

# 第 **5** 章

## IIR数字滤波器设计

## 5.1 设计 IIR 数字滤波器的一般方法

设计 IIR 数字滤波器最流行的方法是：首先，设计一个频率归一化的模拟低通滤波器，称为原型滤波器 (the prototype filter)；然后，将原型滤波器变换成具有期望频率特性的数字滤波器。这种设计方法之所以广为流行，是因为模拟滤波器的设计技术已很成熟，有现成的计算公式、设计资料和算法程序可以利用。

### 5.1.1 设计 IIR 数字滤波器的两种方案

将原型滤波器变换成具有期望频率响应的数字滤波器，有如图 5-1 所示的两种方案。

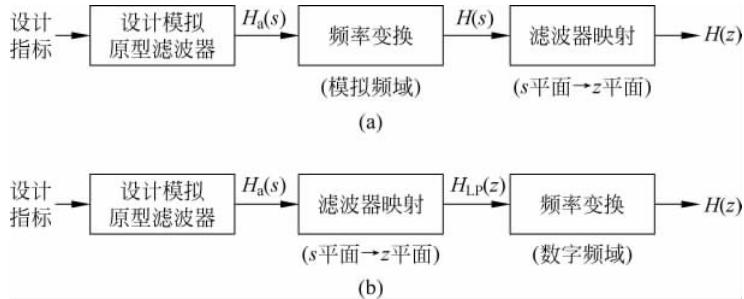


图 5-1 设计 IIR 数字滤波器的两种方案

原型滤波器设计完成后，得到一个频率归一化的模拟低通传输函数  $H_a(s)$ 。在图 5-1(a)所示的第一方案中，首先在模拟频域内进行频率变换，把  $H_a(s)$  变换成具有期望频率响应的模拟传输函数  $H(s)$ ，然后把  $H(s)$  从  $s$  平面映射到  $z$  平面，得到具有期望频率响应的数字滤波器的传输函数  $H(z)$ 。这个方案的缺点是从模拟频域转换成数字频域可能产生混叠失真，因此不能用冲激响应不变法来转换高通和带阻滤波器。在图 5-1(b)所示的第二方案中，首先进行  $s$  平面到  $z$  平面的映射，把  $H_a(s)$  映射成数字低通传输函数  $H_{LP}(z)$ ，然后在数字频域进行频率变换，把  $H_{LP}(z)$  变换成具有期望频率响应的数字滤波器  $H(z)$ 。

可以看出，两个方案使用的技术基本相同，区别在于：第一个方案先进行频率变换然后进行滤波器映射，频率变换在模拟频域进行；而第二个方案则先进行滤波器映射然后进行频率变换，频率变换在数字频域进行。

### 5.1.2 模拟低通滤波器的技术指标

设计 IIR 数字滤波器需要首先设计原型滤波器，原型滤波器是模拟低通滤波器，因此首先要把给定的 IIR 数字滤波器的技术指标转换成模拟低通滤波器的技术指标。模拟低通滤波器的技术指标常用图 5-2 所示的平方幅度响应定义。图中，模拟角频率  $\Omega$  以

rad/s 为单位,  $|H_a(j\Omega)|^2$  是幅度响应的平方, 它在通带和阻带内被限制在以下允许范围内

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\epsilon^2} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0 \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2}, & \Omega_s \leq \Omega < \infty \end{cases} \quad (5.1)$$

即通带内幅度响应的最大值归一化为 1, 通带和阻带波纹幅度分别用参数  $\epsilon$  和  $1/A$  控制。

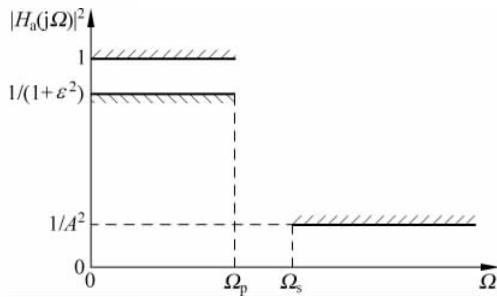


图 5-2 设计模拟低通滤波器的技术指标

如果 IIR 数字低通滤波器的技术指标由图 4-5 给出, 即

$$\begin{cases} 1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (5.2)$$

将式(5.2)与式(5.1)对照, 得出

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = 1 - \delta_p \quad \text{和} \quad \frac{1}{A} = \delta_s$$

即数字低通滤波器与等效的模拟低通滤波器线性波纹参数之间的关系是

$$\epsilon = [(1 - \delta_p)^{-2} - 1]^{1/2} \quad (5.3)$$

和

$$A = \delta_s^{-1} \quad (5.4)$$

如果 IIR 数字低通滤波器的技术指标由图 4-6 的对数参数给出, 即

$$A_p = -20\lg(1 - \delta_p) \text{ (dB)}$$

$$A_s = -20\lg(\delta_s) \text{ (dB)}$$

则由于  $(1 - \delta_p)^{-2} = 10^{0.1A_p}$  和  $\delta_s^{-2} = 10^{0.1A_s}$ , 所以由式(5.3)和式(5.4)得出数字低通滤波器与等效的模拟低通滤波器的对数参数之间的关系

$$\epsilon = [10^{0.1A_p} - 1]^{1/2} \quad (5.5)$$

和

$$A = \delta_s^{-1} = 10^{0.1A_s/2} \quad (5.6)$$

式中,  $A_p$  和  $A_s$  都以 dB 为单位。

为了简化设计公式, 引入以下两个辅助参数:

## (1) 选择性因子(the selectivity factor)

$$r \equiv \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad (5.7)$$

对于理想模拟低通滤波器,由于没有过渡带,即  $\Omega_p = \Omega_s$ ,所以  $r=1$ ;而对于实际(非理想)模拟低通滤波器,  $\Omega_p < \Omega_s$ ,所以  $r < 1$ 。

## (2) 鉴别因子(the discrimination factor)

$$d \equiv \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = \left[ \frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

当  $\delta_p=0$  或  $\delta_s=0$  时,  $d=0$ 。所以,理想模拟低通滤波器的鉴别因子  $d=0$ ,实际模拟低通滤波器的鉴别因子  $d>0$ 。

### 5.1.3 平方幅度响应与传输函数

模拟滤波器的设计指标由平方幅度响应给出,而平方幅度响应不包含相位信息,所以模拟滤波器仅根据幅度响应来设计。假设模拟滤波器的传输函数  $H_a(s)$  是实有理函数,且关于虚轴对称,则可将平方幅度响应表示为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega} \quad (5.9)$$

或

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=s/j} \quad (5.10)$$

这意味着,模拟滤波器的传输函数  $H_a(s)$  可以根据平方幅度响应来得到。式(5.10)是利用期望的幅度响应合成模拟滤波器的基本公式。

由于  $H_a(s)$  是实系数有理函数,从式(5.10)看出,若  $H_a(s)$  在  $s_i$  有一个极点或零点,则  $H_a(-s)$  必在  $-s_i$  也有一个极点或零点。因此,若  $H_a(s)$  的极点或零点位于负实轴上,则  $H_a(-s)$  的相应极点或零点必落在正实轴上;若  $H_a(s)$  的极点或零点位于  $-\sigma \pm j\Omega$ ,则  $H_a(-s)$  的相应极点或零点必位于  $\sigma \mp j\Omega$ ;虚轴上的极点或零点(即纯虚数极点或零点)必定是偶数阶的。总起来说,平方幅度响应的零点、极点关于  $s$  平面的虚轴  $j\Omega$  和实轴  $\sigma$  都成镜像对称分布(即象限对称),如图 5-3 所示。

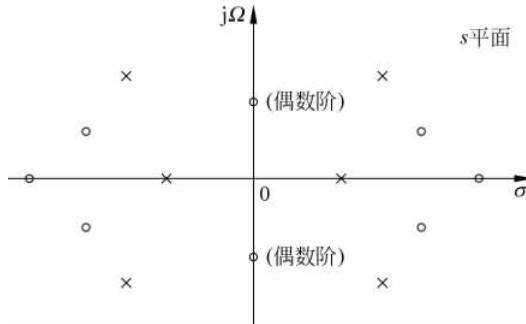


图 5-3 平方幅度函数的零点-极点分布

设计的模拟滤波器必须是因果和稳定的,即传输函数  $H_a(s)$  的极点必须全部在左半平面内,但不包含虚轴;这样,右半平面的全部极点属于  $H_a(-s)$ 。至于零点,它们可以分布在  $s$  平面上的任何位置,因为零点的任意组合都不会影响幅度响应;但是,零点分布将影响相位响应,例如,当  $H_a(s)$  的零点全部分布在左半平面时,得到的是最小相位滤波器。

由于  $s^2 = -\Omega^2$ , 所以式(5.10)又可表示成

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2} \quad (5.11)$$

即平方幅度响应  $|H_a(j\Omega)|^2$  是以  $\Omega^2$  为自变量的函数。由于已假设  $H_a(s)$  是有理函数,故可将  $|H_a(j\Omega)|^2$  表示成

$$|H_a(j\Omega)|^2 = K \frac{\sum_{k=0}^N c_k \Omega^{2k}}{\sum_{k=0}^N d_k \Omega^{2k}} \quad (5.12)$$

前面说过,  $H_a(s)H_a(-s)$  是象限对称的有理函数。如果进一步假设  $H_a(s)$  还是最小相位的,则  $s$  平面的左半平面内的零点和极点都属于  $H_a(s)$ ;虚轴上的任何零点都是偶次的,其中一半属于  $H_a(s)$ ;将幅度响应  $|H_a(j\Omega)|$  与传输函数  $H_a(s)$  的低频特性或高频特性进行对比,即可确定传输函数的增益常数  $K$ 。这样,根据所求出的零点、极点和增益常数,便可得到滤波器的传输函数  $H_a(s)$ 。

由以上讨论可知,根据平方幅度函数  $|H_a(j\Omega)|^2$  确定模拟滤波器的传输函数  $H_a(s)$ ,关键是需要知道式(5.12)的平方幅度函数  $|H_a(j\Omega)|^2$ 。一般来说,获取平方幅度函数的问题是一个没有唯一解的函数逼近问题。为了简化问题,常以归一化低通滤波器的函数逼近为基础,然后利用频率变换的方法,把归一化低通传输函数转换成所需要的(低通、高通、带通和带阻)传输函数。若将式(5.12)的分子多项式简化为常数,则得到最简单的低通平方幅度函数,即

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{d_0}{\sum_{k=0}^N d_k \Omega^{2k}} \quad (5.13)$$

这意味着所有零点集中在  $s=\infty$  处, 直流增益调整为 1。在高频端, 式(5.13)近似为

$$|H_a(j\Omega)|^2 \approx \frac{d_0/d_N}{\Omega^{2N}}, \quad \Omega \rightarrow \infty \quad (5.14)$$

这相当于每倍频程 6N dB 的衰减,这也是任何 N 阶低通滤波器在高频端的衰减速度。

**例 5.1** 已知平方幅度函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{25(4-\Omega^2)^2}{(9+\Omega^2)(16+\Omega^2)}$$

试确定模拟滤波器的传输函数  $H_a(s)$ 。

**解** 因为  $|H_a(j\Omega)|^2$  是  $\Omega^2$  的非负有理函数,且在  $j\Omega$  轴上的零点是偶数阶,所以满足平方幅度函数的条件。将  $\Omega^2 = -s^2$  代入, 得到

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{25(4+s^2)^2}{(9-s^2)(16-s^2)}$$

零点为  $s = \pm j2$ (2阶), 极点为  $s = \pm 3$  和  $s = \pm 4$ 。选出左半平面的两个极点  $s = -3$  和  $s = -4$ , 以及虚轴上的两个零点  $s = \pm j2$ (1阶)。根据条件

$$H_a(s)|_{s=0} = |H_a(j\Omega)||_{\Omega=0}$$

其中

$$\begin{aligned} H_a(s)|_{s=0} &= \frac{K(s^2 + 4)}{(s+3)(s+4)}|_{s=0} = \frac{K}{3} \\ |H_a(j\Omega)||_{\Omega=0} &= \left[ \frac{25(4-\Omega^2)^2}{(9+\Omega^2)(16+\Omega^2)} \right]^{\frac{1}{2}}|_{\Omega=0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

求出增益常数  $K=5$ 。用得到的极点、零点和增益常数构成模拟滤波器的传输函数, 得到

$$H_a(s) = 5 \frac{(s-2j)(s+2j)}{(s+3)(s+4)} = \frac{5s^2 + 20}{s^2 + 7s + 12}$$

## 5.2 常用的4种原型滤波器

设计IIR数字滤波器时, 常用4种模拟低通滤波器作为原型滤波器。它们是Butterworth滤波器、Chebyshev I型滤波器、Chebyshev II型滤波器和椭圆滤波器。Butterworth滤波器的幅度响应在通带和阻带内都是单调减少的; Chebyshev I型滤波器的幅度响应在通带内是等波纹的, 在阻带内是单调减少的; Chebyshev II型滤波器的幅度响应在通带内是单调减少的, 在阻带内是等波纹的; 椭圆滤波器在通带和阻带内都是等波纹的。

### 5.2.1 Butterworth滤波器

#### 1. Butterworth滤波器的平方幅度响应及其性质

Butterworth滤波器的平方幅度函数定义为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}} \quad (5.15)$$

式中,  $N$  是滤波器的阶。由于  $|H_a(j\Omega_c)|^2 = 0.5$ , 因此

$$20\lg|H_a(j\Omega_c)| = 10\lg 0.5 \approx -3\text{dB}$$

所以  $\Omega_c$  称为 3dB 截止频率或半功率点截止频率。 $\epsilon$  是控制通带波纹幅度的参数, 当  $\Omega = \Omega_p$  时,  $|H_a(j\Omega)|^2 = 1/(1+\epsilon^2)$ 。图 5-4 是不同阶数的 Butterworth 滤波器的平方幅度函数。用 Butterworth 平方幅度函数逼近模拟低通滤波器时, 常选择  $\Omega_c = 1\text{rad/s}$  对频率归一化, 这样得到的滤波器称为 Butterworth 模拟低通原型滤波器。

从图 5-4 看出, Butterworth 滤波器的幅度响应在通带和阻带内都是单调减少的。此外, 它还具有以下性质:

(1) 定义滤波器的增益函数(the gain function)或衰减函数(loss function)

$$G(\Omega) = 10\lg|H_a(j\Omega)|^2 = 20\lg|H_a(j\Omega)|(dB) \quad (5.16)$$

由于 Butterworth 滤波器的平方幅度函数  $|H_a(j\Omega)|^2$  在  $\Omega=0$  处等于 1, 在  $\Omega=\Omega_c$  处等于 0.5, 在  $\Omega \rightarrow \infty$  时等于 0, 因此, 衰减函数  $G(\Omega)$  在  $\Omega=0$  处等于 0dB, 在  $\Omega=\Omega_c$  处等于 -3dB, 在  $\Omega \rightarrow \infty$  时趋于  $-\infty$ 。

(2) 随着阶数增加, Butterworth 滤波器的平方幅度响应在通带内越来越平, 在阻带内衰减越来越快, 过渡带变得越来越窄。在极限情况即当  $N \rightarrow \infty$  时, 在整个通带内等于 1, 在整个阻带内等于零, 过渡带的宽度等于零, 即变成理想低通滤波器的平方幅度响应。

(3) 可以证明,  $|H_a(j\Omega)|^2$  在  $\Omega=0$  处的  $2N-1$  阶以下的各阶导数都存在, 而且都等于零。这意味着, 在所有的  $N$  阶滤波器中, Butterworth 滤波器的幅度响应在  $\Omega=0$  点是最平的, 因此, Butterworth 滤波器被称为最平幅度响应滤波器或最平滤波器 (the maximally flat filters)。

(4) 可以证明, 在  $\Omega \gg \Omega_c$  的高频范围内, 随着  $\Omega$  的增加,  $N$  阶 Butterworth 滤波器的幅度响应每倍频程衰减大约  $6N$  dB; 这意味着, 滤波器的阶数每增加 1 阶, 在阻带内的衰减每倍频程增加 6dB 或每 10 倍频程增加 20dB。

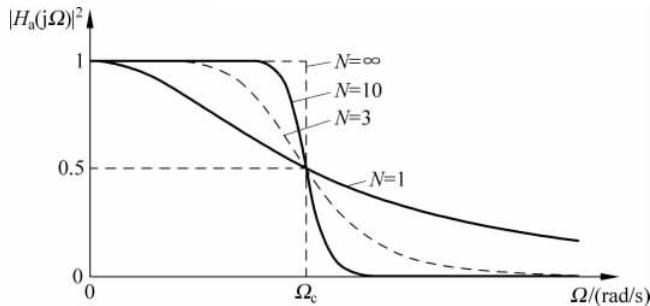


图 5-4 不同阶数的 Butterworth 滤波器的平方幅度函数

## 2. Butterworth 滤波器平方幅度响应的参数

式(5.15)定义的 Butterworth 平方幅度响应仅取决于  $N$  和  $\Omega_c$ 。这两个参数可根据  $\Omega_p$ 、 $\Omega_s$ 、 $\delta_p$  和  $\delta_s$  (或  $A_p$ 、 $\epsilon$  和  $A_s$ 、 $A$ ) 计算得到。

在通带和阻带截止频率上, 式(5.15)受下式约束

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = (1 - \delta_p)^2 \\ \frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \delta_s^2 \end{cases} \quad (5.17)$$

由式(5.17)解出  $N$

$$N = \frac{\lg \left[ \frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2}}{\lg (\Omega_p/\Omega_s)} \quad (5.18)$$

将  $N$  向上取成整数, 得出滤波器的阶。由于  $N$  是向上取整, 所以通带和阻带波纹是过设计的。为了准确满足通带波纹指标的要求, 将整数  $N$  代入式(5.17)的第一个方程, 解出的  $\Omega_c$  用  $\Omega_{cp}$  表示

$$\Omega_{cp} = \frac{\Omega_p}{[(1-\delta_p)^{-2}-1]^{1/(2N)}} \quad (5.19)$$

若以此作为设计指标,则阻带衰减指标是过设计的。反之,为了准确满足阻带波纹指标的要求,将整数  $N$  代入式(5.17)的第二个方程,解出的  $\Omega_c$  用  $\Omega_{cs}$  表示

$$\Omega_{cs} = \frac{\Omega_s}{(\delta_s^{-2}-1)^{1/(2N)}} \quad (5.20)$$

如果把  $\Omega_{cs}$  作为设计指标,则通带波纹是过设计的。如果把  $\Omega_{cp}$  与  $\Omega_{cs}$  的算术平均值  $\Omega_c$  作为设计指标,即

$$\Omega_c = \frac{\Omega_{cp} + \Omega_{cs}}{2} \quad (5.21)$$

则通带波纹和阻带衰减都满足或超过设计指标的要求。

考虑到式(5.7)和式(5.8),式(5.18)可以表示成以下 3 种不同形式

$$N = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg \left( \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)^{1/2}}{\lg (\Omega_p / \Omega_s)} = \frac{\lg \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \right)}{\lg (\Omega_p / \Omega_s)} \quad (5.22)$$

式中,  $A_p$  和  $A_s$  都以 dB 为单位。

**例 5.2** 给定技术指标:  $\Omega_p = 10\pi$ ,  $\Omega_s = 20\pi$ ,  $\delta_p = 0.2$ ,  $\delta_s = 0.1$ 。求 Butterworth 模拟低通滤波器的阶和 3dB 截止频率。

解 (1) 计算滤波器的阶

$$r = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{10\pi}{20\pi} = 0.5$$

$$d = \left[ \frac{(1-\delta_p)^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{(1-0.2)^{-2}-1}{0.1^{-2}-1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.0754$$

$$N = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg(0.0754)}{\lg(0.5)} = 3.7293, \quad \text{向上取整 } N = 4$$

(2) 确定 3dB 截止频率

$$\Omega_{cp} = \frac{\Omega_p}{[(1-\delta_p)^{-2}-1]^{1/(2N)}} = \frac{10\pi}{[(1-0.2)^{-2}-1]^{1/(2\times 4)}} = 10.746\pi$$

$$\Omega_{cs} = \frac{\Omega_s}{(\delta_s^{-2}-1)^{1/(2N)}} = \frac{20\pi}{(0.1^{-2}-1)^{1/(2\times 4)}} = 11.261\pi$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_{cp} + \Omega_{cs}}{2} = \frac{10.746\pi + 11.261\pi}{2} \approx 11\pi$$

### 3. Butterworth 滤波器的传输函数

根据式(5.15)的平方幅度函数  $|H_a(j\Omega)|^2$  可以构造出 Butterworth 滤波器的传输函数。为此,首先考察  $H_a(s)H_a(-s)$  的极点。将式(5.15)代入式(5.10),得到

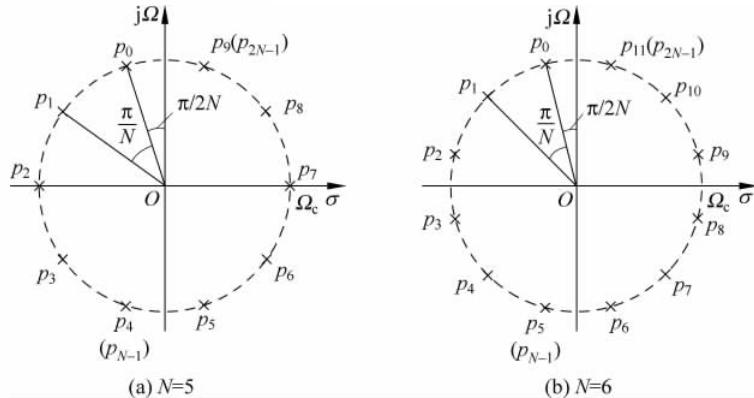
$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=s/j} = \frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}} \quad (5.23)$$

式(5.23)分母多项式的根,即  $H_a(s)H_a(-s)$  的极点

$$\begin{aligned} p_k &= j\Omega_c (-1)^{1/(2N)} \\ &= \Omega_c \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \end{aligned} \quad (5.24)$$

