,还有能量谱密度和功率谱密度,表示的是信号在频域中的能量或功率的概念。而 Parseval 定理是能量守恒定理,揭示了信号在时域中的能量或功率与其频域中的能量或功率是相等的。

总之,傅里叶分析建立了时域和频域之间的桥梁,可以分析在时域中难以解读的信号频域特征,揭示了信号的时间特性和频率特性之间的内在联系。

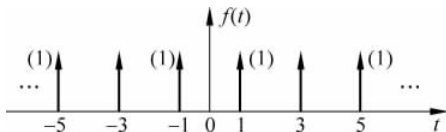
## 习题

3-1 求题图 3-1 所示周期信号的傅里叶级数,并画出其幅度频谱和相位频谱。



题图 3-1

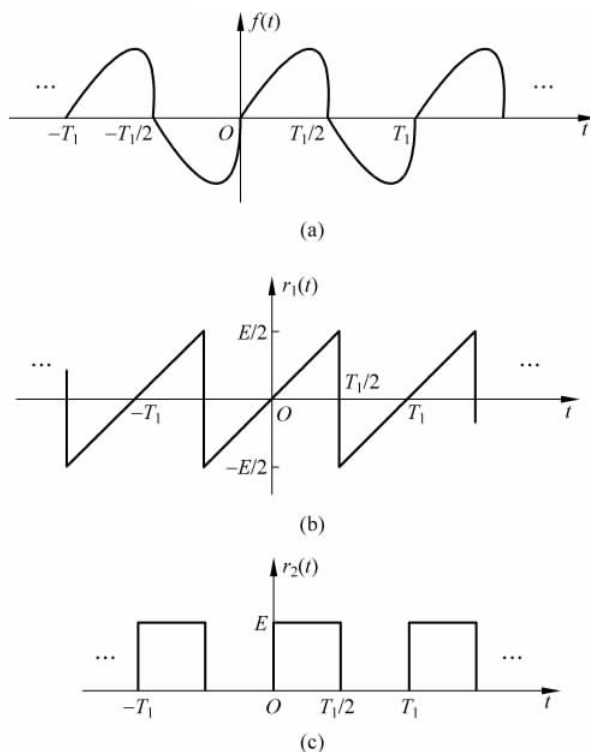
3-2 求题图 3-2 所示周期信号的傅里叶级数展开式,并画出其幅度频谱和相位频谱。



题图 3-2

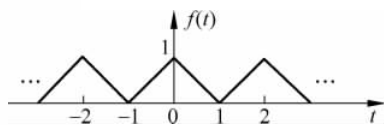
3-3 如果将题图 3-3(a)所示的  $f(t)$  作为输入信号通过一个 LTI 系统,分析能否产

生题图 3-3(b)所示的  $r_1(t)$  或题图 3-3(c)所示的  $r_2(t)$  的波形。



题图 3-3

3-4 求题图 3-4 所示周期信号的直流分量以及  $n=1\sim 5$  次谐波的有效值。



题图 3-4

3-5 一电压信号  $f(t)$  只含有三个频率成分的余弦分量:  $1\text{Hz}$ 、 $3\text{Hz}$ 、 $5\text{Hz}$ , 幅度分别为  $3\text{V}$ 、 $2\text{V}$ 、 $1\text{V}$ , 写出  $f(t)$  的表达式。

3-6 信号  $f(t) = 1 + \cos(18\pi t) + 0.5\cos(30\pi t)$ , 求信号  $f(t)$  的周期、频率分量, 画出频谱图。

3-7 画出下列信号的频谱图, 并应用 Parseval 定理求平均功率。

(1)  $f(t) = 1 + \cos(\pi t/6) - \cos(\pi t/3)$

(2)  $f(t) = \sin(t/3) + \cos(t/2)$

3-8 一周期信号  $f(t)$  只含有基波分量和 3 次谐波分量, 且已知  $|F_1| = 2$ ,  $|F_3| = 1/2$ ,  $\varphi_1 = -\pi/2$ ,  $\varphi_3 = \pi/2$ 。