式中,  $\pi/2$  是  $j$  的辐角。注意,  $(-1)^{1/(2N)}$  的  $2N$  个根是  $\exp[(2k+1)\pi/(2N)]$  ( $k=0, 1, \dots, 2N-1$ )。式(5.24)表明,  $H_a(s)H_a(-s)$  的  $2N$  个极点等间隔分布在半径为  $\Omega_c$  的圆上, 相邻极点的间隔(辐角差)为  $\pi/N$ ;  $k=0$  对应的极点  $p_0$  的辐角是  $(\pi/2) + \pi/(2N)$ 。图 5-5 所示的是  $N=5$  和  $N=6$  两种情况下,  $H_a(s)H_a(-s)$  的  $2N=12$  个极点在  $s$  平面上的分布情况。注意, 前  $N$  个极点  $\{p_0, p_1, \dots, p_{N-1}\}$  在左半平面内, 为了保证滤波器的稳定性, 选择它们作为  $H_a(s)$  的极点; 后  $N$  个极点  $\{p_N, p_{N+1}, \dots, p_{2N-1}\}$  在右半平面内, 属于  $H_a(-s)$ 。这样, 由式(5.23)得出 Butterworth 低通滤波器的传输函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - p_k)} \quad (5.25)$$

图 5-5 Butterworth 滤波器的  $H_a(s)H_a(-s)$  的极点分布

**例 5.3** 求例 5.2 的 Butterworth 模拟低通滤波器的传输函数。

**解** (1) 将例 5.2 的结果  $N=4$  和  $\Omega_c=11\pi$  代入式(5.15), 得到

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/11\pi)^8}$$

(2) 由式(5.24)求平方幅度响应的极点

$$p_k = (11\pi) \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}(2k+1) \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

(3) 选出左半平面的  $N=4$  个极点构成传输函数

$$H_a(s) = \frac{(11\pi)^4}{\prod_{k=0}^3 (s - p_k)} = \frac{1.4262 \times 10^4}{\prod_{k=0}^3 (s - p_k)}$$

其中

$$p_k = (11\pi) \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}(2k+1) \right) \right]$$

$$= 34.5575 \exp[j(1.9635 + 0.7854k)], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

具体数值列于下表

$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
$-13.2247+j31.9269$	$-31.9271+j13.2244$	$-31.9269-j13.2248$	$-13.2243-j31.9271$

将表中列出的极点数值代入传输函数表示式，并将分母中所有因式相乘，最后得到

$$H_a(s) = \frac{1.4262}{0.000001s^4 + 0.00009s^3 + 0.0041s^2 + 0.1078s + 1.4262}$$

在阶数不高的情况下，求出滤波器的阶和3dB截止频率后，也可以直接利用查表法来得到滤波器的传输函数，从而省去计算极点的繁琐过程。为此，首先利用查表法得出频率归一化（即  $\Omega_c = 1\text{rad/s}$ ）的 Butterworth 模拟低通滤波器的传输函数，表示为

$$H_{\text{NOR}}(s) = \frac{a_N}{\sum_{k=0}^N a_k s^{N-k}}, \quad a_0 = 1 \quad (5.26)$$

其中的系数由表 5-1 查出。

表 5-1 归一化 Butterworth 模拟低通滤波器传输函数的系数

$N$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	1.0000							
2	1.4142	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000				
5	3.3261	5.2361	5.2361	3.3261	1.0000			
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000		
7	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000	
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1371	5.1258	1.0000

接着，用  $s/\Omega_c$  替代式(5.26)中的  $s$ ，便得到3dB截止频率为  $\Omega_c$  的  $N$  阶 Butterworth 低通滤波器的传输函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\sum_{k=0}^N \Omega_c^k a_k s^{N-k}}, \quad a_0 = 1 \quad (5.27)$$

这里，用  $s/\Omega_c$  替代  $s$  仅仅是模拟频率变换的一个简单例子，还有其他多种频率变换的方法将在 5.4 节介绍。

**例 5.4** 利用查表法重新计算例 5.3 的传输函数。

**解** 例 5.3 已经求得  $N=4$  和  $\Omega_c=11\pi$ 。由表 5-1 查出归一化的 4 阶 Butterworth 传输函数的系数，代入式(5.27)，便可以直接得出所求滤波器的传输函数

$$\begin{aligned}
H_a(s) &= \frac{(11\pi)^4 a_4}{\sum_{k=0}^4 a_k (11\pi)^k s^{4-k}} \\
&= \frac{(11\pi)^4}{s^4 + 2.6131 \times 11\pi s^3 + 3.4142 \times (11\pi)^2 s^2 + 2.6131 \times (11\pi)^3 s + (11\pi)^4} \\
&= \frac{1.4262 \times 10^6}{s^4 + 90.3023 s^3 + 4.0773 \times 10^3 s^2 + 1.0784 \times 10^5 s + 1.4262 \times 10^6} \\
&= \frac{1.4262}{0.000001 s^4 + 0.00009 s^3 + 0.0041 s^2 + 0.1078 s + 1.4262}
\end{aligned}$$

与例 5.3 的结果完全相同,但计算过程更简单。

### 5.2.2 Chebyshev I 型滤波器

Butterworth 滤波器的幅度响应是单调下降的,而且在所有同阶滤波器中在通带内是最平的。但缺点是过渡带不可能做得很窄。减小过渡带宽度的一种有效办法是允许通带或阻带内存在波纹。Chebyshev I 型滤波器就是在通带内有波纹从而使过渡带宽度得以减小的一种滤波器。它的平方幅度响应定义为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{k}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_p)} \quad (5.28)$$

式中, $V_N(x)$ 是第一类 Chebyshev 多项式,它是  $x$  的  $N$  次多项式,见 4.5.1 节;  $N$  是滤波器的阶;  $\epsilon$  是通带波纹参数,见图 5-2 和式(5.3);  $\Omega_p$  是通带截止(角)频率;  $k$  是调整直流增益的系数,通常取为 1。

在初始条件  $V_0(x)=1$  和  $V_1(x)=x$  下,任何阶 Chebyshev 多项式可以用式(4.70)迭代产生(见 4.5.1 节)。表 5-2 列出了前 9 阶 Chebyshev 多项式。

表 5-2 第一类 Chebyshev 多项式

$N$	$V_N(x)$
0	1
1	$x$
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

图 5-6 是第一类 Chebyshev 多项式的函数曲线。偶数阶时为偶函数,奇数阶时为奇函数。对于  $|x|<1$ ,函数在  $[-1, 1]$  之间呈等幅振荡,阶越大振荡频率越高;对于  $|x|>1$ ,随着  $|x|$  的增加,函数值按双曲函数单调上升,阶越大曲线上升越快。对于  $x<-1$ ,随着  $|x|$  增加,函数值按双曲余弦函数单调下降;对于  $x>1$ ,随着  $|x|$  增加,函数值按双曲余弦

函数单调上升。这些性质对于设计模拟低通滤波器非常有用。

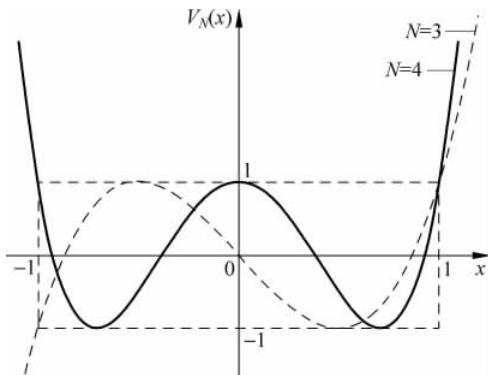


图 5-6 第一类 Chebyshev 多项式的函数曲线

图 5-7 是奇数阶和偶数阶 Chebyshev I 型滤波器的平方幅度响应的两个例子。

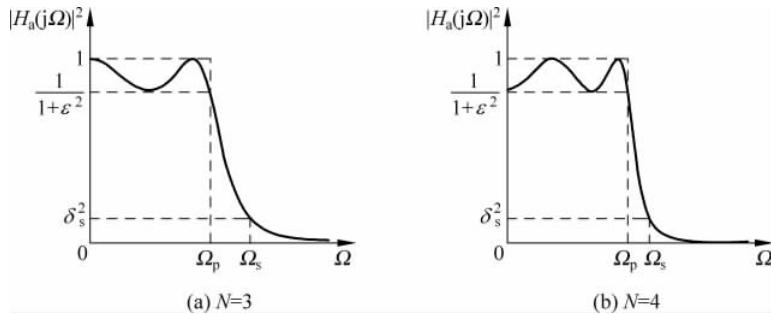


图 5-7 Chebyshev I 型滤波器平方幅度响应举例

从图 5-7 看出, Chebyshev I 型滤波器的平方幅度响应在通带内呈等幅振荡, 变化范围介于  $1$  与  $1/(1+\epsilon^2)$  之间; 在阻带内则单调减小。当  $N$  为奇数时, 直流增益  $|H_a(0)|^2$  是最大值, 若希望直流增益等于  $1$ , 则应当取  $k=1$ ; 当  $N$  为偶数时,  $|H_a(0)|^2$  是最小值, 若仍希望直流增益等于  $1$ , 则必须取  $k=1+\epsilon^2$ , 在此情况下最大增益将大于  $1$ ; 在某些情况下, 希望把最大增益调整为  $1$ , 相当于式(5.28)中的  $k=1$ 。在这种情况下, 当  $N$  为偶数时, 直流增益将小于  $1$ 。通带内的振荡次数随着  $N$  的增加而增多, 具体说, 在通带  $[-\Omega_p, \Omega_p]$  内的振荡次数, 或在  $[0, \Omega_p]$  内的最大值和最小值的数目恰等于  $N$ 。过渡带的宽度随着  $N$  的增加而减小。在通带截止频率上有  $|H_a(j\Omega_p)|^2 = 1/(1+\epsilon^2)$ , 即通带波纹幅度由  $\epsilon$  决定;  $\epsilon$  由  $\delta_p$  或  $A_p$  决定(见式(5.3)和式(5.5))。由于 Chebyshev I 型滤波器的幅度响应在通带内呈等幅振荡, 所以又称为等波纹滤波器(the equiripple filters), 从这个意义上说, Chebyshev I 型滤波器是最优滤波器。

Butterworth 滤波器的幅度响应在  $\Omega_c$  上等于  $1/\sqrt{2}$ , 对应于  $3\text{dB}$  的衰减, 所以称  $\Omega_c$  为  $3\text{dB}$  截止频率。而对于 Chebyshev I 型滤波器, 当  $\epsilon=1$  时,  $\Omega=\Omega_p$  处的幅度响应恰有  $3\text{dB}$  的衰减, 所以 Chebyshev I 型滤波器的  $3\text{dB}$  截止频率是  $\Omega_p$ 。

Chebyshev I型滤波器与 Butterworth 滤波器都是全极点滤波器。但是,与 Butterworth 滤波器不同,Chebyshev I型滤波器的平方幅度响应的  $2N$  个极点不是均匀分布在圆上,而是分布在椭圆上,可以证明,椭圆的长轴  $a$  和短轴  $b$  分别用下式计算

$$a = \frac{\Omega_0}{2} (\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}) \quad (5.29)$$

$$b = \frac{\Omega_0}{2} (\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}) \quad (5.30)$$

式中

$$\Omega_0 = \Omega_p \quad \alpha = \epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \quad (5.31)$$

极点在椭圆上的位置按照以下方法确定:

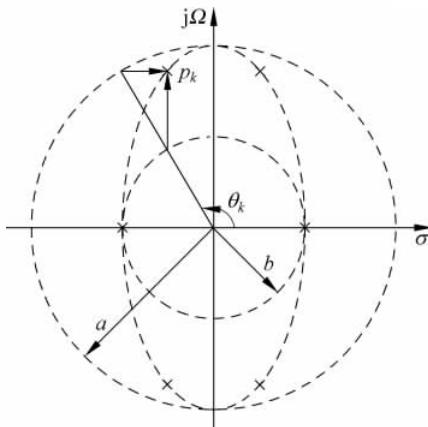


图 5-8 Chebyshev I 型滤波器极点位置的确定方法

(1) 分别以椭圆长轴  $a$  和短轴  $b$  为半径画出两个辅助圆,如图 5-8 所示(设  $N=3$ )。

(2) 按照  $\pi/N$  的辐角间隔找到两个辅助圆上的等间隔点,这些点关于虚轴对称,但没有一个落在虚轴上, $N$  为奇数时有 2 个落在实轴上, $N$  为偶数时则没有。显然,这些点就是等价的  $N$  阶 Butterworth 滤波器在半径为  $a$  或半径为  $b$  的圆上的极点。

(3) 根据等价的 Butterworth 滤波器在大圆上的极点和在小圆上的极点,确定 Chebyshev I 型滤波器各极点的纵坐标和横坐标。具体说,设等价的 Butterworth 滤波器的极点的辐角是

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.32)$$

则 Chebyshev I 型滤波器的极点用下式计算

$$p_k = \sigma_k + j\Omega_k = a \cos \theta_k + j b \sin \theta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.33)$$

其中,  $\sigma_k$  和  $\Omega_k$  分别是极点的纵坐标和横坐标

$$\begin{cases} \sigma_k = a \cos \theta_k \\ \Omega_k = b \sin \theta_k \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.34)$$

注意,式(5.32)实际上是  $N$  阶 Butterworth 滤波器的极点,参见式(5.24)。

Chebyshev I 型滤波器的阶由阻带衰减确定。式(5.28)在阻带截止频率  $\Omega_s$  上应满足指标  $\delta_s$  的要求,即

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega_s / \Omega_p)} = \delta_s^2$$

上式两端取对数,得到

$$-10 \lg \left[ \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega_s / \Omega_p)} \right] = -10 \lg (\delta_s^2)$$

由于  $A_s = -20\lg(\delta_s)$ , 所以可以将上式写成

$$10\lg[1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega_s/\Omega_p)] = A_s$$

由此得出

$$V_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right) = \frac{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/2}}{\epsilon} \quad (5.35)$$

根据  $N$  阶第一类 Chebyshev 多项式的定义(见式(4.69))

$$V_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right) = \operatorname{ch}\left(N \operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)\right)$$

得到

$$N = \frac{\operatorname{ch}^{-1} V_N(\Omega_s/\Omega_p)}{\operatorname{ch}^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}$$

将式(5.35)代入上式, 得到

$$N = \frac{\operatorname{ch}^{-1}[(10^{0.1A_s} - 1)^{1/2} \epsilon^{-1}]}{\operatorname{ch}^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} \quad (5.36)$$

用类似方法可以推导出估计 Chebyshev I 型滤波器的阶的一个实用公式

$$N = \frac{\lg(d^{-1} + \sqrt{d^{-2} - 1})}{\lg(r^{-1} + \sqrt{r^{-2} - 1})} \quad (5.37)$$

前面说过, Chebyshev I 型滤波器的平方幅度响应在  $\Omega=0$  处等于 1 或  $1/(1+\epsilon^2)$ , 取决于  $N$  是奇数或偶数, 即

$$|H_a(0)|^2 = \begin{cases} 1, & N \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{1+\epsilon^2}, & N \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (5.38)$$

因此, 根据平方幅度响应左半平面极点可构造出滤波器的传输函数

$$H_a(s) = \frac{\beta |H_a(0)|}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - p_k)} \quad (5.39)$$

式中

$$\beta = (-1)^N \prod_{k=0}^{N-1} p_k \quad (5.40)$$

**例 5.5** 设计一个 2 阶 Chebyshev I 型滤波器, 要求通带衰减  $A_p = 1$ dB, 通带截止频率  $\Omega_p = 1$ rad/s, 直流增益  $|H_a(0)| = 1$ 。求该滤波器的传输函数  $H_a(s)$ 。

**解** (1) 求平方幅度响应

用式(5.5)计算通带波纹参数  $\epsilon$

$$\epsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1 = 0.2589$$

由于是偶数阶, 直流增益是最小值, 为了满足  $|H_a(0)| = 1$  的要求, 必须选择

$$k = 1 + \epsilon^2 = 1 + 0.2589 = 1.2589$$

查表 5-2 得 2 阶第一类 Chebyshev 多项式  $V_2(x) = 2x^2 - 1$ , 代入式(5.28)得到

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{k}{1 + \epsilon^2 \left[ 2 \left( \frac{\Omega}{\Omega_p} \right)^2 - 1 \right]^2} = \frac{1.2589}{1 + 0.2589 [2\Omega^2 - 1]^2}$$

$$= \frac{1.2589}{1.0356\Omega^4 - 1.0356\Omega^2 + 1.2589}$$

(2) 求传输函数

令  $\Omega^2 = -s^2$ , 代入上面得出的  $|H_a(j\Omega)|^2$  表达式, 得到

$$\begin{aligned} H_a(s)H_a(-s) &= \frac{1.2589}{1.0356s^4 + 1.0356s^2 + 1.2589} \\ &= \frac{1.2156}{s^4 + s^2 + 1.2156} = \frac{1.1025^2}{s^4 + s^2 + 1.2156} \end{aligned}$$

计算分母多项式的根, 得极点

$$\begin{aligned} p_0 &= -0.5489 + j0.8951 & p_2 &= 0.5489 + j0.8951 \\ p_1 &= -0.5489 - j0.8951 & p_3 &= 0.5489 - j0.8951 \end{aligned}$$

由左半平面的极点  $p_0$  和  $p_1$  构成传输函数

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1.1025}{(s + 0.5489 - j0.8951)(s + 0.5489 + j0.8951)} \\ &= \frac{1.1025}{s^2 + 1.0978s + 1.1025} \end{aligned}$$

传输函数分子上的常数, 也可以直接用式(5.40)计算。因为要求  $|H_a(0)| = 1$ , 所以根据式(5.40), 这个常数就是  $\beta$ , 即

$$\beta = (-1)^N \prod_{k=0}^{N-1} p_k = p_0 p_1 = 1.1025$$

### 5.2.3 Chebyshev II型滤波器

Chebyshev II型滤波器的平方幅度响应定义为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 V_N^2(\Omega_s/\Omega)}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega_s/\Omega)} \quad (5.41)$$

注意它与 I 型的以下区别:

(1) I 型的平方幅度响应的自变量  $\Omega/\Omega_p$  已经被  $\Omega_s/\Omega$  所取代, 这意味着 II 型的极点恰处于 I 型的极点的倒数位置, 即若 I 型的极点  $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$  用式(5.33)定义, 则 II 型的极点为

$$q_k = \frac{\Omega_s^2}{p_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.42)$$

但应注意, 在计算椭圆长轴  $a$  和短轴  $b$  的式(5.29)和式(5.30)中, 必须令  $\Omega_0 = \Omega_s$ 。

(2) I 型的平方幅度响应(式(5.28))的分子是常数, 所以 I 型是全极点滤波器。但是, II 型的平方幅度响应(式(5.41))的分子不是常数而是一个  $2N$  阶多项式, 所以 II 型滤波器还有  $N$  或  $N-1$  个零点, 即它是一个零点-极点滤波器。II 型滤波器的  $N$  个零点分布在虚轴上, 具体位置为

$$r_k = j \frac{\Omega_s}{\sin \theta_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.43)$$

式中,  $\theta_k$  由式(5.32)确定

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} = (2k+1+N)\frac{\pi}{2N}$$

当  $N$  为偶数时,  $N$  个零点都是有限零点; 但是, 当  $N$  为奇数时, 由于

$$\theta_{(N-1)/2} = (N-1+1+N)\frac{\pi}{2N} = \pi$$

因此,  $k=(N-1)/2$  对应的零点为无限零点, 所以只有  $N-1$  个零点是有限零点。

(3) Chebyshev I 型滤波器的直流增益在  $N$  为奇数时等于 1, 在  $N$  为偶数时等于  $1/(1+\epsilon^2)^{1/2}$ , 见式(5.38)。而 Chebyshev II 型滤波器的直流增益永远等于 1。令

$$\beta = \begin{cases} \prod_{k=0}^{N-1} q_k / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq (N-1)/2}}^{N-1} r_k, & N \text{ 为奇数} \\ \prod_{k=0}^{N-1} q_k / \prod_{k=0}^{N-1} r_k, & N \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (5.44)$$

Chebyshev II 型滤波器的传输函数由左半平面的极点和虚轴上的一半零点构成, 即

$$H_a(s) = \frac{\beta \prod_{k=0}^{N-1} (s - r_k)}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - q_k)} \quad (5.45)$$

仍应注意, 在  $N$  为奇数时, 应当去掉分子中的因子  $(s - r_{(N-1)/2})$ 。

图 5-9 是 Chebyshev II 型滤波器的平方幅度响应的两个示例, 分别对应于奇数和偶数阶。可以看出, 与 Chebyshev I 型滤波器不同, Chebyshev II 型滤波器在通带内单调减少而在阻带内呈等幅振荡, 在此意义上, Chebyshev II 型滤波器也是最优滤波器。

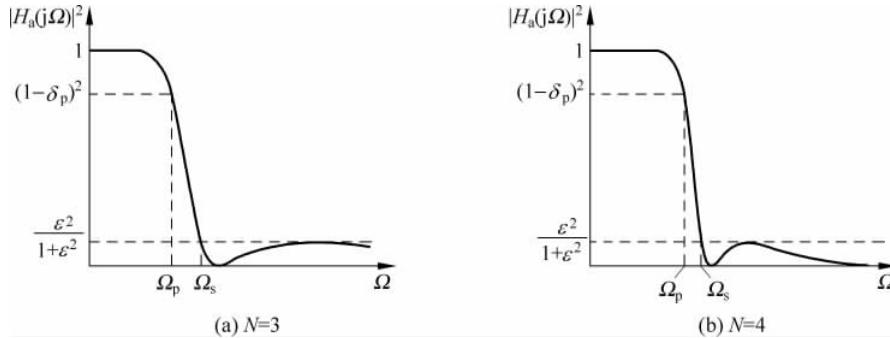


图 5-9 Chebyshev II 型滤波器的平方幅度响应

Chebyshev II 型滤波器的平方幅度响应也用参数  $N$  和  $\epsilon$  描述。 $N$  仍用式(5.36)或式(5.37)计算。因此, 它所需要的阶也比 Butterworth 滤波器低。

根据式(5.41), 在阻带截止频率  $\Omega=\Omega_s$  上, 有

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \quad (5.46)$$

令  $\epsilon^2/(1+\epsilon^2)=\delta_s^2$ , 解出

$$\epsilon = \delta_s (1 - \delta_s^2)^{-1/2} \quad (5.47)$$

因此,波纹因子  $\epsilon$  可以根据阻带衰减确定。这样确定的  $\epsilon$ ,设计的滤波器准确地满足阻带衰减指标  $\delta_s$  的要求,而当用式(5.36)计算的阶不是整数时,通带波纹指标是过设计的。

### 5.2.4 椭圆滤波器

椭圆滤波器又称 Cauer 滤波器,它在通带和阻带内都是等波纹的。因此,它的幅度响应类似于用 Parks-McClellan 算法设计的最优等波纹线性相位 FIR 滤波器。 $N$  阶椭圆滤波器的平方幅度响应定义为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_p)} \quad (5.48)$$

式中, $U_N$  是  $N$  阶 Jacobian 椭圆函数,也称为 Chebyshev 有理函数。由于椭圆滤波器的幅度响应在通带和阻带内都是等波纹的,所以能够获得最窄的过渡带。图 5-10 是 4 阶椭圆滤波器的平方幅度响应的图形。

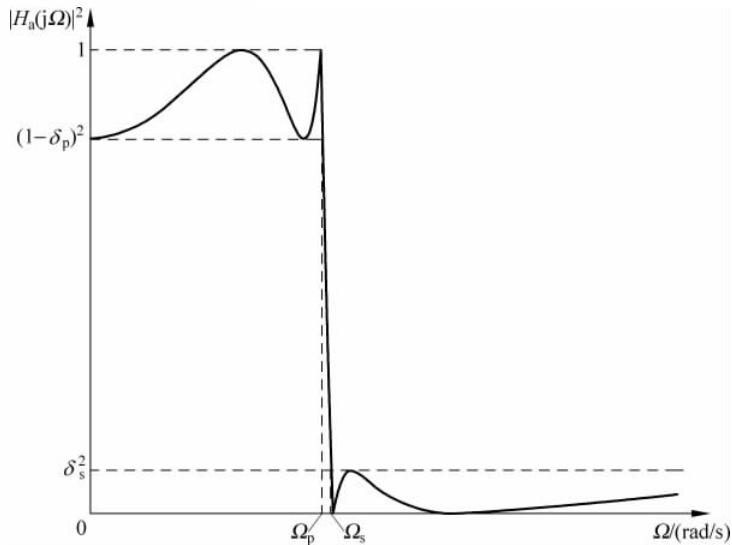


图 5-10 4 阶椭圆滤波器的平方幅度响应

与 Chebyshev 滤波器类似,椭圆滤波器的设计参数也是波纹参数  $\epsilon$  和阶  $N$ 。根据 Jacobian 椭圆函数的性质,对所有  $N$  有  $U_N(1)=1$ ,所以由式(5.48)得出

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad (5.49)$$

即与 Chebyshev I 型滤波器的  $|H_a(j\Omega_p)|^2$  相同。因此,若按照式(5.3)确定  $\epsilon$ ,则设计的椭圆滤波器将准确地满足通带波纹指标  $\delta_p$  的要求。

为了求出椭圆滤波器的极点和零点,需要求解由积分组成的非线性代数方程,其分析和设计比 Butterworth 滤波器和 Chebyshev 滤波器更加复杂<sup>[37]</sup>。

椭圆滤波器的阶可以用下式估计

$$N = \frac{g(r^2)g(\sqrt{1-d^2})}{g(\sqrt{1-r^2})g(d^2)} \quad (5.50)$$

式中,  $g(x)$  是第一类完全椭圆积分, 定义为

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}}$$

如果用式(5.50)得到的  $N$  不是整数, 需要向上取整。按照这个阶设计的椭圆滤波器, 它的通带波纹准确地满足设计指标, 而阻带衰减是过设计的。

#### 例 5.6 已知一个模拟低通滤波器的技术指标

$$[F_p, F_s, \delta_p, \delta_s] = [1000\text{Hz}, 2000\text{Hz}, 0.05, 0.05]$$

试比较用 Butterworth 滤波器、Chebyshev I 型滤波器、Chebyshev II 型滤波器和椭圆滤波器逼近时, 所需的滤波器的阶  $N$ 。

解 用式(5.7)和式(5.8)计算选择性因子  $r$  和鉴别因子  $d$

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{F_p}{F_s} = \frac{1000}{2000} = 0.5 \\ d &= \left[ \frac{(1-\delta_p)^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{(1-0.05)^{-2}-1}{0.05^{-2}-1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.0165 \end{aligned}$$

计算滤波器的最低阶:

(1) 用式(5.22)计算 Butterworth 滤波器的阶

$$N_B = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg 0.0165}{\lg 0.5} = 5.9124, \quad \text{取 } N_B = 6$$

(2) 用式(5.37)计算 Chebyshev I 型和 II 型滤波器的阶

$$N_C = \frac{\lg((0.0165)^{-1} + \sqrt{(0.0165)^{-2}-1})}{\lg(0.5^{-1} + \sqrt{0.5^{-2}-1})} = 3.6428, \quad \text{取 } N_C = 4$$

(3) 用式(5.50)计算椭圆滤波器的阶

$$\begin{aligned} N_E &= \frac{g(r^2)g(\sqrt{1-d^2})}{g(\sqrt{1-r^2})g(d^2)} = \frac{g(0.5^2)g(\sqrt{1-0.0165^2})}{g(\sqrt{1-0.5^2})g(0.0165^2)} \\ &= \frac{g(0.25)g(0.9999)}{g(0.866)g(2.7225 \times 10^{-4})} \end{aligned}$$

为了利用椭圆积分数值表, 需要以下数值

$$\arcsin(0.25) = 0.2527\text{rad} = 14.4786^\circ$$

$$\arcsin(0.9999) = 1.5567\text{rad} = 89.1923^\circ$$

$$\arcsin(0.866) = 1.0471\text{rad} = 59.9944^\circ$$

$$\arcsin(2.7225 \times 10^{-4}) = 2.7225 \times 10^{-4}\text{rad} = 0.0156^\circ$$

查椭圆积分数值表, 得出

$$14^\circ \rightarrow 1.5946, \quad 15^\circ \rightarrow 1.5981, \quad g(0.25) \approx 1.5963$$

$$89^\circ \rightarrow 5.4349, \quad g(0.9999) \approx 5.4349$$

$$60^\circ \rightarrow 2.1565, \quad g(0.866) \approx 2.1565$$

$$0.0156^\circ \approx 0^\circ \rightarrow 1.5708, \quad g(2.7225 \times 10^{-4}) \approx 1.5708$$

将椭圆积分值代入计算阶的公式

$$N_E = \frac{1.5963 \times 5.4349}{2.1565 \times 1.5708} = 2.5612, \quad \text{取 } N_E = 3$$

可以看出,为了满足同样的技术指标,Butterworth 滤波器要 6 阶,Chebyshev I 型和 II 型滤波器只需要 4 阶,而椭圆滤波器需要的阶最低只有 3 阶。

例 5.6 的结论具有普遍意义。正如在讨论 FIR 滤波器的设计时所知道的,当把逼近误差同时分散到通带和阻带时,从减小误差的角度来看,可以获得最优的滤波器。椭圆滤波器达到了这种效果。从满足给定的技术指标选择不同的滤波器进行逼近的观点来看,椭圆滤波器所需的阶是最低的。反过来说,如果将阶数固定,则椭圆滤波器可以获得最窄的过渡带。尽管如此,椭圆滤波器也有自己的缺点,这就是它的相位响应在 4 种滤波器中是最差的,特别是在通带截止频率附近,它的相位响应的非线性非常严重。所以,在相位响应不是无关紧要的应用场合,人们还是选择其他 3 种滤波器来逼近低通滤波器。

### 5.3 模拟滤波器到数字滤波器的映射

上面讨论了 4 种可供选择的(模拟低通)原型滤波器,接下来的问题自然是怎样把它们映射成数字滤波器。最基本的映射方法,是将模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$  映射成数字滤波器的单位冲激响应  $h(n)$ ,或将模拟滤波器的传输函数  $H_a(s)$  映射成数字滤波器的传输函数  $H(z)$ 。这种映射应该满足两个基本要求:

(1) 映射后得到的数字滤波器的频率响应必须与映射前的模拟滤波器的频率响应基本相同,这意味着必须把  $s$  平面的虚轴映射成  $z$  平面的单位圆。

(2) 稳定的模拟滤波器应当映射成稳定的数字滤波器,这意味着左半  $s$  平面内的极点应当映射到  $z$  平面的单位圆内。

下面讨论两种最常用的映射方法,冲激响应不变法和双线性变换法。

#### 5.3.1 冲激响应不变法

冲激响应不变法力图保持数字滤波器的冲激响应  $h(n)$  的包络与模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$  相同。只要以足够小的间隔  $T_s$  对  $h_a(t)$  进行取样就能够满足这一要求,即

$$h(n) = h_a(nT_s) \quad (5.51)$$

下面将会看到,由于设计 IIR 滤波器时,给出的是数字滤波器的技术指标,所以式(5.51)中的参数  $T_s$  实际上不起任何作用。在选择设计方法时,一般习惯于指定  $T_s$ ,且不一定与 A/D 和 D/C 转换器的取样周期相同。

冲激响应不变法特别关心数字滤波器与模拟滤波器频率响应之间的关系。根据取样定理,用式(5.51)得到的数字滤波器的频率响应  $H(e^{j\omega})$  与原模拟滤波器的频率响应  $H_a(j\Omega)$  之间具有关系

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T_s} + j\frac{2\pi}{T_s}k\right) \quad (5.52)$$

式中,数字频率  $\omega$  与模拟频率  $\Omega$  的关系是  $\Omega = \omega/T_s$ 。该式表明,  $H(e^{j\omega})$  是  $H_a(j\Omega)$  的周期性重复、叠加和频率尺度变换  $\omega = \Omega T_s$  的结果。若模拟滤波器的频带受到限制,例如

$$H_a(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_s \quad (5.53)$$

则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} H_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right), \quad |\omega| \leq \pi \quad (5.54)$$

即数字滤波器与模拟滤波器的频率响应之间只是幅度和频率进行线性尺度变换的关系,这意味着没有频率混叠失真。但是,阶数有限的任何实际模拟滤波器都不可能是真正限带的。因此,式(5.52)中各项之间存在干扰,即频率混叠失真不可避免。然而,如果模拟滤波器的频率响应在高频时趋近于零,则频率混叠失真可以忽略。因此,冲激响应不变法适用于频带有限或频率响应在高频时趋近于零的模拟滤波器。

根据  $\omega = \Omega T_s$ , 有

$$e^{j\omega} = e^{j\Omega T_s} \quad (5.55)$$

即

$$z = e^{sT_s} \quad (5.56)$$

这就是  $s$  平面与  $z$  平面之间的映射关系,如图 5-11 所示。

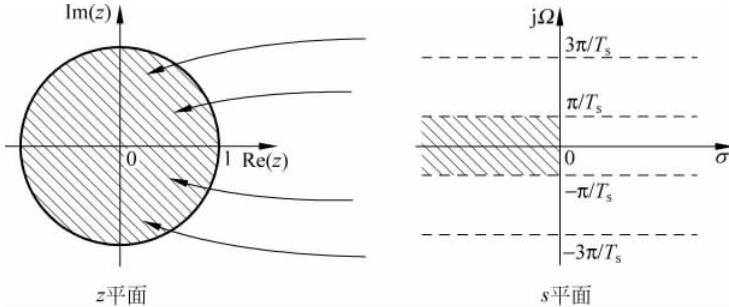


图 5-11  $s$  平面到  $z$  平面的映射

虽然  $s$  平面的虚轴  $s = j\Omega$  映射成  $z$  平面的单位圆  $z = e^{j\omega}$ ,但这不是一对一而是多对一的映射。具体说,  $j\Omega$  轴上长为  $2\pi/T_s$  的每一段都映射成单位圆,这就是频率响应的混叠现象。左半  $s$  平面内的点映射成  $z$  平面单位圆内的点,因此,左半  $s$  平面内宽度为  $2\pi/T_s$  的每个横带(如阴影所示)被映射成  $z$  平面单位圆内的区域。利用式(5.56)的映射关系把式(5.52)推广到复平面,即

$$H(z)|_{z=\exp(sT_s)} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s + j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \quad (5.57)$$

当没有频率混叠失真或频率混叠失真可以忽略时,有

$$H(z)|_{z=\exp(sT_s)} = \frac{1}{T_s} H_a(s) \quad (5.58)$$

实际给出的是数字滤波器的设计指标。为了设计原型滤波器,必须首先用下式把数字频率转换为模拟频率

$$\Omega = \omega / T_s \quad (5.59)$$

原型滤波器设计完成后得到传输函数  $H_a(s)$ , 即可利用式(5.58)把  $H_a(s)$  映射成  $H(z)$ 。值得注意的是, 这样得到的数字滤波器  $H(z)$  的频率响应  $H(e^{j\omega})$  是通过式(5.52)与模拟滤波器的频率响应  $H_a(j\Omega)$  相联系的。这意味着, 计算数字滤波器  $H(z)$  的频率响应  $H(e^{j\omega})$  时, 再一次利用了式(5.59)的频率轴变换。因此, 不能用取样周期  $T_s$  来控制频率混叠。由于设计指标是用数字频率给出的, 如果增加取样频率(即减小取样周期  $T_s$ ), 则模拟滤波器的截止频率也会呈比例增加。实际上, 为了补偿在由  $H_a(s)$  变换成  $H(z)$  时所引入的频率混叠失真, 可以让模拟滤波器是过设计的。也就是说, 在设计模拟滤波器时, 常有意地超过设计指标的要求, 特别是超过阻带设计指标的要求。

由于冲激响应不变法是通过时域中对模拟滤波器的冲激响应进行取样来定义的, 所以很容易通过对传输函数进行变换来实现。为了推导传输函数的变换关系, 现将模拟滤波器的传输函数表示成部分分式的形式

$$H_a(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - p_k} \quad (5.60)$$

为了简化推导, 假设  $H_a(s)$  只有 1 阶极点。这种情况下, 式(5.60)对应的冲激响应为

$$h_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{p_k t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

将式(5.61)代入式(5.51), 得到数字滤波器的冲激响应

$$h(n) = h_a(nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} A_k (e^{p_k T_s})^n u(n) \quad (5.62)$$

计算式(5.62)的  $z$  变换, 得到数字滤波器的传输函数

$$H(z) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}} \quad (5.63)$$

将式(5.63)与式(5.60)比较看出,  $s$  平面上的极点  $s = p_k$  被转换成  $z$  平面上的极点  $z = e^{p_k T_s}$ 。如果不考虑尺度因子  $1/T_s$ , 则  $H(z)$  与  $H_a(s)$  具有相同的系数。如果模拟滤波器是稳定的, 极点  $p_k$  的实部小于零, 因此  $e^{p_k T_s}$  的模小于 1, 即  $H(z)$  的对应极点位于单位圆内, 所以对应的因果数字滤波器也是稳定的。

注意, 按照式(5.56)即  $z = e^{sT_s}$  把  $s$  平面上的极点转换成  $z$  平面上的极点, 并不是简单地按照这个关系式把  $s$  平面映射到  $z$  平面上。由于  $H(z)$  的零点由极点  $p_k$  和部分分式的系数  $A_k$  共同决定, 所以并没有对零点进行和极点同样的映射。

**例 5.7** 利用 Butterworth 滤波器作为原型滤波器, 用冲激响应不变法设计一个满足以下技术指标的低通 IIR 数字滤波器, 其中, 通带波纹技术指标必须准确满足

$$[\omega_p, \omega_s, A_p, A_s] = [0.2\pi, 0.3\pi, 1\text{dB}, 15\text{dB}]$$

- (1) 求低通 IIR 数字滤波器的传输函数(由 2 阶子系统组成的级联型和直接型)。
- (2) 用 MATLAB 画出滤波器的线性和对数幅度响应, 并验证阻带波纹指标。

**解** (1) 将给定的数字滤波器技术指标换算成模拟滤波器的技术指标(设  $T_s=1$ )

$$\Omega_p = \omega_p/T_s = 0.2\pi, \quad \Omega_s = \omega_s/T_s = 0.3\pi$$

$$\delta_p = 1 - 10^{-A_p/20} = 1 - 10^{-1/20} = 0.1087$$

$$\delta_s = 10^{-A_s/20} = 10^{-15/20} = 0.1778$$

(2) 计算选择性因子  $r$  和鉴别因子  $d$ , 用式(5.22)估计滤波器的阶

$$r = \Omega_p/\Omega_s = 0.02\pi/(0.03\pi) = 0.6667$$

$$d = \left( \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)^{1/2} = \left( \frac{10^{0.1} - 1}{10^{0.1 \times 15} - 1} \right)^{1/2} = 0.0920$$

$$N = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg 0.092}{\lg 0.6667} = 5.9952, \quad \text{向上取整得 } N = 6$$

利用式(5.19)计算 3dB 截止频率

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{[(1 - \delta_p)^{-2} - 1]^{1/(2N)}} = \frac{0.2\pi}{[(1 - 0.1087)^{-2} - 1]^{1/12}} = 0.7034$$

用式(5.24)计算 6 阶 Butterworth 滤波器的极点

$$\begin{aligned} p_k &= \Omega_c \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right) \right] \\ &= 0.7034 \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{12} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

$$p_0 = p_5^* = -0.1821 + j0.6794$$

$$p_1 = p_4^* = -0.4974 + j0.4974$$

$$p_2 = p_3^* = -0.6794 + j0.1821$$

根据极点构造 6 阶 Butterworth 滤波器的传输函数

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=0}^5 (s - p_k)} \\ &= \frac{0.1211}{s^6 + 2.7177s^5 + 3.693s^4 + 3.1815s^3 + 1.8272s^2 + 0.6653s + 0.1211} \end{aligned}$$

(3) 将  $H_a(s)$  展开成部分分式

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{0.1436 + j0.2487}{s - (-0.1812 + j0.6794)} + \frac{0.1436 - j0.2487}{s - (-0.1812 - j0.6794)} \\ &\quad + \frac{-1.0717}{s - (-0.4974 + j0.4974)} + \frac{-1.0717}{s - (-0.4974 - j0.4974)} \\ &\quad + \frac{0.9281 - j1.6076}{s - (-0.6794 + j0.1821)} + \frac{0.9281 + j1.6076}{s - (-0.6794 - j0.1821)} \end{aligned}$$

将部分分式每个部分从  $s$  平面转换到  $z$  平面, 即

$$\frac{1}{s - p_k} \rightarrow \frac{1}{1 - \exp(p_k)z^{-1}}$$

并将其轭极点对组成 2 阶子系统, 得到级联结构的传输函数

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.2872 - 0.4471z^{-1}}{1 - 1.2980z^{-1} + 0.6960z^{-2}} + \frac{-2.1434 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0688z^{-1} + 0.3698z^{-2}} \\ &\quad + \frac{1.8562 - 0.6302z^{-1}}{1 - 0.9970z^{-1} + 0.2569z^{-2}} \end{aligned}$$

将3个分式合并,得到直接型结构的传输函数

$$H(z) = \frac{0.0007z^{-1} + 0.0097z^{-2} + 0.0167z^{-3} + 0.0039z^{-4} + 0.0001z^{-5}}{1 - 3.3638z^{-1} + 5.0697z^{-2} - 4.2777z^{-3} + 2.1078z^{-4} - 0.571z^{-5} + 0.0661z^{-6}}$$

(4) 线性和对数幅度响应如图5-12所示。可以看出,满足通带和阻带波纹指标的要求。

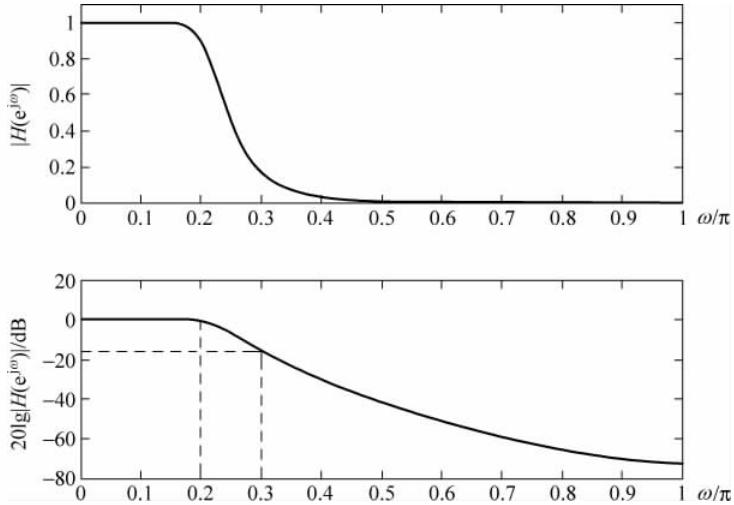


图5-12 例5.7用冲激响应不变法设计的滤波器的幅度响应

### 5.3.2 双线性变换法

在复变函数理论中,双线性变换是将某个变量的复平面上的函数映射到另一个变量的复平面上的一种方法,它将圆和直线分别映射成直线和圆。从  $s$  平面映射到  $z$  平面的双线性变换定义为

$$s = \frac{2}{T_s} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (5.64)$$

式中,  $T_s$  是取样周期。由式(5.64)解出  $z$ , 得到双线性变换的一种等效形式

$$z = \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \quad (5.65)$$

将  $s = \sigma + j\omega$  代入上式,并计算  $z$  的模,得到

$$|z| = \sqrt{\frac{(1 + \sigma T_s/2)^2 + (\omega T_s/2)^2}{(1 - \sigma T_s/2)^2 + (\omega T_s/2)^2}} \quad (5.66)$$

从式(5.66)看出,当  $\sigma < 0$  时,  $|z| < 1$ , 即左半  $s$  平面映射成  $z$  平面单位圆的内部; 当  $\sigma > 0$  时,  $|z| > 1$ , 即右半  $s$  平面映射成  $z$  平面单位圆的外部。因此,如果映射前的模拟滤波器是因果和稳定的,则映射后得到的数字滤波器也是因果和稳定的。当  $\sigma = 0$  时,  $|z| = 1$ , 即  $s$  平面的虚轴映射成  $z$  平面的单位圆。应当记得,冲激响应不变法利用式(5.56)即  $z = e^{j\omega T_s}$  进行  $s$  平面到  $z$  平面的映射,把  $s$  平面虚轴  $j\omega$  上长为  $2\pi/T_s$  的每一段都映射成