(1) 画出该信号的指数形式的幅度频谱和相位频谱。

(2) 写出三角形式的傅里叶级数。

(3) 判断信号的对称性。

(4) 求信号的平均功率。

3-9 求下列信号的傅里叶变换,并画出其频谱密度图。

(1)  $f(t) = u(t+1) - u(t-1)$

(2)  $f(t) = u(t) - u(t-1)$

(3)  $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$

(4)  $f(t) = e^{-|t|}$

(5)  $f(t) = 1/(t^2+1)$

(6)  $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$

3-10 若已知  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , 利用傅里叶变换的性质求下列信号的傅里叶变换。

(1)  $f(2t-3)$

(2)  $f(1-t)$

(3)  $t \frac{df(t)}{dt}$

(4)  $f(t)e^{-j2t}$

(5)  $f^2(t)$

3-11 求下列  $F(\omega)$  的傅里叶反变换。

(1)  $F(\omega) = \cos(2\omega)$

(2)  $F(\omega) = u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)$

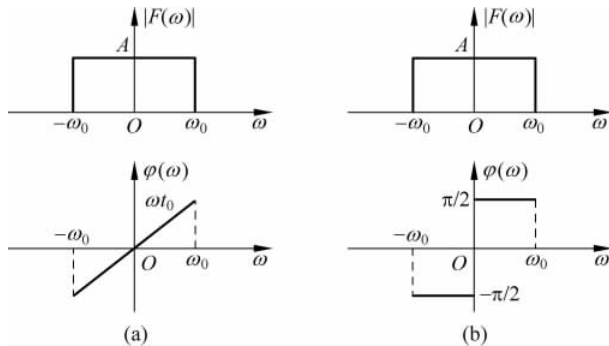
(3)  $F(\omega) = \text{Sa}(2\omega)$

(4)  $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} e^{-j\omega}$

(5)  $F(\omega) = \delta(\omega - 1)$

(6)  $F(\omega) = \omega$

3-12 求题图 3-12 所示  $F(\omega)$  的傅里叶反变换  $f(t)$ 。



题图 3-12

3-13 用傅里叶变换的性质求三角脉冲的傅里叶变换。

$$f(t) = E \left( 1 - \frac{2|t|}{\tau} \right) \left[ u \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - u \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

3-14 已知  $f_1(t) = e^{-at}u(t)$ , 且  $f_1(t) * f_2(t) = e^{-at}u(t) + e^{-bt}u(t)$ ,  $a > 0, b > 0$ , 利用傅里叶变换的性质求  $f_2(t)$ 。

3-15 应用 Parseval 定理求  $f(t) = \text{Sa}(2t)$  的能量。

3-16 信号  $f_1(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$ , 求  $f_1(t)$  的傅里叶变换, 画出其频谱密度图。如果将  $f_1(t)$  以  $T_1=2$  为周期进行周期延拓, 形成周期信号  $f(t)$ , 求周期信号  $f(t)$  的傅里叶级数和傅里叶变换, 画出  $f(t)$  的频谱图和频谱密度图。

3-17 信号  $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$ , 求下列各项:

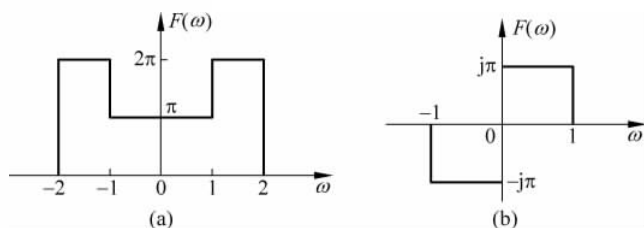
(1) 求  $f_1(t)$  的傅里叶变换  $F_1(\omega)$ 。

(2) 画出  $F_1(\omega)$  的幅度频谱和相位频谱图。

(3) 若  $f_1(t)$  以 4 为周期, 进行周期延拓, 形成一个周期信号  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(t+4k)$ , 求此周期信号的傅里叶级数展开式, 画出频谱图。

(4) 求  $f(t)$  的傅里叶变换, 画出频谱密度图。

3-18 对于题图 3-18 所示的傅里叶变换, 应用帕塞瓦尔定理求  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ 。



题图 3-18

3-19 证明  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$ 。