$z$  平面的单位圆,因此虚轴到单位圆的映射是多对一的映射,从而引起了频率混叠现象。而双线性变换则利用式(5.64)进行简单的代数映射,把  $s$  平面的整个虚轴  $j\Omega (-\infty \leq \Omega \leq \infty)$  映射成  $z$  平面的单位圆 ( $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ),是一对一的映射,从根本上避免了发生频率混叠。此外,双线性变换法映射简单,只需用式(5.64)取代  $H_a(s)$  中的  $s$  即得到  $H(z)$ ,因此获得了广泛应用。

双线性变换法与冲激响应不变法的最重要区别是,前者把整个  $s$  平面映射成  $z$  平面,而后者则把  $s$  平面上高度为  $2\pi/T_s$  的一个横带映射成  $z$  平面。为了进一步深入了解双线性变换对滤波器频率特性的影响,将  $z = e^{j\omega}$  和  $s = j\Omega$  同时代入式(5.64),得到

$$j\Omega = \frac{2}{T_s} \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = j \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2}$$

即

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2} \quad (5.67)$$

或

$$\omega = 2 \arctan \frac{\Omega T_s}{2} \quad (5.68)$$

从式(5.68)看出,双线性变换从模拟频率  $\Omega$  变换成数字频率  $\omega$ ,是图 5-13 所示的非线性变换关系。应当记得,在冲激响应不变法中,  $\Omega$  与  $\omega$  之间是线性变换关系  $\omega = \Omega T_s$ 。

图 5-13 只画出了  $0 \leq \Omega \leq \infty$  范围内的图形。根据正切函数的性质,当  $\Omega$  从 0 变到  $+\infty$  时,  $\omega$  将从 0 变到  $\pi$ ; 而当  $\Omega$  从 0 变到  $-\infty$  时,  $\omega$  将从 0 变到  $-\pi$ 。因此,双线性变换把模拟滤波器在  $-\infty \leq \Omega \leq +\infty$  范围内的频率特性  $|H_a(j\Omega)|$  压缩成为数字滤波器在  $-\pi < \omega \leq \pi$  范围内的频率特性  $|H(e^{j\omega})|$ 。这种非线性在低频段并不明显,因此对低通滤波器进行双线性变换所引起的频率失真一般很小。这种非线性可以用频率预失真方法补偿,即预先把给定的数字滤波器频率指标用双线性变换式(5.67)进行换算,得到

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_p}{2} \quad \text{和} \quad \Omega_s = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_s}{2}$$

因此,式(5.67)称为频率预失真函数。对于幅度响应基本上分段恒定的其他类型滤波器,如高通、带通和带阻滤波器,采取预失真补偿方法都能取得良好效果。但对于幅度响应起伏很大,例如梳形滤波器、微分器和线性相位响应滤波器,双线性变换方法是不适用的。

与冲激响应不变法一样,双线性变换式(5.64)中的参数  $T_s$  在设计中不起任何作用。虽然式(5.64)中有参数  $T_s$ ,但在设计过程中可以将它取成任何便于计算的数值,例如取

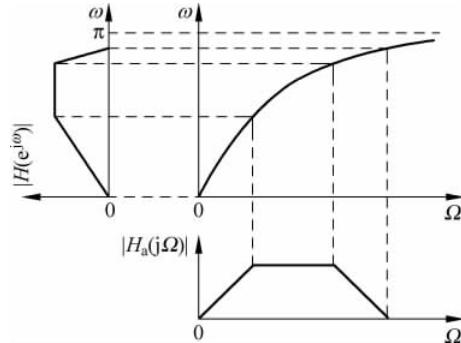


图 5-13 双线性变换中模拟频率  $\Omega$  与数字频率  $\omega$  之间的非线性变换关系

$T_s = 2$ , 则式(5.64)、式(5.65)、式(5.7)和式(5.8)中都将不包含参数  $T_s$ 。

**例 5.8** 采用双线性变换方法重新设计例 5.7 的低通滤波器。

**解** (1) 将给定的数字滤波器技术指标换算成模拟滤波器的技术指标。

利用式(5.67)进行频率预失真, 为计算方便, 取  $T_s = 1$

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_p}{2} = 2 \tan \frac{0.2\pi}{2} = 0.6498$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega_s}{2} = 2 \tan \frac{0.3\pi}{2} = 1.0191$$

将对数波纹指标换算成线性波纹指标

$$\delta_p = 1 - 10^{-A_p/20} = 1 - 10^{-1/20} = 0.1087$$

$$\delta_s = 10^{-A_s/20} = 10^{-15/20} = 0.1778$$

(2) 用式(5.22)估计滤波器的阶

$$r = \Omega_p / \Omega_s = 0.6498 / 1.0191 = 0.6376$$

$$d = \left( \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)^{1/2} = \left( \frac{10^{0.1} - 1}{10^{0.1 \times 15} - 1} \right)^{1/2} = 0.0920$$

$$N = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg 0.092}{\lg 0.6376} = 5.3003, \quad \text{向上取整得 } N = 6$$

由于双线性变换法没有频率混叠问题, 因此可以根据阻带波纹指标确定 3dB 截止频率, 这样得到的通带波纹是过设计的。由式(5.20)得到

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(\delta_s^2 - 1)^{1/(2N)}} = \frac{1.0191}{(0.1778^2 - 1)^{1/12}} = 0.7662$$

用式(5.24)计算 6 阶 Butterworth 滤波器的极点

$$\begin{aligned} p_k &= \Omega_c \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right) \right] \\ &= 0.7662 \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{12} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

$$p_0 = p_5^* = -0.1983 + j0.7401$$

$$p_1 = p_4^* = -0.5418 + j0.5418$$

$$p_2 = p_3^* = -0.7401 + j0.1983$$

根据以上极点构造 6 阶 Butterworth 模拟滤波器的传输函数

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=0}^5 (s - p_k)} \\ &= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.3966s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)} \end{aligned}$$

(3) 将式(5.64)代入  $H_a(s)$ , 经整理和化简后得到

$$H(z) = \frac{7.3794 \times 10^{-4} (1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.2687z^{-1} + 0.7052z^{-2})(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2})(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

或

$$H(z) = \frac{7.3794 \times 10^{-4} (1 + 6z^{-1} + 15z^{-2} + 20z^{-3} + 15z^{-4} + 6z^{-5} + z^{-6})}{1 - 3.1837z^{-1} + 4.6225z^{-2} - 3.7798z^{-3} + 1.8138z^{-4} - 0.4801z^{-5} + 0.0545z^{-6}}$$

图 5-14 是滤波器的线性幅度响应和对数幅度响应。可以看出, 基本满足设计指标。

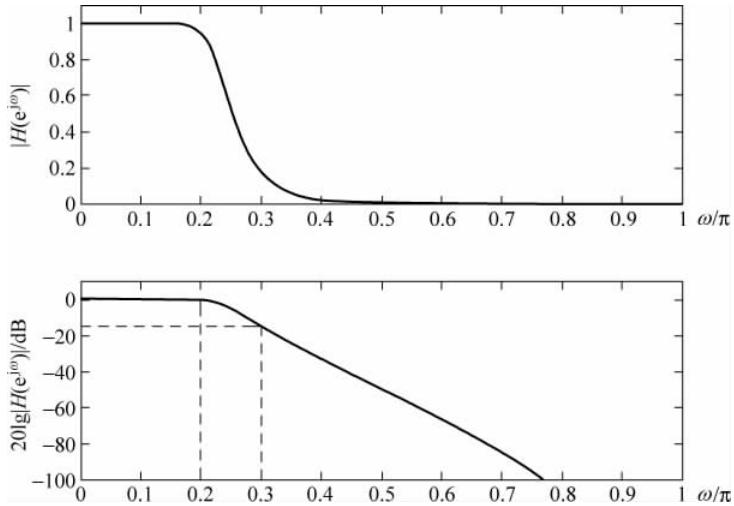


图 5-14 例 5.8 用双线性变换法设计的滤波器的幅度响应

## 5.4 模拟频率变换

通过频率归一化模拟低通滤波器(原型滤波器)设计 IIR 数字滤波器, 有图 5-1 所示两个方案, 它们都包括频率变换的步骤。第一个方案需要进行模拟频率变换, 即在模拟频域内把原型滤波器变换成具有希望频率特性的模拟滤波器; 第二个方案则需要进行数字频率变换, 即在数字频域内把频率归一化的数字低通滤波器变换成具有希望频率特性的数字滤波器。本节和 5.5 节分别介绍这两种频率变换的原理和方法。

模拟频率变换的目的是把原型滤波器变换成具有任意频率特性(低通、高通、带通和带阻)的模拟滤波器。设原型滤波器的传输函数和频率响应分别用  $H_{\text{NOR}}(\bar{s})$  和  $H_{\text{NOR}}(j\bar{\Omega})$  表示, 经模拟频率变换后得到的模拟滤波器的传输函数和频率响应分别用  $H_a(s)$  和  $H_a(j\Omega)$  表示。为完成这种变换, 需进行从变量  $\bar{s}$  到变量  $s$ , 或等效地从模拟频率  $\bar{\Omega}$  到模拟频率  $\Omega$  的变换, 表示为

$$\bar{s} = F(s) \quad \text{或} \quad j\bar{\Omega} = F(j\Omega) \quad (5.69)$$

式(5.69)称为频率变换函数。因此

$$H_a(s) = H_{\text{NOR}}(\bar{s})|_{\bar{s}=F(s)} = H_{\text{NOR}}(F(s)) \quad (5.70)$$

式中,  $F(s)$  是变换函数。设  $H_{\text{NOR}}(\bar{s})$  是有理函数, 为了使  $H_a(s)$  是有理函数, 要求  $F(s)$  也是有理函数。并非任何有理函数都可以作为变换函数, 变换函数还必须满足: ①为了保证变换后的滤波器是稳定的, 要求  $\bar{s}$  平面的虚轴  $j\bar{\Omega}$ 、左半和右半平面分别映射成  $s$  平面的虚轴  $j\Omega$ 、左半和右半平面; ②从式(5.69)看出, 对所有  $\Omega$ , 频率变换函数  $F(j\Omega)$  必须是

纯虚数。但是,频率变换并不要求必须是一对一的映射。下列形式的有理函数满足以上要求

$$\bar{s} = F(s) = \frac{k(s^2 + b_1^2)(s^2 + b_2^2)\dots}{s(s^2 + a_1^2)(s^2 + a_2^2)\dots} \quad (5.71)$$

式中,参数  $k, a_i$  和  $b_i$  都是实数。根据式(5.71)可以构造出常用的模拟频率变换函数。

### 5.4.1 从模拟原型滤波器到模拟低通滤波器的变换

图 5-15 左上图是原型滤波器( $\bar{\Omega}_p=1$  的低通滤波器)的幅度响应,下图是频率变换后得到的通带截止频率为  $\Omega_p$  的低通滤波器的幅度响应,二者在几个典型频率点上的对应关系是:

- (1)  $\bar{\Omega}=0$  对应于  $\Omega=0$ ;
- (2)  $\bar{\Omega}=\infty$  对应于  $\Omega=\infty$ ;
- (3)  $\bar{\Omega}=-\infty$  对应于  $\Omega=-\infty$ ;
- (4)  $\bar{\Omega}=\pm\bar{\Omega}_p=\pm 1$  对应于  $\Omega=\pm\Omega_p$ 。

显然,变换前后的频率轴  $\bar{\Omega}$  与  $\Omega$  呈线性变换关系,仅有尺度(或带宽)的改变。式(5.71)的最简单线性形式是

$$\bar{s} = ks \quad \text{即} \quad \bar{s} = \frac{k(s^2 + b_1^2)}{s}, \quad b_1 = 0 \quad (5.72)$$

式(5.72)对任何  $k$  值都满足上述前 3 项对应关系,常数  $k$  由(4)的对应关系确定,即  $\pm 1 = \pm k\Omega_p$ ,由此得到  $k=1/\Omega_p$ 。因此,式(5.72)变成

$$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_p} \quad \text{或} \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p} \quad (5.73)$$

$\bar{\Omega}$  与  $\Omega$  的线性函数关系如图 5-15 的右上图所示。

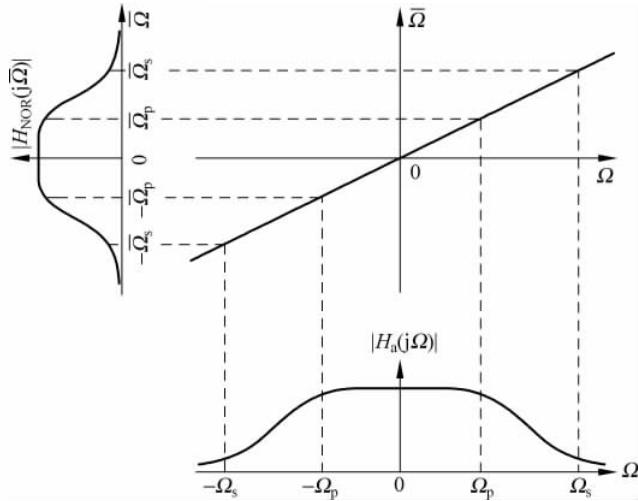


图 5-15 低通滤波器到低通滤波器的频率变换

回忆5.2.1节中设计Butterworth模拟低通滤波器的查表法,通过查表得出归一化( $\Omega_c=1\text{rad/s}$ )传输函数 $H_{\text{NOR}}(s)$ 后,用 $s/\Omega_c$ 替代 $H_{\text{NOR}}(s)$ 中的 $s$ 便得到任意 $\Omega_c$ 值的Butterworth低通滤波器的传输函数,那便是模拟频率变换的一个简单例子。

### 5.4.2 从模拟原型滤波器到模拟高通滤波器的变换

图5-16的下图是通带截止频率为 $\Omega_p$ 的高通滤波器的幅度响应,将其与左上图的原型滤波器幅度响应对照可以看出,它们的幅度响应沿频率轴方向刚好相反,因此,要将后者变换成前者,需要把低频段与高频段对换,这只要让 $\bar{\Omega}$ 与 $\Omega$ 呈倒数关系就可以了。式(5.71)最简单的倒数关系是 $\bar{s}=k/s$ ,其中,系数 $k$ 根据 $\bar{\Omega}$ 与 $\Omega$ 的对应关系求出。

由 $\bar{s}=k/s$ 得到 $\bar{\Omega}=-k/\Omega$ ,由此可以得出 $\bar{\Omega}$ 与 $\Omega$ 的变换关系: $\bar{\Omega}$ 从 $-\infty$ 变到0,变换成 $\Omega$ 从0变到 $+\infty$ ;  $\bar{\Omega}$ 从0变到 $+\infty$ ,变换成 $\Omega$ 从 $-\infty$ 变到0;  $\bar{\Omega}_p=1$ 变换成 $-\Omega_p$ ,即 $1=-k/(-\Omega_p)$ ,由此得到 $k=\Omega_p$ 。这样,由低通到高通的频率变换关系为

$$\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s} \quad \text{或} \quad \bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega} \quad (5.74)$$

如图5-16右上图所示。

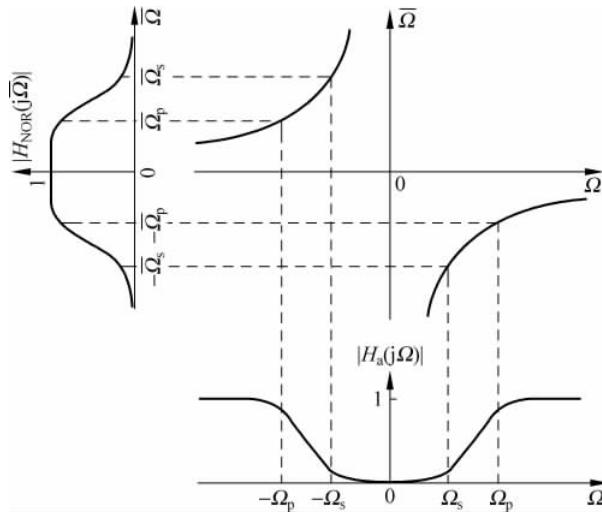


图5-16 低通滤波器到高通滤波器的频率变换

**例5.9** 用3阶Butterworth滤波器作原型滤波器,用模拟频率变换方法将其变换成通带频率为 $\Omega_p=2\text{rad/s}$ 的高通滤波器,并用MATLAB画出原型滤波器与高通滤波器的幅度响应。

**解** 查表5-1,直接写出3阶Butterworth原型滤波器的传输函数表达式

$$H_{\text{NOR}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

将  $\bar{s} = \Omega_p/s = 2/s$  代入上式, 得到高通滤波器的传输函数

$$H_a(s) = \frac{1}{(2/s)^3 + 2(2/s)^2 + 2(2/s) + 1} = \frac{s^3}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8}$$

用 MATLAB 绘制幅度响应的 m 文件如下:

```
b = [0 0 0 1]; a = [1 2 2 1]; [HNOR,w] = freqs(b,a);
b1 = [1 0 0 0]; a1 = [1 4 8 8]; [Ha,w] = freqs(b1,a1);
subplot(2,1,1)
plot(w,abs(HNOR))
subplot(2,1,2)
plot(w,abs(Ha))
```

运行程序得原型滤波器和高通滤波器的幅度响应如图 5-17 所示。

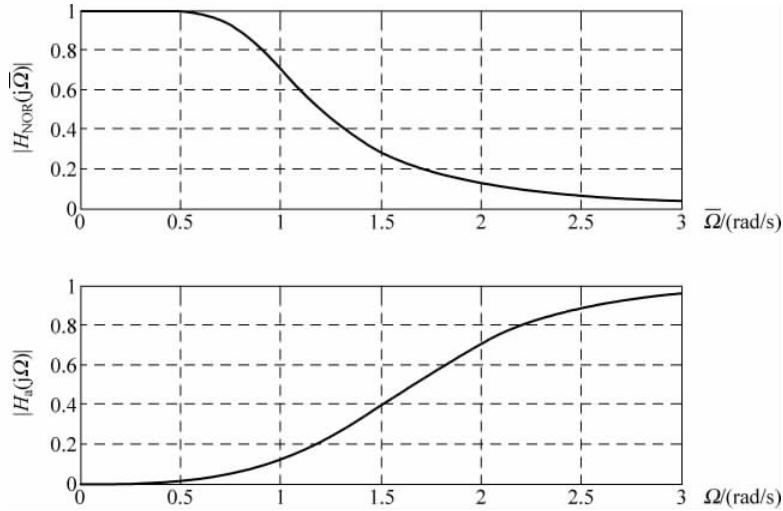


图 5-17 例 5.9 的原型滤波器和高通滤波器的幅度响应

### 5.4.3 从模拟原型滤波器到模拟带通滤波器的变换

图 5-18 中的下图是带通滤波器幅度响应  $|H_a(j\Omega)|$  的图形, 通带截止频率为  $\Omega_{p1}$  和  $\Omega_{p2}$ , 阻带截止频率为  $\Omega_{s1}$  和  $\Omega_{s2}$ ; 与左上图所示的原型滤波器幅度响应  $|H_{NOR}(j\bar{\Omega})|$  对照, 可以看出频率  $\Omega$  与  $\bar{\Omega}$  的变换关系:

- (1)  $\bar{\Omega}=\infty$  变换为  $\Omega=\infty$ ;
- (2)  $\bar{\Omega}=-\infty$  变换为  $\Omega=0$ ;
- (3)  $\bar{\Omega}=0$  变换为  $\Omega=\Omega_0$ , 其中  $\Omega_0$  是通带的中心频率;
- (4)  $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_p=1$  变换到  $\Omega=\Omega_{p2}$ ,  $\bar{\Omega}=-\bar{\Omega}_p=-1$  变换到  $\Omega=\Omega_{p1}$ 。

按照以上变换关系, 原型滤波器的全频带被转换成带通滤波器正频率轴和负频率轴两部分, 即它是一对二的多值变换。这意味着  $\bar{\Omega}$  至少是  $\Omega$  的二次函数, 因此  $\bar{s} = F(s)$  至

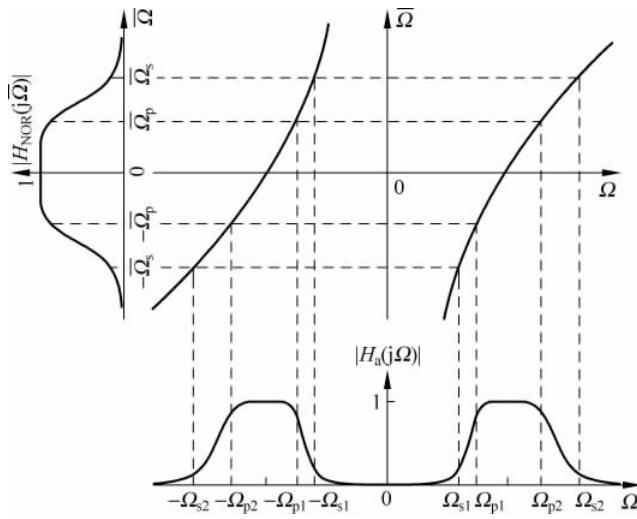


图 5-18 低通滤波器到带通滤波器的频率变换

少是二次函数。为了满足变换关系(1), $\bar{s}=F(s)$ 的分子多项式的次数应当比分母多项式高1次,因此,将式(5.71)用于带通变换最简单的函数关系是

$$\bar{s} = \frac{ks(s^2 + b_1^2)}{s^2 + a_1^2} \quad \text{或} \quad \bar{\Omega} = \frac{k\Omega(-\Omega^2 + b_1^2)}{-\Omega^2 + a_1^2} \quad (5.75)$$

可以看出,对于任何  $k, a_1$  和  $b_1$ ,都能保证把  $\bar{\Omega}=\infty$  变换为  $\Omega=\infty$ 。常数  $k, a_1$  和  $b_1$  可以利用上述其他变换关系求出。具体说,根据变换关系(2), $\Omega=0$  与  $\bar{\Omega}=-\infty$  是一对变换,为此必须选择  $a_1=0$ 。这样,式(5.75)简化为

$$\bar{s} = \frac{k(s^2 + b_1^2)}{s} \quad \text{或} \quad \bar{\Omega} = \frac{-k(-\Omega^2 + b_1^2)}{\Omega} \quad (5.76)$$

利用变换关系(4),得到

$$1 = \frac{-k(-\Omega_{p2}^2 + b_1^2)}{\Omega_{p2}^2} \quad \text{和} \quad -1 = \frac{-k(-\Omega_{p1}^2 + b_1^2)}{\Omega_{p1}^2}$$

联合求解以上两方程,得到

$$b_1^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2} \equiv \Omega_{0p}^2 \quad (5.77)$$

$$k = \frac{1}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = \frac{1}{B_p} \quad (5.78)$$

式中, $B_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$  是带通滤波器的通带宽度; $b_1 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \equiv \Omega_{0p}$  是通带的两个截止频率的几何均值,称为通带的中心频率。将式(5.77)和式(5.78)代入式(5.76),得出从原型低通滤波器到带通滤波器的频率变换公式

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = \frac{s^2 + \Omega_{0p}^2}{B_p s} \quad (5.79)$$

或

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{B_p \Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{0p}^2}{B_p \Omega} \quad (5.80)$$

根据式(5.80)画出的由低通到带通的频率变换函数关系曲线如图 5-18 的右上图所示。可以看出,右半平面和左半平面的两条曲线,分别将原型低通的幅度响应变换成  $\Omega$  的正负频率轴上的带通幅度响应。

**例 5.10** 用 Butterworth 滤波器作原型滤波器,用模拟频率变换方法将其变换成满足以下技术指标的带通滤波器

$$\begin{aligned} & [F_{s1}, F_{p1}, F_{p2}, F_{s2}, A_{s1}, A_p, A_{s2}] \\ & = [400\text{Hz}, 1000\text{Hz}, 2000\text{Hz}, 4000\text{Hz}, 30\text{dB}, 3\text{dB}, 30\text{dB}] \end{aligned}$$

并用 MATLAB 画出原型滤波器与带通滤波器的幅度响应。

**解** (1) 求频率变换函数。

$$\begin{aligned} \Omega_{0p}^2 &= \Omega_{p1}\Omega_{p2} = (2\pi \times 1000)(2\pi \times 2000) = 8\pi^2 \times 10^6 \\ B_p &= \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 2\pi(2000 - 1000) = 2\pi \times 10^3 \\ \bar{s} &= \frac{s^2 + \Omega_{0p}^2}{B_p s} = \frac{s^2 + 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 s} \quad \text{或} \quad \bar{\Omega} = -\frac{\Omega^2 - 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 \Omega} \end{aligned} \quad (5.81)$$

(2) 设计 Butterworth 原型滤波器。

首先用式(5.22)估计滤波器的阶,为此需要将给出的阻带截止频率换算成原型(低通)滤波器的阻带截止频率。

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{s1} &= F(\Omega_{s1}) = -\frac{\Omega_{s1}^2 - 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 \Omega_{s1}} = -\frac{(2\pi \times 400)^2 - 8\pi^2 \times 10^6}{(2\pi)^2 \times 4 \times 10^5} = -4.6 \\ \bar{\Omega}_{s2} &= F(\Omega_{s2}) = -\frac{\Omega_{s2}^2 - 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 \Omega_{s2}} = -\frac{(2\pi \times 4000)^2 - 8\pi^2 \times 10^6}{(2\pi)^2 \times 4 \times 10^6} = 3.5 \end{aligned}$$

注意,带通滤波器的两个阻带截止频率  $\Omega_{s2}$  和  $\Omega_{s1}$  分别与原型(低通)滤波器的正负阻带截止频率  $\bar{\Omega}_{s2}$  和  $\bar{\Omega}_{s1}$  相对应,即  $\bar{\Omega}_{s2} \Leftrightarrow \Omega_{s2}$  和  $\bar{\Omega}_{s1} \Leftrightarrow \Omega_{s1}$ 。但是在本例题中,  $\bar{\Omega}_{s2} \neq -\bar{\Omega}_{s1}$ ; 这与通带截止频率的对应关系不同,通带截止频率始终存在关系  $-\bar{\Omega}_{p1} = \bar{\Omega}_{p2} = \Omega_p = 1$ 。因此,在确定原型滤波器的设计指标时,必须考虑在  $\bar{\Omega} \leq \bar{\Omega}_{s1}$  和  $\bar{\Omega} \geq \bar{\Omega}_{s2}$  两个频率范围内都应当满足设计指标的要求,即保证至少有  $A_s = 30\text{dB}$  的衰减。因此应当把  $\bar{\Omega}_{s1}$  和  $\bar{\Omega}_{s2}$  二者中绝对值较小者作为原型滤波器的阻带截止频率,即选择  $\bar{\Omega}_s = 3.5$ 。这样,本例的原型滤波器的设计指标为:  $\bar{\Omega}_p = 1$ ,  $\bar{\Omega}_s = 3.5$ ,  $A_p = 1$ ,  $A_s = 30$ 。

由式(5.22)估计滤波器的阶

$$N = \frac{\lg \left( \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)^{1/2}}{\lg (\Omega_p / \Omega_s)} = \frac{\lg \left( \frac{10^{0.1} - 1}{10^{0.1 \times 20} - 1} \right)^{1/2}}{\lg (1/3.5)} = 2.373\,288\,4$$

向上取整得到  $N = 3$ 。查表 5-1 直接得出 3 阶 Butterworth 原型滤波器的传输函数表达式

$$H_{\text{NOR}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

(3) 模拟频率变换

将式(5.81)代入上式便可得到带通滤波器的传输函数。但为了计算方便,先将原型滤波器的传输函数表达式改写成以下形式

$$H_{\text{NOR}}(\bar{s}) = \frac{1}{(\bar{s} + 1)(\bar{s}^2 + \bar{s} + 1)}$$

然后将式(5.81)代入,得到的带通滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s^2 + 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 s} + 1\right) \left[ \left(\frac{s^2 + 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 s}\right)^2 + \frac{s^2 + 8\pi^2 \times 10^6}{2\pi \times 10^3 s} + 1 \right]} \\ &= \frac{(B_p s)^3}{(s^2 + B_p s + \Omega_{0p}^2) [(s^2 + \Omega_{0p}^2)^2 + (s^2 + \Omega_{0p}^2)(B_p s) + (B_p s)^2]} \end{aligned}$$

用 MATLAB 画出的幅度响应如图 5-19 所示。

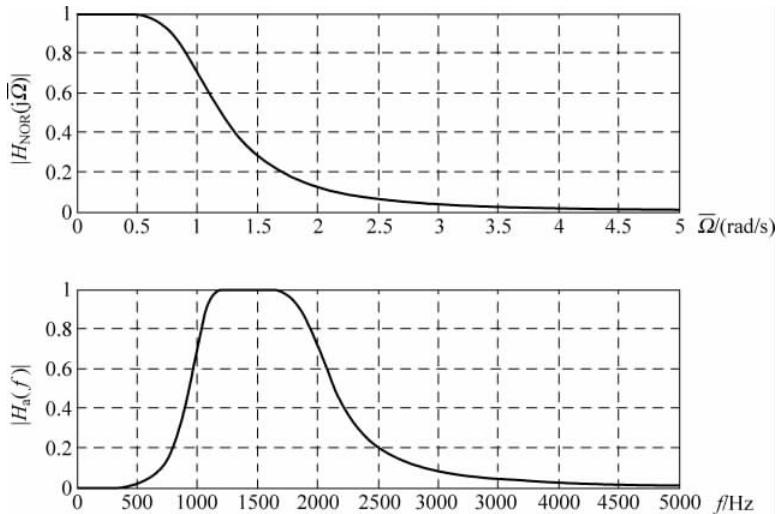


图 5-19 例 5.10 的原型滤波器和带通滤波器的幅度响应

#### 5.4.4 从模拟原型滤波器到模拟带阻滤波器的变换

图 5-20 下部是带阻滤波器的幅度响应  $|H_a(j\Omega)|$ , 其中,  $\Omega_{s1}$  和  $\Omega_{s2}$  是阻带截止频率,  $\Omega_{p1}$  和  $\Omega_{p2}$  是通带截止频率。左上部是原型滤波器的幅度响应  $|H_{\text{NOR}}(j\bar{\Omega})|$ 。将  $|H_a(j\Omega)|$  与  $|H_{\text{NOR}}(j\bar{\Omega})|$  对照可以看出, 频率  $\Omega$  与  $\bar{\Omega}$  具有下列对应关系:

$$\bar{\Omega} = 0 \Leftrightarrow \Omega = 0 \quad \text{和} \quad \bar{\Omega} = \infty \Leftrightarrow \Omega = \infty$$

因此, 一种可能选择是将式(5.71)取为

$$\bar{s} = \frac{ks}{s^2 + a_1^2} \quad \text{或} \quad \bar{\Omega} = \frac{k\Omega}{-\Omega^2 + a_1^2} \quad (5.82)$$

此外,  $\Omega$  与  $\bar{\Omega}$  还具有对应关系:  $\bar{\Omega}_s \Leftrightarrow \Omega_{s1}$  和  $-\bar{\Omega}_s \Leftrightarrow \Omega_{s2}$ , 即

$$\bar{\Omega}_s = \frac{k\Omega_{s1}}{-\Omega_{s1}^2 + a_1^2} \quad \text{和} \quad -\bar{\Omega}_s = \frac{k\Omega_{s2}}{-\Omega_{s2}^2 + a_1^2}$$

联合求解上列两个方程, 得到

$$a_1^2 = \Omega_{s1}\Omega_{s2} \equiv \Omega_{0s}^2 \quad (5.83)$$

$$k = \Omega_s(\Omega_{s2} - \Omega_{s1}) = B_s\Omega_s \quad (5.84)$$

式中,  $B_s = \Omega_{s2} - \Omega_{s1}$  是阻带宽度;  $a_1 = \sqrt{\Omega_{s1}\Omega_{s2}} \equiv \Omega_{0s}$  是两个阻带截止频率的几何均值, 称为阻带中心频率。将式(5.83)和式(5.84)代入式(5.82), 最后得出从原型低通滤波器到带阻滤波器的频率变换公式

$$\bar{s} = \frac{\Omega_s(\Omega_{s2} - \Omega_{s1})s}{s^2 + \Omega_{s1}\Omega_{s2}} = \frac{\Omega_s B_s s}{s^2 + \Omega_{0s}^2} \quad (5.85)$$

或

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega_s(\Omega_{s2} - \Omega_{s1})\Omega}{-\Omega^2 + \Omega_{s1}\Omega_{s2}} = \frac{\Omega_s B_s \Omega}{-\Omega^2 + \Omega_{0s}^2} \quad (5.86)$$

根据式(5.86)画出由低通滤波器到带阻滤波器的频率变换函数关系曲线如图 5-20 的右上图所示。参数  $\Omega_s$  实际上不影响变换结果, 因此可以任意选取, 为了方便, 可以根据  $\Omega_p = 1$  来决定  $\Omega_s$  的值。

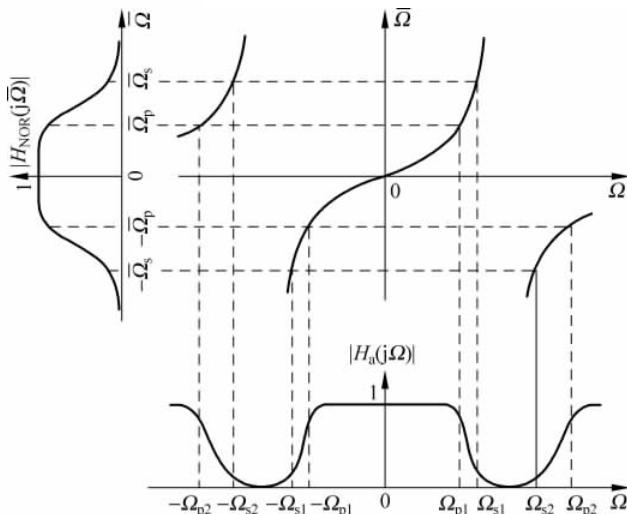


图 5-20 低通滤波器到带阻滤波器的频率变换

**例 5.11** 用模拟频率变换方法设计一个满足以下指标的带阻滤波器。

$$F_{s1} = 400\text{Hz}, F_{s2} = 600\text{Hz}, A_s = 25\text{dB}$$

$$F_{p1} = 100\text{Hz}, F_{p2} = 900\text{Hz}, A_{p1} = A_{p2} = 3\text{dB}$$

**解** (1) 由式(5.85)和式(5.86)得到频率变换函数

$$\bar{s} = \frac{2\pi(600 - 400)\Omega_s s}{s^2 + 4\pi^2 \times 24 \times 10^4} \quad \text{和} \quad \bar{\Omega} = \frac{2\pi \times 200\Omega_s \Omega}{-\Omega^2 + 4\pi^2 \times 24 \times 10^4}$$

(2) 设计原型滤波器

$$\bar{\Omega}_{p1} = F(\Omega_{p1}) = \frac{2\pi \times 200\Omega_s (2\pi \times 100)}{-(2\pi \times 100)^2 + 4\pi^2 \times 24 \times 10^4} = 0.087\Omega_s$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = F(\Omega_{p2}) = \frac{2\pi \times 200\Omega_s (2\pi \times 900)}{-(2\pi \times 900)^2 + 4\pi^2 \times 24 \times 10^4} = -0.316\Omega_s$$

为了使通带( $\bar{\Omega} \leq \bar{\Omega}_{p1} = 0.087\Omega_s$  和  $\bar{\Omega} \geq \bar{\Omega}_{p2} = 0.316\Omega_s$ )内最大衰减不超过  $A_p = 3\text{dB}$ , 选择  $\bar{\Omega}_p = \bar{\Omega}_{p2} = 0.316\Omega_s$ 。由于原型滤波器的  $\bar{\Omega}_p = 1$ , 所以得到  $\Omega_s = \bar{\Omega}_p / 0.316 = 1 / 0.316 = 3.1646$ 。因此, 需要设计的原型滤波器必须满足以下技术指标

$$\Omega_p = 1\text{rad/s}, \quad A_p = 3\text{dB}, \quad \Omega_s = 3.1646\text{rad/s}, \quad A_s = 25\text{dB}$$

由式(5.22)估计滤波器的阶

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}\right)^{1/2}}{\lg(\Omega_p/\Omega_s)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.3} - 1}{10^{0.1 \times 25} - 1}\right)^{1/2}}{\lg(1/3.1646)} = 2.1962$$

向上取整得  $N=3$ 。查表 5-1, 得 3 阶 Butterworth 滤波器的传输函数表达式

$$H_{\text{NOR}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1} = \frac{1}{(\bar{s} + 1)(\bar{s}^2 + \bar{s} + 1)}$$

将(1)得到的频率变换函数代入上式, 经整理后得到

$$H_a(s) = \frac{s^6 + 3\Omega_{0p}^2 s^4 + 3\Omega_{0p}^4 s^2 + \Omega_{0p}^6}{s^6 + 2B_p s^5 + (2B_p^2 + 3\Omega_{0p}^2) s^4 + (4B_p \Omega_{0p}^2 + B_p^3) s^3 + (3\Omega_{0p}^4 + 2B_p^2 \Omega_{0p}^2) s^2 + 2B_p \Omega_{0p}^4 s + \Omega_{0p}^6}$$

其中,  $B_p = 3.16 \times 400\pi$ ,  $\Omega_{0p}^2 = 96\pi^2 \times 10^4$ 。用  $s=j\bar{\Omega}$  代入  $|H_a(s)|$ , 即得到带阻滤波器的幅度响应, 如图 5-21 所示。

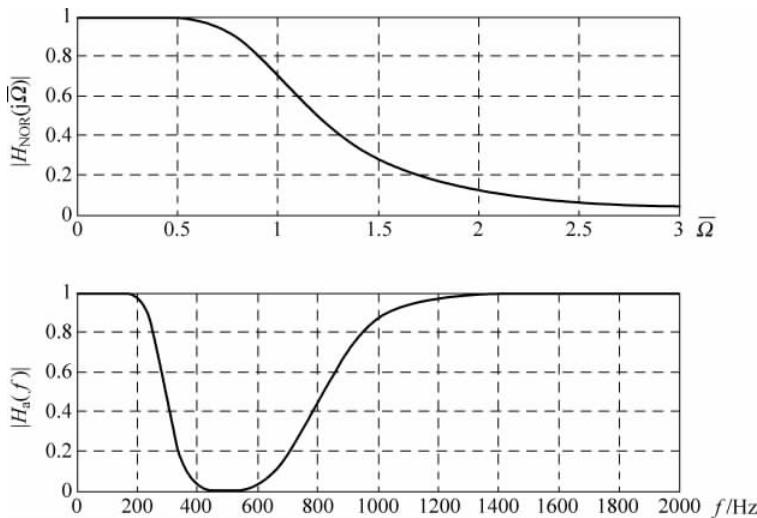


图 5-21 例 5.11 的原型滤波器和带阻滤波器的幅度响应

表 5-3 总结了 4 种基本形式的模拟频率变换。注意: ①变换前的原型滤波器是 3dB 截止频率  $\Omega_c = 1\text{rad/s}$  的模拟低通滤波器  $H_{\text{NOR}}(\bar{s})$ , 变换后得到的模拟滤波器的传输函数为  $H_s(s)$ ; ②原型到高通与原型到低通、原型到带阻与原型到带通, 它们的变换函数具有倒数关系。

表 5-3 常用模拟频率变换  $H_a(s) = H_{\text{NOR}}[F(s)]$ 

$H_a(s)$	$\bar{s} = F(s)$
通带截止频率为 $\Omega_p$ 的低通滤波器	$\frac{s}{\Omega_p}$
通带截止频率为 $\Omega_p$ 的高通滤波器	$\frac{\Omega_p}{s}$
通带截止频率为 $\Omega_{p1}$ 和 $\Omega_{p2}$ 的带通滤波器	$\frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})s}$
阻带截止频率为 $\Omega_{s1}$ 和 $\Omega_{s2}$ 的带阻滤波器	$\frac{\Omega_s(\Omega_{s2} - \Omega_{s1})s}{s^2 + \Omega_{s1}\Omega_{s2}}$

## 5.5 数字频率变换

在图 5-1 所示的设计 IIR 数字滤波器的第二个方案中,原型滤波器设计完成后,得到频率归一化的模拟低通传输函数  $H_a(s)$ ; 然后,通过  $s$  平面到  $z$  平面的映射把  $H_a(s)$  映射成数字低通传输函数  $H_{LP}(z)$ ; 最后,在数字频域进行频率变换,把  $H_{LP}(z)$  变换成具有期望频率响应的数字滤波器  $H(z)$ 。为了便于区分,下面将变换前后的复平面分别称为  $v$  平面和  $z$  平面,将数字频率变量分别用  $\theta$  和  $\omega$  表示。因此,变换前后数字滤波器的传输函数分别为  $H_{LP}(v)$  和  $H(z)$ ,而频率响应分别为  $H_{LP}(e^{j\theta})$  和  $H(e^{j\omega})$ 。

设  $v$  平面到  $z$  平面的变换函数为

$$v^{-1} = F(z^{-1}) \quad \text{或} \quad e^{-j\theta} = F(e^{-j\omega}) \quad (5.87)$$

为了使有理函数  $H_{LP}(v)$  变换成有理函数  $H(z)$ ,  $F(z^{-1})$  应该是有理函数; 为了使因果和稳定的  $H_{LP}(v)$  变换成因果和稳定的  $H(z)$ ,  $v$  平面的单位圆内部区域应当映射成  $z$  平面的单位圆内部区域。因此,若把式(5.87)的映射表示成

$$e^{-j\theta} = |F(e^{-j\omega})| \exp\{\text{jarg}[F(e^{-j\omega})]\}$$

则映射条件为

$$\begin{cases} |F(e^{-j\omega})| = 1 \\ \theta = -\text{arg}[F(e^{-j\omega})] \end{cases} \quad (5.88)$$

这意味着,变换函数  $F(z^{-1})$  是一个全通函数,可以表示为

$$F(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \quad (5.89)$$

式中,  $\alpha_k$  是  $F(z^{-1})$  的极点, 必须在单位圆内, 即  $|\alpha_k| < 1$ 。选择不同的  $N$  和  $\alpha_k$ , 可得到不同的变换函数。

### 5.5.1 数字低通滤波器到数字低通滤波器的频率变换

图 5-22 的右下图和左上图分别是变换前后的幅度响应,它们都是低通函数,只是截止频率改变了。具体说,当  $\theta$  由 0 变到  $\pi$  时,  $\omega$  相应地也由 0 变到  $\pi$ ; 这相当于将

$v=1$  映射成  $z=1$ , 和将  $v=-1$  映射成  $z=-1$ 。若选择  $N=1$ , 则式(5.89)具有最简单形式

$$v^{-1} = F(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (5.90)$$

式(5.90)显然满足  $v$  与  $z$  之间的映射关系。

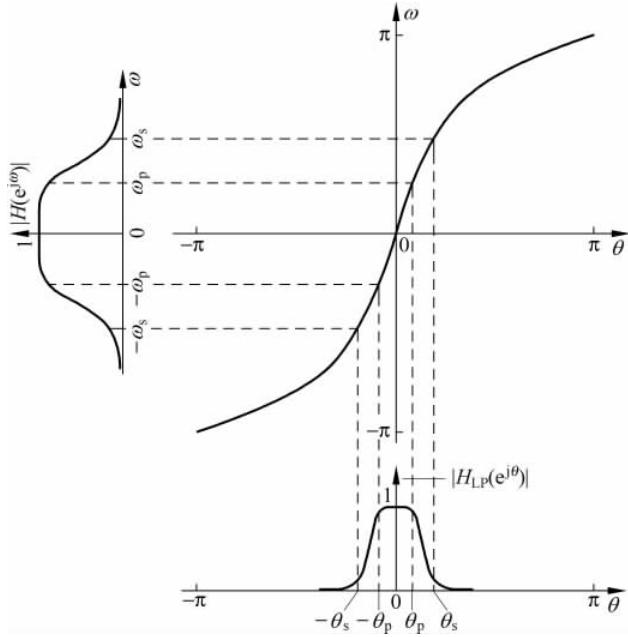


图 5-22 数字低通滤波器到数字低通滤波器的频率变换

将  $v=e^{j\omega}$  和  $z=e^{j\omega}$  代入式(5.90), 得到数字频率映射关系

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}} \quad \text{或} \quad e^{-j\omega} = \frac{a + e^{-j\theta}}{1 + ae^{-j\theta}} \quad (5.91)$$

由式(5.91)可推导出

$$\omega = \arctan \left[ \frac{(1-a^2)\sin\theta}{2a + (1+a^2)\cos\theta} \right] \quad (5.92)$$

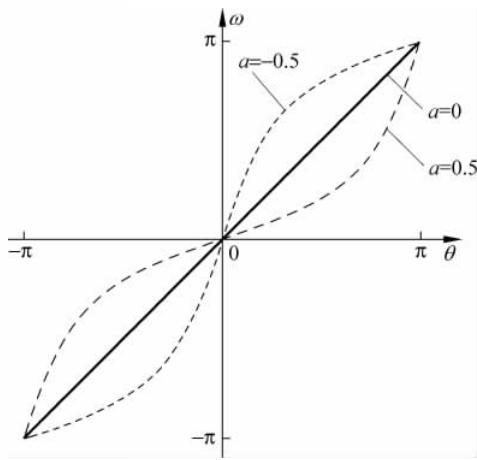
图 5-22 的右上图是取  $a=-0.5$  时根据式(5.92)画出的  $\omega$  与  $\theta$  之间的函数关系曲线。若取  $a=0$ , 则有  $\omega=\theta$ , 即  $\omega$  与  $\theta$  之间的函数关系曲线是一条通过坐标原点倾斜  $45^\circ$  的直线;  $a<0$  意味着频率轴扩展, 而  $a>0$  意味着频率轴压缩; 如图 5-23 所示。

参数  $a$  可以利用频率映射关系  $\theta_p \Leftrightarrow \omega_p$  求出, 由式(5.91)

$$e^{-j\theta_p} = \frac{e^{-j\omega_p} - a}{1 - ae^{-j\omega_p}}$$

解出

$$a = \frac{e^{-j\omega_p} - e^{-j\theta_p}}{1 - e^{-j(\theta_p + \omega_p)}} = \frac{\sin[(\theta_p - \omega_p)/2]}{\sin[(\theta_p + \omega_p)/2]} \quad (5.93)$$

图 5-23 对应不同参数  $a$  的低通到低通数字频率变换函数曲线

### 5.5.2 数字低通滤波器到数字高通滤波器的频率变换

用 $-z$ 取代传输函数 $H(z)$ 中的 $z$ ,相当于频率响应沿数字频率轴移位 $\pi$ (或沿单位圆循环移位 $\pi$ ),这样,低通滤波器变成高通滤波器。因此,只要在低通频率变换公式(5.90)中用 $-z$ 取代 $z$ ,即可得出高通频率变换公式,即

$$v^{-1} = F(-z^{-1}) = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az} \quad (5.94)$$

在单位圆上有

$$e^{-j\theta} = -\frac{e^{-j\omega} + a}{1 + ae^{-j\omega}} \quad (5.95)$$

将图 5-24 中右下图所示的原型低通滤波器与左上图所示的高通滤波器的幅度响应进行比较可以看出,高通频率变换的映射关系是: $\omega=0 \Leftrightarrow \theta=\pm\pi$  和  $\omega=\pm\pi \Leftrightarrow \theta=0$ ,式(5.95)的确满足这两个映射关系,因为

$$e^{\pm j\pi} = -\frac{e^{-j0} + a}{1 + ae^{-j0}} \quad \text{和} \quad e^{-j0} = -\frac{e^{\pm j\pi} + a}{1 + ae^{\pm j\pi}}$$

参数  $a$  根据映射关系  $\omega=\omega_p \Leftrightarrow \theta=\theta_p$  求出,由式(5.95)

$$e^{-j\theta_p} = -\frac{e^{-j\omega_p} + a}{1 + ae^{-j\omega_p}}$$

解出

$$a = -\frac{\cos[(\theta_p - \omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p + \omega_p)/2]} \quad (5.96)$$

将式(5.96)确定的参数  $a$  代入式(5.95),得到的高通频率变换函数曲线示于图 5-24 的右上图(设  $\theta_p=1$  和  $\omega_p=1.2$ ),曲线位于第一和第三象限内。

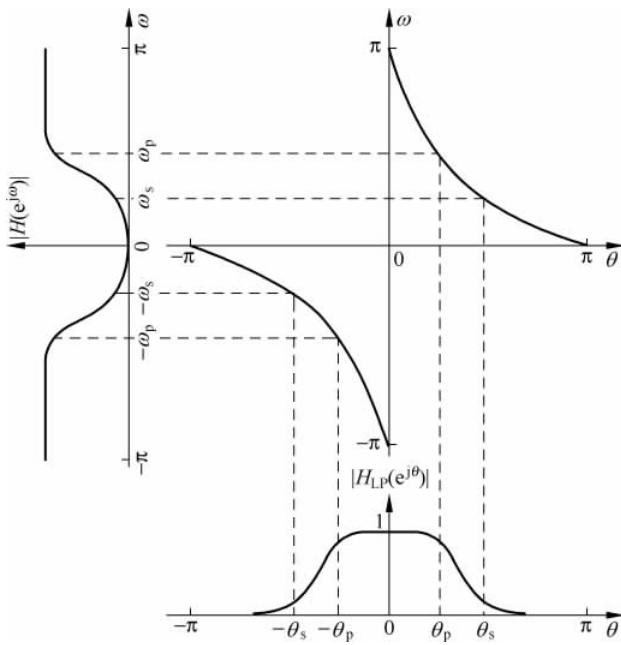


图 5-24 数字低通滤波器到数字高通滤波器的频率变换

参数  $a$  也可以根据映射关系  $\omega = \omega_p \Leftrightarrow \theta = -\theta_p$  推导, 这种情况下有

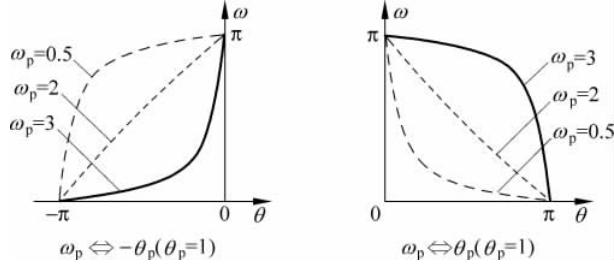
$$e^{j\theta_p} = -\frac{e^{-j\omega_p} + a}{1 + a e^{-j\omega_p}}$$

由此解出的参数  $a$  的计算公式为

$$a = -\frac{\cos[(\theta_p + \omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p - \omega_p)/2]} \quad (5.97)$$

将式(5.97)确定的参数  $a$  代入式(5.95), 得到的高通频率变换函数曲线出现在第二和第四象限内。

用式(5.96)或式(5.97)确定参数  $a$ , 得到的滤波器的幅度响应相同, 只是相位响应有区别。此外, 取  $\theta_p=1$  和不同的  $\omega_p$  值时, 两种情况下的频率变换函数曲线如图 5-25 所示, 图中只画出了第一和第二象限的图形。

图 5-25  $\theta_p=1$  和不同的  $\omega_p$  值时的高通频率变换函数曲线

按照同样思路,也可以在低通频率变换公式(5.90)中用 $-v$ 取代 $v$ 来导出高通频率变换公式,这样可以得出另外一种形式的变换公式

$$v^{-1} = -F(z^{-1}) = -\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (5.98)$$

其中,参数 $a$ 如果根据映射关系 $\omega = \omega_p \Leftrightarrow \theta = \theta_p$ 推导,则得出

$$a = \frac{\cos[(\theta_p - \omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p + \omega_p)/2]} \quad (5.99)$$

式(5.99)与式(5.96)仅仅符号不同。如果对比式(5.98)与式(5.94),这是很自然的结果,因为式(5.98)与式(5.94)中的参数 $a$ 本来就相差一个符号。

### 5.5.3 数字低通滤波器到数字带通滤波器的频率变换

将图5-26右下方的低通原型幅度响应与左上方的带通进行比较,可以看出,带通的中心频率 $\omega_0$ 对应于低通原型的零频率 $\theta=0$ ;当带通的频率从 $\omega_0$ 变到 $\pi$ 时,由通带走向阻带,对应于 $\theta$ 从0变到 $\pi$ ;而当 $\omega$ 由 $\omega_0$ 变到 $-\pi$ 时,也是由通带走向阻带,但却对应于 $\theta$ 从0变到 $-\pi$ 。这样,当 $\omega$ 由0变到 $\pi$ 时, $\theta$ 相应地从 $-\pi$ 变到 $\pi$ ,总共变化 $2\pi$ 。这就决定了式(5.89)所定义的全通函数必须是一个2次函数,即

$$F(z^{-1}) = \pm \frac{z^{-1} - \alpha_1}{1 - \alpha_1 z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - \alpha_2}{1 - \alpha_2 z^{-1}} = \pm \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1} \quad (5.100)$$

与前面两种变换类似,式中的参数 $a_1$ 和 $a_2$ 可以根据通带截止频率的下列映射关系来确定

$$\omega_{p1} \Leftrightarrow -\theta_p \quad \text{和} \quad \omega_{p2} \Leftrightarrow \theta_p$$

推导结果如表5-4所示。

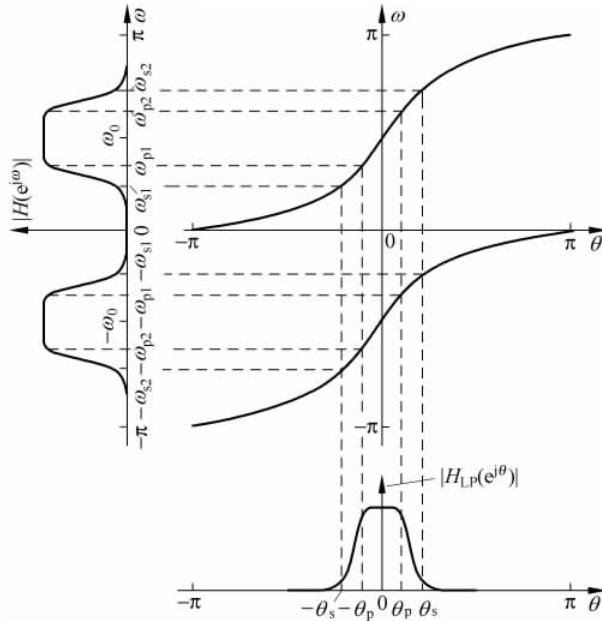


图5-26 数字低通滤波器到数字带通滤波器的频率变换

### 5.5.4 数字低通滤波器到数字带阻滤波器的频率变换

从低通到带阻的变换,同样可以将带通变换中的 $z$ 用 $-z$ 取代来得到。图 5-27 所示的是频率变换函数以及变换前后幅度响应的示意图。

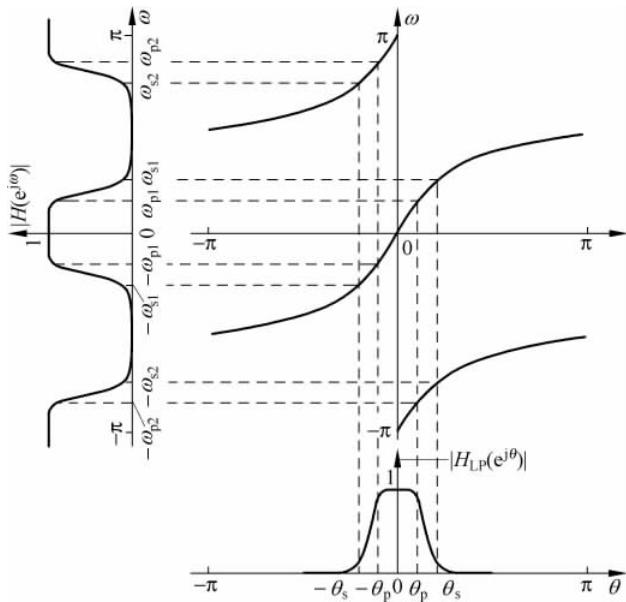


图 5-27 数字低通滤波器到数字带阻滤波器的频率变换

表 5-4 总结了以上 4 种数字频率变换。其中,  $\theta_p$  是变换前的数字低通原型滤波器的通带截止频率。

表 5-4 常用的数字频率变换  $H(z)=H_{lp}[F(z^{-1})]$

$H(z)$	$v^{-1}=F(z^{-1})$	参数
通带截止频率为 $\omega_p$ 的低通滤波器	$\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$	$a=\frac{\sin[(\theta_p-\omega_p)/2]}{\sin[(\theta_p+\omega_p)/2]}$
通带截止频率为 $\omega_p$ 的高通滤波器	$-\frac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}$	$a=-\frac{\cos[(\theta_p-\omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p+\omega_p)/2]}$
通带截止频率为 $\omega_{pl}$ 和 $\omega_{p2}$ 的带通滤波器	$-\frac{z^{-2}+a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}+a_1z^{-1}+1}$	$a_1=-2\alpha\beta/(\beta+1)$ $a_2=(\beta-1)/(\beta+1)$ $\alpha=\frac{\cos[(\omega_{p2}+\omega_{pl})/2]}{\cos[(\omega_{p2}-\omega_{pl})/2]}$ $\beta=\cot\frac{\omega_{p2}-\omega_{pl}}{2}\tan\frac{\theta_p}{2}$

续表

$H(z)$	$v^{-1} = F(z^{-1})$	参数
通带截止频率为 $\omega_{p1}$ 和 $\omega_{p2}$ 的带阻滤波器	$\frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = -2\alpha/(\beta+1)$ $a_2 = (1-\beta)/(\beta+1)$ $\alpha = \frac{\cos[(\omega_{p2} + \omega_{p1})/2]}{\cos[(\omega_{p2} - \omega_{p1})/2]}$ $\beta = \tan \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} \tan \frac{\theta_p}{2}$

## 5.6 设计 IIR 数字滤波器的一般步骤

第一步：将给出的数字滤波器设计指标换算成原型滤波器设计指标。

原型滤波器是指频率归一化的低通模拟滤波器。首先需要把已知的数字滤波器设计指标转换成模拟滤波器指标，然后转换成低通模拟滤波器指标，并进行频率归一化。

第二步：设计原型滤波器。

按照应用要求选择 5.2 节中某种滤波器作为原型滤波器，根据原型滤波器技术指标设计归一化的低通模拟滤波器(原型滤波器)。

第三步：选择一种设计方案。

(1) 图 5-1(a)的方案：利用模拟频率变换方法，将第二步设计的原型滤波器变换成具有希望频率特性的模拟滤波器。

(2) 图 5-1(b)的方案：利用冲激响应不变法或双线性变换法，将第二步设计的原型滤波器映射成频率归一化的低通数字滤波器(称为原型数字滤波器)。

第四步：与第三步相对应有两种不同方案。

(1) 图 5-1(a)的方案：利用冲激响应不变法或双线性变换法，把第三步(1)得到的模拟滤波器映射成具有希望频率特性的数字滤波器。

(2) 图 5-1(b)的方案：利用数字频率变换方法，把第三步(2)得到的原型数字滤波器变换成具有希望频率特性的数字滤波器。

关于第一步需要进一步加以说明。把已知的数字滤波器设计指标转换成相应的模拟滤波器指标，主要是把数字频率转换成模拟频率，而通带波纹和阻带衰减保持不变。将数字频率转换成模拟频率，可以采用冲激响应不变法，即利用式(5.59)进行线性频率变换

$$\Omega = \omega / T_s$$

也可以采用双线性变换法，即利用式(5.67)进行非线性频率变换

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2}$$

采用何种频率变换方法，取决于把模拟滤波器转换成数字滤波器时将要采用何种映射方法。

将任意低通滤波器截止频率  $\Omega_p$  和  $\Omega_s$  转换成原型滤波器截止频率  $\bar{\Omega}_p$  和  $\bar{\Omega}_s$  的方法

很简单,只需用  $\Omega_p$  归一化就可以了,即  $\bar{\Omega}_p = \Omega_p / \Omega_p = 1$  和  $\bar{\Omega}_s = \Omega_s / \Omega_p$ 。将高通滤波器截止频率  $\Omega_p$  和  $\Omega_s$  转换成原型滤波器截止频率  $\bar{\Omega}_p$  和  $\bar{\Omega}_s$  的方法仍然是用  $\Omega_p$  归一化,但与低通滤波器的情况不同的是,转换前后的频率  $\Omega$  与  $\bar{\Omega}$  之间的关系是  $\bar{\Omega} = \Omega_p / \Omega$  而不是  $\bar{\Omega} = \Omega / \Omega_p$ 。

将带通滤波器截止频率  $\Omega_{p1}, \Omega_{p2}, \Omega_{s1}, \Omega_{s2}$  转换成原型滤波器截止频率  $\bar{\Omega}_p$  和  $\bar{\Omega}_s$  的方法比较复杂,具体方法是:

(1) 计算通带宽度和通带中心频率的平方

$$B_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}, \quad \Omega_{0p}^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2}$$

(2) 用式(5.80)的频率变换函数计算阻带截止频率  $\bar{\Omega}_{s1}$  和  $\bar{\Omega}_{s2}$

$$\bar{\Omega}_{s1} = \frac{\Omega_{s1}^2 - \Omega_{0p}^2}{B_p\Omega_{s1}}, \quad \bar{\Omega}_{s2} = \frac{\Omega_{s2}^2 - \Omega_{0p}^2}{B_p\Omega_{s2}}$$

选择二者中绝对值较小者作为原型滤波器的阻带截止频率,即

$$\bar{\Omega}_s = \min(|\bar{\Omega}_{s1}|, |\bar{\Omega}_{s2}|)$$

(3) 最后得到原型滤波器的设计指标:  $\bar{\Omega}_p = 1, \bar{\Omega}_s, A_p$  和  $A_s$ 。

将带阻滤波器截止频率转换成原型滤波器截止频率的方法与带通滤波器类似,具体方法是:

(1) 计算阻带宽度和阻带中心频率的平方

$$B_s = \Omega_{s2} - \Omega_{s1}, \quad \Omega_{0s}^2 = \Omega_{s1}\Omega_{s2}$$

(2) 用式(5.86)的频率变换函数计算通带截止频率  $\bar{\Omega}_{p1}$  和  $\bar{\Omega}_{p2}$

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega_s B_s \Omega_{p1}}{-\Omega_{p1}^2 + \Omega_{0s}^2}, \quad \bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega_s B_s \Omega_{p2}}{-\Omega_{p2}^2 + \Omega_{0s}^2}$$

选择二者中绝对值较大者作为通带截止频率,即

$$\Omega_p = \max(|\bar{\Omega}_{p1}|, |\bar{\Omega}_{p2}|)$$

将其归一化后,得到原型滤波器的通带截止频率,即  $\bar{\Omega}_p = \Omega_p / \Omega_p = 1$ ; 并以此确定  $\Omega_s$ , 即

$$\bar{\Omega}_s = \bar{\Omega}_p / \Omega_p = 1 / \Omega_p$$

(3) 最后得到原型滤波器的设计指标:  $\bar{\Omega}_p = 1, \bar{\Omega}_s, A_p$  和  $A_s$ 。

**例 5.12** 用 Butterworth 滤波器作原型滤波器,采用双线性变换方法,设计一个满足以下指标的带通滤波器:  $F_{s1} = 1\text{kHz}, F_{s2} = 3\text{kHz}, F_{p1} = 1.4\text{kHz}, F_{p2} = 2.6\text{kHz}, A_p = 3\text{dB}, A_s = 15\text{dB}, f_s = 8\text{kHz}$ 。利用图 5-1(a)的方案进行设计。

**解** 第一步: 将给出的数字滤波器设计指标换算成原型(模拟低通)滤波器设计指标。

$$\omega_{s1} = 2\pi F_{s1} / f_s = 2\pi \times 1000 / 8000 = 0.25\pi$$

$$\omega_{s2} = 2\pi F_{s2} / f_s = 2\pi \times 3000 / 8000 = 0.75\pi$$

$$\omega_{p1} = 2\pi F_{p1} / f_s = 2\pi \times 1400 / 8000 = 0.35\pi$$

$$\omega_{p2} = 2\pi F_{p2} / f_s = 2\pi \times 2600 / 8000 = 0.65\pi$$

$$\Omega_{s1} = \tan \frac{\omega_{s1}}{2} = \tan \frac{0.25\pi}{2} = 0.4142$$

$$\Omega_{s2} = \tan \frac{\omega_{s2}}{2} = \tan \frac{0.75\pi}{2} = 2.4142$$

$$\Omega_{p1} = \tan \frac{\omega_{p1}}{2} = \tan \frac{0.35\pi}{2} = 0.6128$$

$$\Omega_{p2} = \tan \frac{\omega_{p2}}{2} = \tan \frac{0.65\pi}{2} = 1.6319$$

$$B_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 1.6319 - 0.6128 = 1.0191$$

$$\Omega_{op}^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2} = 0.6128 \times 1.6319 = 1$$

$$\bar{\Omega}_{s1} = \frac{\Omega_{s1}^2 - \Omega_{op}^2}{B_p \Omega_{s1}} = \frac{0.4142^2 - 1}{1.0191 \times 0.4142} = -1.9626$$

$$\bar{\Omega}_{s2} = \frac{\Omega_{s2}^2 - \Omega_{op}^2}{B_p \Omega_{s2}} = \frac{2.4142^2 - 1}{1.0191 \times 2.4142} = 1.9626$$

$$\bar{\Omega}_s = \min(|\bar{\Omega}_{s1}|, |\bar{\Omega}_{s2}|) = 1.9625$$

最后得到原型滤波器的设计指标：

$$\bar{\Omega}_p = 1, \quad \bar{\Omega}_s = 1.9625, \quad A_p = 3\text{dB}, \quad A_s = 15\text{dB}$$

第二步：设计原型滤波器。

用式(5.37)估计滤波器的阶

$$r = \frac{\bar{\Omega}_p}{\bar{\Omega}_s} = \frac{1}{1.9625} = 0.5096$$

$$d = \left[ \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{10^{0.3} - 1}{10^{1.5} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.1803$$

$$N = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg 0.1803}{\lg 0.5096} = 2.5409, \quad \text{取 } N = 3$$

查表 5-1 得出归一化 Butterworth 模拟低通滤波器传输函数的系数,从而得到原型滤波器的传输函数

$$H_{LP}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

第三步：模拟频率变换。

将式(5.79)的变换函数  $\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_{op}^2}{B_p s} = \frac{s^2 + 1}{1.0191s}$  代入  $H_{LP}(\bar{s})$ , 化简后得到

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s^2 + 1}{1.0191s}\right)^3 + 2\left(\frac{s^2 + 1}{1.0191s}\right)^2 + 2\left(\frac{s^2 + 1}{1.0191s}\right) + 1} \\ &= \frac{1.0584s^3}{s^6 + 2.0382s^5 + 5.0772s^4 + 5.1348s^3 + 5.0772s^2 + 2.0382s + 1} \end{aligned}$$

第四步：双线性变换。

将  $s = \frac{z-1}{z+1}$  代入  $H(s)$ , 得到

$$H(z) = \frac{1.0584(z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1)}{21.3654z^6 + 24.8234z^4 + 14.8682z^2 + 2.9432}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1}{20.1865z^6 + 23.4537z^4 + 14.0478z^2 + 2.7808} \\
 &= \frac{1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6}{20.1865 + 23.4537z^{-2} + 14.0478z^{-4} + 2.7808z^{-6}}
 \end{aligned}$$

图 5-28 所示的是例 5.12 设计的滤波器的频率特性。

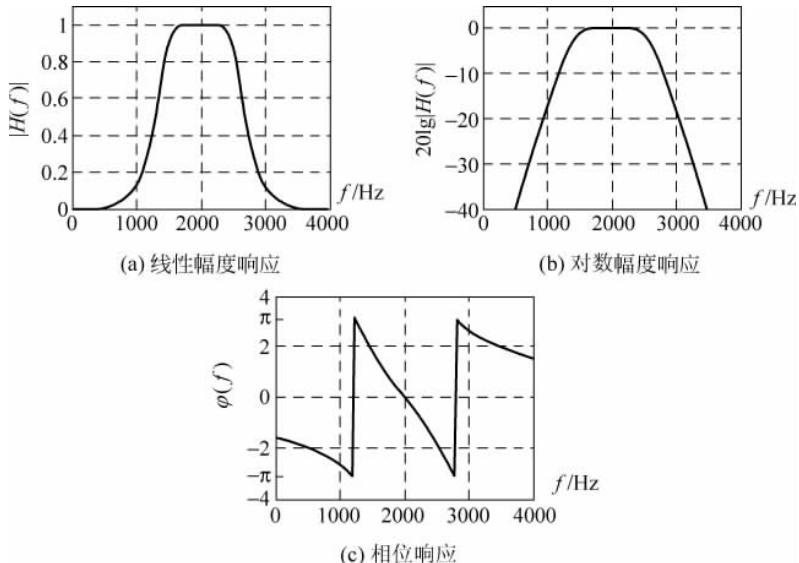


图 5-28 例 5.12 设计的带通滤波器的频率特性

**例 5.13** 利用图 5-1(b)的方案完成例 5.12 的设计。

**解** 第一步和第二步与例 5.12 完全相同,故不重复。下面继续第三步。

第三步: 利用双线性变换法,将第二步设计的原型滤波器映射成数字滤波器(所谓原型数字滤波器)。第二步得到的原型滤波器的传输函数为

$$H_{LP}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

将  $\bar{s} = \frac{v-1}{v+1}$  代入  $H_{LP}(\bar{s})$ , 得到

$$H_{LP}(v) = \frac{1}{\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^3 + 2\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^2 + 2\left(\frac{v-1}{v+1}\right) + 1} = \frac{(v+1)^3}{6v^3 + 2v} = \frac{(1+v^{-1})^3}{6+2v^{-2}}$$

第四步: 数字频率变换。从数字低通(原型)变换成数字带通。查表 5-4, 得到

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_{p2} + \omega_{p1})/2]}{\cos[(\omega_{p2} - \omega_{p1})/2]} = \frac{\cos[(0.65 + 0.35)/2]}{\cos[(0.65 - 0.35)/2]} = 0$$

由  $\bar{\Omega} = \tan(\theta/2)$ (设  $T_s = 2$ ), 即  $\theta = 2\arctan\Omega$ , 得到

$$\theta_p = 2\arctan\Omega_p = 2\arctan 1 = 1.5708$$

$$\beta = \cot \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} \tan \frac{\theta_p}{2} = \cot \frac{(0.65 - 0.35)\pi}{2} \tan \frac{1.5708}{2} = 1.9626$$

$$a_1 = -2\alpha\beta/(\beta+1) = 0$$

$$a_2 = \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{1.9626-1}{1.9626+1} = 0.3249$$

变换函数为

$$v^{-1} = -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1} = -\frac{z^{-2} + 0.3249}{0.3249 z^{-2} + 1}$$

将以上变换函数代入  $H_{LP}(v)$ , 得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\left(1 - \frac{z^{-2} + 0.3249}{0.3249 z^{-2} + 1}\right)^3}{6 + 2\left(-\frac{z^{-2} + 0.3249}{0.3249 z^{-2} + 1}\right)^2} \\ &= \frac{0.3077(-z^{-6} + 3z^{-4} - 3z^{-2} + 1)}{-0.8556z^{-6} + 4.3224z^{-4} + 7.2164z^{-2} + 6.2111} \\ &= \frac{1 - 3z^{-2} + 3z^{-4} - z^{-6}}{20.1856 + 23.4527z^{-2} + 14.0474z^{-4} + 2.7806z^{-6}} \end{aligned}$$

本例在数字域而例 5.12 则在模拟域进行频率变换。可以看出, 除非常小的数值误差外, 二者得到的  $H_a(s)$  相同。这是因为, 采用双线性变换方法不存在频率混叠问题, 所以无论是在模拟频域或是在数字频域进行频率变换, 都不会影响设计结果。图 5-29 所示的是例 5.13 设计的滤波器的频率特性, 可以看到它们与图 5-28 基本一致。

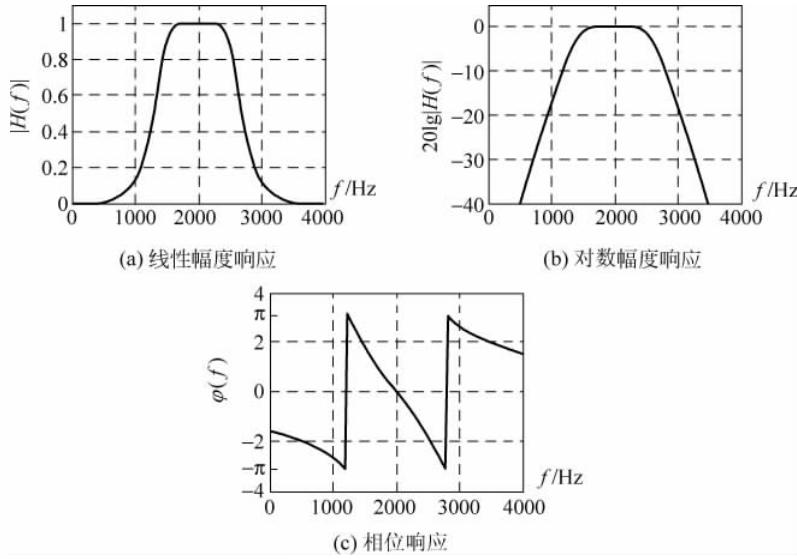


图 5-29 例 5.13 设计的带通滤波器的频率特性

## 5.7 用于设计 IIR 数字滤波器的主要 MATLAB 函数

### 5.7.1 模拟滤波器设计

#### 1. 模拟原型滤波器设计

MATLAB 中用于模拟原型滤波器设计的函数有 buttap、cheb1ap、cheb2ap 和 ellipap, 这些函数名的最后两个字母 ap 代表 analog prototype(模拟原型)。它们的调用方式基本相同。

(1)  $[z, p, k] = \text{buttap}(N)$ : 只需一个输入参数 N, 它是滤波器的阶。3 个输出参数 z、p 和 k, 分别是 N 阶 Butterworth 模拟低通滤波器原型的零点、极点和增益。因为没有零点, 所以 z 是空矩阵; p 是长为 N 的列矢量; k 是标量。用这些参数表示的滤波器传输函数为

$$H(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}$$

因此有:  $z = []$ ;  $p = \exp(\sqrt{-1} * (\pi * (1:2:2 * N - 1) / (2 * N) + \pi / 2))$ ;  $k = \text{real}(\text{prod}(-p))$ ;

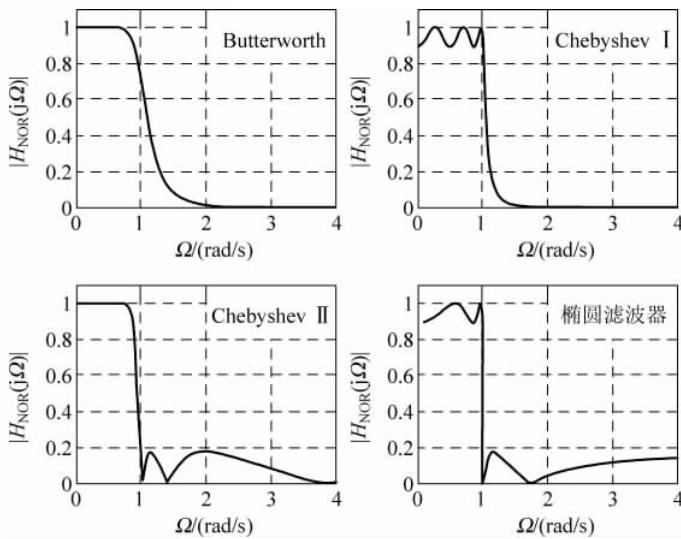
(2)  $[z, p, k] = \text{cheb1ap}(N, Ap)$ : 输入参数除了阶数 N 外, 还指定通带波纹幅度 Ap。输出参数是 N 阶 Chebyshev I 型模拟低通原型滤波器的零点、极点和增益。

(3)  $[z, p, k] = \text{cheb2ap}(N, As)$ : Chebyshev II 型模拟低通滤波器原型与 Chebyshev I 型的主要区别在于它在阻带有等波纹, 因此, 输入参数指定了阻带衰减 As; 此外, 它将阻带截止频率归一化, 即  $\Omega_c = \Omega_s = 1$  是 3dB 截止频率; 最后, 极点和零点都是长为 N 的列矢量, 如果 N 为奇数则 z 的长度为 N-1。传输函数为

$$H(s) = \frac{k \prod_{i=1}^N (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad \text{或} \quad H(s) = \frac{k \prod_{i=1}^{N-1} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}$$

(4)  $[z, p, k] = \text{ellipap}(N, Ap, As)$ : 需要输入阶、通带波纹和阻带衰减等 3 个参数。输出为 N 阶椭圆模拟低通滤波器原型的零点、极点和增益。零点和极点都是长为 N 的列矢量, N 为奇数时则 z 的长度为 N-1。频率归一化是对通带截止频率进行的。

图 5-30 是参数设为 N=6、Ap=1 和 As=15 时, 由上列 4 个函数产生的模拟原型滤波器的幅度响应的图形。

图 5-30 MATLAB 函数产生的模拟原型滤波器的幅度响应( $N=6$ ,  $A_p=1$ ,  $A_s=15$ )

## 2. 未归一化模拟低通滤波器设计

### (1) 未归一化 Butterworth 模拟低通滤波器

由于 Butterworth 原型滤波器的极点位于单位圆上, 而未归一化的 Butterworth 模拟低通滤波器的极点位于半径为  $\Omega_c$  的圆上, 所以, 只需将极点乘以  $\Omega_c$ , 即可由 Butterworth 模拟原型滤波器得到  $\Omega_c$  为任意值的未归一化模拟低通滤波器; 与此同时, 应当将增益  $k$  乘以  $\Omega_c^N$ 。即设计未归一化 Butterworth 模拟低通滤波器的语句为

```
[z, p, k] = buttap(N);
p = p * Omegac; a = real(poly(p));
k = k * Omegac^N; b = real(poly(z)); b = k * b;
```

最后得到的  $b$  和  $a$  分别是未归一化模拟低通滤波器的传输函数的分子和分母多项式的系数矢量, 分子和分母多项式都以  $z^{-1}$  的升幂(即  $z$  的降幂)排列。

### (2) 未归一化 Chebyshev I 型模拟低通滤波器

与 Butterworth 模拟低通滤波器类似, 未归一化的 Chebyshev I 型滤波器的极点, 也可以由 Chebyshev I 型原型滤波器的极点乘以  $\Omega_c$  得到。但增益的计算有所不同。具体说, Chebyshev I 型滤波器的幅度响应在  $\Omega=0$  处的值为(见式(5.38))

$$|H(0)| = \begin{cases} 1, & N \text{ 为奇数} \\ 1/\sqrt{1+\epsilon^2}, & N \text{ 为偶数} \end{cases}$$

所以, 未归一化的 Chebyshev I 型滤波器的增益, 应当由原型滤波器的增益乘以比值

$$k_0 = |H(0)| / |H_{\text{NOR}}(0)|$$

来确定, 式中,  $|H(0)|$  和  $|H_{\text{NOR}}(0)|$  分别是未归一化和原型 Chebyshev I 型滤波器在  $\Omega=0$  处的增益值。这样, 可以写出由 Chebyshev I 型原型滤波器设计未归一化的滤波

器的 MATLAB 语句

```
[z,p,k] = cheb1ap(N,Ap);
a = real(poly(p));
aNn = a(N+1); p = p * Omegac; a = real(poly(p));
aNu = a(N+1); k = k * aNu/aNn; b = real(poly(z)); b = k * b;
```

### (3) 未归一化 Chebyshev II 型模拟低通滤波器

与 Chebyshev I 型滤波器不同, Chebyshev II 型滤波器具有零点, 所以, 还必须考虑将  $z$  乘以  $\Omega_c$ 。这样, 由 Chebyshev II 型原型滤波器求未归一化的 Chebyshev II 型滤波器的 MATLAB 语句为

```
[z,p,k] = cheb2ap(N,As);
a = real(poly(p));
aNn = a(N+1); p = p * Omegac; a = real(poly(p));
aNu = a(N+1); b = real(poly(z)); M = length(b);
bNn = b(M); z = z * Omegac; b = real(poly(z));
bNu = b(M); k = k * (aNu * bNn) / (aNn * bNu); b = k * b;
```

### (4) 未归一化椭圆模拟低通滤波器

由椭圆原型滤波器求未归一化的椭圆低通滤波器, 方法与 Chebyshev II 型滤波器相同。

## 3. 模拟低通滤波器的阶

上面介绍了设计模拟低通滤波器的基本方法, 即先设计原型滤波器, 然后将其转换成未归一化的低通滤波器。模拟低通滤波器的设计指标通常是  $\Omega_p$ 、 $\Omega_s$ 、 $A_p$  和  $A_s$ , 因此, 首先需要根据这些设计指标估计  $N$  和  $\Omega_c$ 。

Butterworth 滤波器的  $N$  由式(5.22)计算,  $\Omega_c$  用式(5.19)或式(5.20)计算

$$N = \frac{\lg d}{\lg r} = \frac{\lg \left( \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)^{1/2}}{\lg (\Omega_p / \Omega_s)} = \frac{\lg \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \right)}{\lg (\Omega_p / \Omega_s)}$$

$$\Omega_{cp} = \frac{\Omega_p}{[(1 - \delta_p)^{-2} - 1]^{1/(2N)}} \quad \text{或} \quad \Omega_{cs} = \frac{\Omega_s}{(\delta_s^{-2} - 1)^{1/(2N)}}$$

Chebyshev I 型和 II 型滤波器的阶由式(5.37)确定

$$N = \frac{\lg (d^{-1} + \sqrt{d^{-2} - 1})}{\lg (r^{-1} + \sqrt{r^{-2} - 1})}$$

其中, 参数  $r$  和  $d$  分别由式(5.7)和式(5.8)计算

$$r \equiv \frac{\Omega_p}{\Omega_s}, \quad d \equiv \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 2}} = \left[ \frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

椭圆滤波器的阶用式(5.50)计算

$$N = \frac{g(r^2) g(\sqrt{1 - d^2})}{g(\sqrt{1 - r^2}) g(d^2)}$$

式中,  $g(x)$  是第一类完全椭圆积分。

以上述公式为基础, MATLAB 提供了估计 4 种滤波器的阶的函数, 分别是

- (1)  $[n, wn] = \text{buttord}(wp, ws, Ap, As, 's')$
- (2)  $[n, wp] = \text{cheb1ord}(wp, ws, Ap, As, 's')$
- (3)  $[n, ws] = \text{cheb2ord}(wp, ws, Ap, As, 's')$
- (4)  $[n, wp] = \text{ellipord}(wp, ws, Ap, As, 's')$

这些函数不仅适用于模拟滤波器, 也适用于数字滤波器; 不仅适用于低通滤波器, 也适用于其他选频滤波器。输入参数‘*s*’表示模拟滤波器, 没有参数‘*s*’时表示数字滤波器。通带和阻带截止角频率 *wp* 和 *ws* 的数值介于 0 与 1 之间, 1 对应于归一化 Nyquist 频率或  $1/2$  取样频率(角频率  $\pi$ )。当 *wp* 和 *ws* 是 2 元素行矢量时, 对应于带通或带阻滤波器。

**例 5.14** 利用 MATLAB 设计一个 Butterworth 模拟低通滤波器, 满足以下设计指标

$$[F_p, F_s, A_p, A_s] = [1\text{kHz}, 1.5\text{kHz}, 1\text{dB}, 15\text{dB}]$$

- (1) 求原型滤波器和设计的低通滤波器的传输函数。
- (2) 计算通带波纹和阻带衰减。
- (3) 画出滤波器的线性幅度响应和对数幅度响应。

**解** m 文件如下(略去了绘图语句):

```
% 例 5.14
Fp = 1000; Fs = 1500; Ap = 1; As = 15;
Omegap = 2 * Fp; Omegas = 2 * Fs;
[N, Omegac] = buttord(Omegap, Omegas, Ap, As);
[za, pa, ka] = buttap(N);
aa = real(poly(pa)); ba = real(poly(za));
p = pa * Omegac; a = real(poly(p));
k = ka * Omegac^N; b = k * ba;
[H, w] = freqs(b, a);
Hdb = 20 * log10((abs(H) + eps)/max((abs(H) + eps)));
```

(1) 3dB 截止频率  $\Omega_c = 7086.5\text{rad/s}$ 。

原型滤波器传输函数分子和分母多项式的系数为

```
ba = 1
aa = [1.0000, 3.8637, 7.4641, 9.1416, 7.4641, 3.8637, 1.0000]
```

所以, 设计出的低通滤波器传输函数  $H(s)$  分子和分母多项式的系数

$$b = 1.2665 \times 10^{23}$$

$$a = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0007, 1.2665] \times 10^{23}$$

最大系数为  $\Omega_c^N = (0.70865 \times 10^4)^6 = 1.2665 \times 10^{23}$ 。由于各系数的数量级相差悬殊, 因此, 分母多项式的前面 5 个系数相对来说无法表示。如果将传输函数  $H(s)$  的自变量改为

$$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c} = \frac{s}{7086.5}$$

即使用原型滤波器的传输函数代替设计出的低通滤波器传输函数，则频率特性实际上并未发生改变，仅仅频率轴的尺度有所改变（用  $\Omega_c$  归一化）。这样做，传输函数的分母多项式的系数都能完整地表示出来，因此，有利于比较准确地计算通带波纹和阻带衰减的数值。

### (2) 通带波纹和阻带衰减

```
Omegax = [Omegap Omegas]/Omegac;
Hx = freqs(ba,aa,Omegax);
Hxdb = -20 * log10((Hx)/max(abs(H)));
```

(3) 滤波器的线性幅度响应和对数幅度响应如图 5-31 所示。

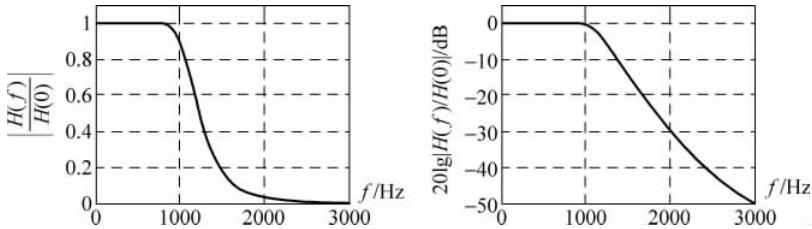


图 5-31 例 5.14 设计的滤波器的幅度响应

## 5.7.2 模拟滤波器到数字滤波器的映射

### 1. 冲激响应不变法

将模拟滤波器传输函数  $H_a(s)$  映射成等效数字滤波器传输函数  $H(z)$ ，可以利用 MATLAB 中的函数 residue 和 residuez 来实现。具体说，首先利用 residue 求出  $H_a(s)$  的极点，然后根据式(5.56)即  $z=\exp(ST_s)$  把每个模拟极点映射成数字极点，得到

$$H(z) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{\rho_k T_s} z^{-1}}$$

最后利用函数 residuez 把这个用极点表示的传输函数变换成有理函数。这一计算过程为

```
[Ra, pa, ka] = residue(ba, aa);
Ts = 1/fs; p = exp(pa * Ts);
[b, a] = residuez(Ra, p, ka); b = real(b')l; a = real(a');
```

其中，ba 和 aa 分别是模拟滤波器传输函数的分子和分母多项式系数矢量，b 和 a 分别是数字滤波器传输函数的分子和分母多项式系数矢量。多项式系数按照 s 的降幂顺序排列。Ts 是取样周期，fs 是取样频率。R、pa 和 k 是模拟滤波器传输函数的留数、极点和增益。

冲激响应不变法可以调用函数 impinvar 更方便地实现，它的调用形式为

```
[b, a] = impinvar(ba, aa, fs)
```

若输入参数中未指定 fs 或将其设为空矩阵，则约定 fs=1Hz。

## 2. 双线性变换法

双线性变换法按照式(5.64)将  $s$  平面映射成  $z$  平面。为补偿频率映射的非线性失真,需对频率轴进行预失真。映射前后能够准确匹配的频率称为匹配频率(the match frequency),用  $f_p$  表示。采取频率预失真补偿后, $j\Omega$  轴( $\Omega$  从 $-\infty$  到 $+\infty$ )重复地映射成单位圆周  $\exp(j\omega)$ ( $\omega$  从 $-\pi$  到 $\pi$ ),即把  $s$  平面的频率  $2\pi f_p$ (单位 rad/s)映射成  $z$  平面的归一化频率  $2\pi f_p/f_s$ (单位 rad/s)。

设模拟滤波器传输函数为

$$H_a(s) = \frac{c_1 s^M + c_2 s^{M-1} + \dots + c_M s + c_{M+1}}{d_1 s^N + d_2 s^{N-1} + \dots + d_N s + d_{N+1}}$$

为简化符号,将双线性变换函数表示成

$$s = 2f_s \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

其中,  $N(z) = 2f_s(1 - z^{-1})$  和  $D(z) = 1 + z^{-1}$  分别是变换函数的分子和分母多项式。将变换函数代入  $H_a(s)$ ,得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{c_1 \left(\frac{N(z)}{D(z)}\right)^M + c_2 \left(\frac{N(z)}{D(z)}\right)^{M-1} + \dots + c_M \left(\frac{N(z)}{D(z)}\right) + c_{M+1}}{d_1 \left(\frac{N(z)}{D(z)}\right)^N + d_2 \left(\frac{N(z)}{D(z)}\right)^{N-1} + \dots + d_N \left(\frac{N(z)}{D(z)}\right) + d_{N+1}} \\ &= \frac{c_1 N^M(z) D^{N-M}(z) + c_2 N^{M-1}(z) D^{N-M+1}(z) + \dots + c_M N(z) D^{N-1}(z) + c_{M+1} D^N(z)}{d_1 N^N(z) + d_2 N^{N-1}(z) D(z) + \dots + d_N N(z) D^{N-1}(z) + d_{N+1} D^N(z)} \end{aligned}$$

可以看出,  $H(z)$  的分子和分母多项式中,每一项都由常数与  $N(z)$  和  $D(z)$  的幂的乘积组成,因此,可以多次调用 MATLAB 中完成多项式乘法运算的函数 conv 来实现双线性变换。通常  $M \leq N$ ,为编程简单,可将分子多项式的阶增加为  $N$  以与分母多项式相同,所增加的项的系数设为零。下面是双线性变换程序:

```
% 双线性变换程序
M = length(c) - 1; N = length(d) - 1; L = N - M;
if L >= 0
    % 调整分子和分母多项式具有相同的阶
    c = [zeros(1,L),c];
else
    d = [zeros(1,-L),d];
end
Nz = 2 * fs * [1 - 1]; Dz = [1 1];
% 双线性变换函数分子和分母多项式的系数矢量
N = max(N,M);
% 模拟滤波器的阶
b = 0; a = 0;
% 模拟滤波器系数初始化
for k = 0:N
    np = [1]; dp = [1];
    % 数字滤波器传输函数分子和分母多项式每项
    for t = 0:k-1
        dp = conv(dp,Dz);
        % 分子多项式每项
    end
    for t = 0:N-k-1
        np = conv(np,Nz);
        % 分母多项式每项
    end
    % 分子多项式每项
    np = conv(np,Nz);
end
```

```

b = b + c(k+1) * conv(np, dp);           % 分子多项式系数矢量
a = a + d(k+1) * conv(np, dp);           % 分母多项式系数矢量
end
a = a/a(1); b = b/a(1);                  % 使分母多项式成首一多项式

```

实现双线性变换的最简单方法是直接调用 MATLAB 专用函数 bilinear, 调用方式分述如下。

(1)  $[z, p, k] = \text{bilinear}(za, pa, ka, fs)$  或  $[z, p, k] = \text{bilinear}(za, pa, ka, fs, fp)$ : 其中, za、pa 和 ka 分别是模拟滤波器的零点、极点和增益; z、p 和 k 分别是数字滤波器的零点、极点和增益; fs 是取样频率(单位为 Hz); fp 是频率预失真补偿的匹配频率。具体分成以下 4 步:

① 若指定了输入参数 fp, 首先要对其进行预失真:  $fp = 2 * pi * fp$ ;  $fs = fp / \tan(fp / (fs / 2))$ ; 否则, 取  $fs = 2 * fs$ 。

② 排除 $\pm\infty$ 处的零点:  $z = z(\text{finite}(z))$ 。

③ 对极点、零点和增益进行双线性变换。

```
p = (1 + pa/fs) ./ (1 - pa/fs); z = (1 + za/fs) ./ (1 - za/fs); k = real(ka * prod(fs - za) ./ prod(fs - pa));
```

④ 加入 $-1$ 处的零点, 以使分子和分母多项式具有相同的阶。

(2)  $[\text{num}, \text{den}] = \text{bilinear}(\text{numa}, \text{dena}, fs)$  或  $[\text{num}, \text{den}] = \text{bilinear}(\text{numa}, \text{dena}, fs, fp)$ : 其中, numa 和 dena 分别是模拟滤波器传输函数分子和分母多项式的系数矢量; num 和 den 分别是数字滤波器传输函数分子和分母多项式的系数矢量; fs 是取样频率(单位为 Hz), 可以任意选取, 不一定等于真实的取样频率; fp 是频率预失真补偿的匹配频率。

**例 5.15** 分别利用上述“双线性变换程序”和函数 bilinear, 验证例 5.13 第 3 步的结果。

**解** 令  $c=1$ ;  $d=[1 \ 2 \ 2 \ 1]$ ;  $fs=0.5$ ; 运行上面的“双线性变换程序”。或令  $\text{numa}=[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ ;  $\text{dena}=[1 \ 2 \ 2 \ 1]$ ;  $fs=0.5$ ; 调用函数  $[b, a] = \text{bilinear}(\text{numa}, \text{dena}, fs)$ , 都会得到

$a = [1.0000 \ 0 \ 0.3333 \ 0]$  和  $b = [0.1667 \ 0.5000 \ 0.5000 \ 0.1667]$

例 5.13 第 3 步的结果可化为  $H_{LP}(v) = \frac{(1+v^{-1})^3}{6+2v^{-2}} \approx \frac{0.1667+0.5v^{-1}+0.5v^{-2}+0.1667v^{-3}}{1+0.3333v^{-2}}$

可见, 本题与例 5.13 第 3 步的结果相同。

### 5.7.3 频率变换

#### 1. 模拟频率变换

模拟频率变换的基本做法是利用表 5-3 所列变换函数  $\bar{s} = F(s)$  将传输函数中的自变量  $\bar{s}$  代之以  $s$ , 这与双线性变换的做法很类似, 因此, 其编程方法也相似, 此处不再重复。MATLAB 中有 4 个完成模拟频率变换的函数, 它们的调用方式分述如下。

(1)  $[\text{bt}, \text{at}] = \text{lp2lp}(\text{b}, \text{a}, \text{W0})$ : 将模拟原型(3dB 截止角频率为 1rad/s 的低通)滤波器, 变换为截止角频率为 W0(单位为 rad/s)的模拟低通滤波器, 即只改变模拟低通滤波

器的截止频率。输入参数 b 和 a 是原型滤波器的传输函数系数矢量,输出参数 bt 和 at 是变换后的模拟低通滤波器的传输函数系数矢量。变换前后滤波器传输函数的分子和分母多项式系数均以 s 的降幂顺序排列。所有系数矢量均为行矢量。

(2)  $[bt, at] = lp2hp(b, a, W_0)$ : 将模拟原型滤波器变换为截止角频率为  $W_0$  的模拟高通滤波器。

(3)  $[bt, at] = lp2bp(b, a, W_0, Bw)$ : 将模拟原型滤波器变换为通带中心频率为  $W_0$  (单位为 rad/s) 和通带宽度为  $Bw$  的模拟带通滤波器。通带中心频率定义为通带的上下截止频率的几何平均值,即  $W_0 = \sqrt{w_1 * w_2}$ ; 通带宽度定义为  $Bw = w_2 - w_1$ 。

(4)  $[bt, at] = lp2bs(b, a, Wo, Bw)$ : 将模拟原型滤波器变换为阻带中心频率为  $W_0$  和阻带宽度为  $Bw$  的模拟带阻滤波器。阻带中心频率定义为阻带的上下截止频率的几何平均值,即  $W_0 = \sqrt{w_1 * w_2}$ ; 阻带宽度定义为  $Bw = w_2 - w_1$ 。

**例 5.16** 利用 MATLAB 函数 lp2bp 完成例 5.12 的第 3 步,并将结果进行比较。

**解** 运行  $a = [1 2 2 1]$ ;  $b = [0 0 0 1]$ ;  $W_0 = 1$ ;  $Bw = 1.0191$ ;  $[bt, at] = lp2bp(b, a, W_0, Bw)$ ; 得到

```
bt = [1.0584 -0.0000 -0.0000 0.0000]  
at = [1.0000 2.0382 5.0771 5.1348 5.0771 2.0382 1.0000]
```

与例 5.12 第 3 步的结果完全相同。

## 2. 数字频率变换

数字频率变换的基本做法是利用表 5-4 所列变换函数  $v^{-1} = F(z^{-1})$  将传输函数中的自变量  $v$  代之以  $z$ ,这与模拟频率变换类似,因此其编程也与双线性变换的做法很类似。MATLAB 中有下面 4 个专用函数用来完成 IIR 数字滤波器的数字频率变换。

(1)  $[num, den] = iirlp2lp(b, a, wc, wd)$ : 该函数将传输函数分子和分母多项式系数为 b 和 a 的 IIR 数字低通滤波器,变换成传输函数分子和分母多项式系数为 num 和 den 的另外一个 IIR 数字低通滤波器。如果输入参数中进一步指定 wc 和 wd,则意味着要将变换前频率点 wc 上的幅度响应,映射成变换后频率点 wd 上的幅度响应。所有频率都归一化到区间  $[0, 1]$ ,其中,1 对应于 Nyquist 频率(数字频率  $\pi$ ,或  $1/2$  取样频率)。注意,滤波器的阶在变换前后不改变。

(2)  $[num, den] = iirlp2hp(b, a, wc, wd)$ : 该函数将 b 和 a 表示的 IIR 数字低通滤波器变换成系数为 num 和 den 的 IIR 数字高通滤波器。低通频率点 wc 与高通频率点 wd 的幅度响应相对应。

(3)  $[Num, Den, AllpassNum, AllpassDen] = iirlp2bp(B, A, W_0, W_t)$ : 该函数将 B 和 A 表示的 IIR 数字低通滤波器变换成系数矢量为 Num 和 Den 的 IIR 数字带通滤波器;同时,还输出全通映射滤波器的分子和分母多项式系数矢量 AllpassNum 和 AllpassDen。通过变换,把原型滤波器位于  $-W_0$  的幅度置于带通滤波器的频率点  $W_{t1}$ ,把  $+W_0$  的幅度置于频率点  $W_{t2}$ ,这里  $W_{t2} > W_{t1}$ 。这种变换具有“直流移动性”,即 Nyquist 频率不动,但直流移动到新的位置,取决于  $W_{t1}$  和  $W_{t2}$ 。原滤波器的其他幅

度响应的位置在变换后没有改变,这意味着,若选择原滤波器的两个频率  $F_1 < F_2$ ,则变换后两个频率仍然具有关系  $F_1 < F_2$ ,不过  $F_1$  与  $F_2$  之间的距离在变换前后不一样。

低通到带通的频率变换,不限于选择截止频率的幅度响应不变,一般而言,可以选择任意频率上的幅度响应不变,例如,阻带边界频率,直流频率,阻带衰减等。

$W_{t1}$  和  $W_{t2}$  之间的频率响应并未指定;但是,阻带中的幅度响应仍保留原低通滤波器的波纹性质,阻带幅度响应等于低通滤波器的最大幅度响应。为了精确地指定带通滤波器阻带内的幅度响应,应从低通滤波器的阻带中指定一个频率  $W_0$ 。

(4)  $[Num, Den, AllpassNum, AllpassDen] = iirlp2bp(B, A, W_0, W_t)$ : 该函数将  $B$  和  $A$  表示的 IIR 数字低通滤波器转换成系数矢量为  $Num$  和  $Den$  的 IIR 数字带阻滤波器;同时,还输出全通映射滤波器的分子和分母多项式系数矢量  $AllpassNum$  和  $AllpassDen$ 。

通过变换,原型滤波器位于  $-W_0$  的幅度变换到带阻滤波器的频率点  $W_{t1}$ ,把  $+W_0$  的幅度变换到  $W_{t2} > W_{t1}$ 。这种变换具有“Nyquist 移动性”,即直流不动,但是 Nyquist 频率移动到新的位置,取决于  $W_{t1}$  和  $W_{t2}$ 。原滤波器的其他幅度响应的相对位置在变换后将改变,这意味着,若选择原滤波器的两个频率  $F_1 < F_2$ ,则变换后将有  $F_1 > F_2$ ,然而,变换前后  $F_1$  与  $F_2$  之间的距离不同。

带阻滤波器的响应与低通滤波器阻带幅度和波纹相同。该函数之所以有用,是因为这种变换保持原滤波器幅度响应的形状不变。如果有一个低通滤波器,它的诸如滚降或通带波纹等特性非常满足要求,就可以利用这种变换产生一个具有相同特性的新的高通滤波器,而用不着从头设计。在某些情况下,使用这种变换有可能得到不正确的高通滤波器结果,这时可利用函数 fvtool 来验证变换得到的滤波器的幅度响应。

低通滤波器转换成高通滤波器后,原低通滤波器在一个频率上的幅度响应被移到高通滤波器一个新的频率位置。变换前后滤波器幅度响应轮廓一样,只是沿频率轴尺度有所伸缩。

**例 5.17** 调用 MATLAB 中的函数完成例 5.12 的设计。要求写出较完整的 m 文件,并将设计结果与例 5.12 的结果进行比较。

**解** 较完整的 m 文件如下。可以看出除去最后 5 行调用设计函数外,其余都是对数字滤波器技术指标的加工处理。

```
% 例 5.17
Fs1 = 1000; Fs2 = 3000; Fp1 = 1400; Fp2 = 2600; % 数字滤波器技术指标
fs = 8000; Ap = 3; As = 15;
omegas1 = 2 * pi * Fs1 / fs; omegas2 = 2 * pi * Fs2 / fs; % 实际频率折算成数字频率
omegap1 = 2 * pi * Fp1 / fs; omegap2 = 2 * pi * Fp2 / fs;
Omegas1 = tan(omegas1 / 2); Omegas2 = tan(omegas2 / 2); % 模拟频率预失真
Omegap1 = tan(omegap1 / 2); Omegap2 = tan(omegap2 / 2);
Bp = Omegap2 - Omegap1; Omegap12 = Omegap1 * Omegap2; % 模拟带通滤波器参数
W0 = sqrt(Omegap12); % 模拟带通滤波器中心频率
Omegas11 = (Omegas1^2 - Omegap12) / (Bp * Omegas1); % 阻带截止频率候选值
Omegas22 = (Omegas2^2 - Omegap12) / (Bp * Omegas2);
Omegas = min(abs(Omegas11), abs(Omegas22)); % 原型滤波器阻带截止频率
Omegap = 1; % 原型滤波器通带截止频率
```

```
[N,Omegac] = buttord(Omegap,Omegas,Ap,As,'s'); % 模拟低通的阶和3dB截止频率
[za,pa,ka] = buttap(N); % 设计 Butterworth 模拟原型滤波器
aa = real(poly(pa)); ba = real(poly(za));
[bt,at] = lp2bp(ba,aa,W0,Bp); % 将模拟原型变成模拟带通
[num,den] = bilinear(bt,at,0.5); % 将模拟带通变成数字带通,选取fs=0.5或T=2
```

运行该程序,检查以下参数与例 5.12 一致:  $N=3$ ,  $\text{Omegac}=1.1096$ ,  $\text{Omegeas}=1.9625$ 。

```
num = [0.0495 -0.0000 -0.1486 0.0000 0.1486 0.0000 -0.0495]
den = [1.0000 -0.0000 1.1619 -0.0000 0.6959 -0.0000 0.1378]
```

为了便于比较,将分子多项式化成首一多项式,得到

```
num = [1.0000 0 -3.0020 0 3.0020 0 -1.0000]
den = [20.2020 0 23.4727 0 14.0586 0 2.7838]
```

除了计算精度引起的微小误差外,与例 5.12 的结果一致。

**例 5.18** 调用 MATLAB 中的函数完成例 5.13 的设计。

**解** 例 5.17 的 m 文件中,直到模拟原型滤波器设计的所有语句都可直接引用,即只需将那里的 m 文件中的最后两行改写为

```
fs = 0.5; Wt = [Omegap1 Omegap2]; % 选取 fs = 0.5 或 T = 2。带通滤波器的通带截止频率
W0 = 2 * atan(Omegap)/pi; % 模拟原型低通滤波器通带截止频率去预失真
[B,A] = bilinear(ba,aa,0.5); % 将模拟原型变成数字原型
[Num,Den,AllpassNum,AllpassDen] = iirlp2bp(B,A,W0,Wt);
```

改写后的文件运行结果为

```
Num = [0.0495 0.0000 -0.1486 0.0000 0.1486 -0.0000 -0.0495]
Den = [1.0000 -0.0000 1.1619 -0.0000 0.6959 -0.0000 0.1378]
```

将分子多项式化成首一多项式,得到

```
Num = [1.0000 0 -3.0020 0 3.0020 0 -1.0000]
Den = [20.2020 0 23.4727 0 14.0586 0 2.7838]
```

与例 5.13 的结果相同。

#### 5.7.4 专用于设计 IIR 滤波器的 MATLAB 函数

MATLAB 中有 4 个专用于设计 IIR 滤波器(数字或模拟)的函数,直接以滤波器的设计指标作为调用时的输入参数。它们分别用于设计 Butterworth、Chebyshev I 型、Chebyshev II 型和 Ellip(椭圆)滤波器。除去状态变量形式外,每个函数各有 8 种调用方式,其中,对于模拟和数字滤波器,各有 4 种调用方式。模拟和数字滤波器,根据输入参数中是否有’s’来区分。除了区别模拟或数字的参数’s’外,输入参数还包括滤波器的阶 N,归一化截止频率 Wn 和说明滤波器的频率响应类型的参数‘ftype’。参数 Wn 和‘ftype’的具体含义如下

频率响应类型	参数'ftype'	Wn	说 明
低通滤波器	'low'	标量	
高通滤波器	'high'	标量	
带通滤波器		[w1 w2]	通带为 $w_1 < w < w_2$
带阻滤波器	'stop'	[w1 w2]	阻带为 $w_1 < w < w_2$

截止频率是指幅度响应等于  $1/\sqrt{2}$  所对应的频率(最大幅度响应等于 1), 数字归一化截止频率必须在  $[0, 1]$  区间取值, 1 对应于 Nyquist 频率(即  $1/2$  取样频率  $f_s/2$  或数字频率  $\pi$ )。模拟截止频率的单位是 rad/s。输出参数可以是设计的滤波器的传输函数的零点  $z$ 、极点  $p$  和增益  $k$ , 也可以是分子和分母多项式的系数矢量  $b$  和  $a$ ; 分子和分母多项式按照  $z^{-1}$  的升幂(数字滤波器)或  $s$  的降幂(模拟滤波器)顺序排列。

- (1) butter  
[b, a] = butter(N, Wn)  
[b, a] = butter(N, Wn, 'type')  
[z, p, k] = butter(N, Wn)  
[z, p, k] = butter(N, Wn, 'type')
- (2) cheby1  
[b, a] = cheby1 (N, Wn)  
[b, a] = cheby1 (N, Wn, 'type')  
[z, p, k] = cheby1 (N, Wn)  
[z, p, k] = cheby1 (N, Wn, 'type')
- (3) cheby2  
[b, a] = cheby2 (N, Wn)  
[b, a] = cheby2 (N, Wn, 'type')  
[z, p, k] = cheby2 (N, Wn)  
[z, p, k] = cheby2 (N, Wn, 'type')
- (4) ellip  
[b, a] = ellip(N, Wn)  
[b, a] = ellip (N, Wn, 'type')  
[z, p, k] = ellip (N, Wn)  
[z, p, k] = ellip (N, Wn, 'type')

例 5.19 直接调用 MATLAB 专用于设计 IIR 滤波器的函数完成例 5.12。

解 由前面几个例子已知:  $N=3$ ;  $Wn=[0.35 \ 0.65]$ ; 直接调用函数 butter

```
[b, a] = butter(N, Wn);
```

文件运行结果得到

```
Num = [0.0495 0.0000 -0.1486 0.0000 0.1486 -0.0000 -0.0495]  
Den = [1.0000 -0.0000 1.1619 -0.0000 0.6959 -0.0000 0.1378]
```

将分子多项式化成首一多项式, 得到

```
Num = [1.0000 0 -3.0020 0 3.0020 0 -1.0000]  
Den = [20.2020 0 23.4727 0 14.0586 0 2.7838]
```

与例 5.17 和例 5.18 的结果完全相同, 与例 5.12 和例 5.13 的结果基本一致。

## 5.8 MATLAB 中的滤波器设计和分析工具

该工具名为 fdatool(filter design and analysis tool),以图形用户接口(GUI)形式提供,其功能是设计滤波器、分析滤波器和修改已有的滤波器设计。利用该工具,从 MATLAB 工作空间输入滤波器技术指标,即能迅速设计出数字 FIR 或 IIR 滤波器,也可以在工作空间对滤波器的零点和极点进行修改(增加、减少或移动)。该工具也可以对滤波器进行分析,如分析滤波器的幅度响应、相位响应和极-零点图等。

fdatool 无缝集成了 MathWorks 的几种产品,这里只简单介绍其中与滤波器设计工具箱(filter design toolbox)有关的部分内容,具体包括 FIR 和 IIR 滤波器的最新设计技术。

在 MATLAB 工作空间输入 fdatool,出现图 5-32 所示的 GUI 界面,它是设计滤波器的可视化工作平台。下面用例 5.12 的设计任务作为实例说明设计过程。

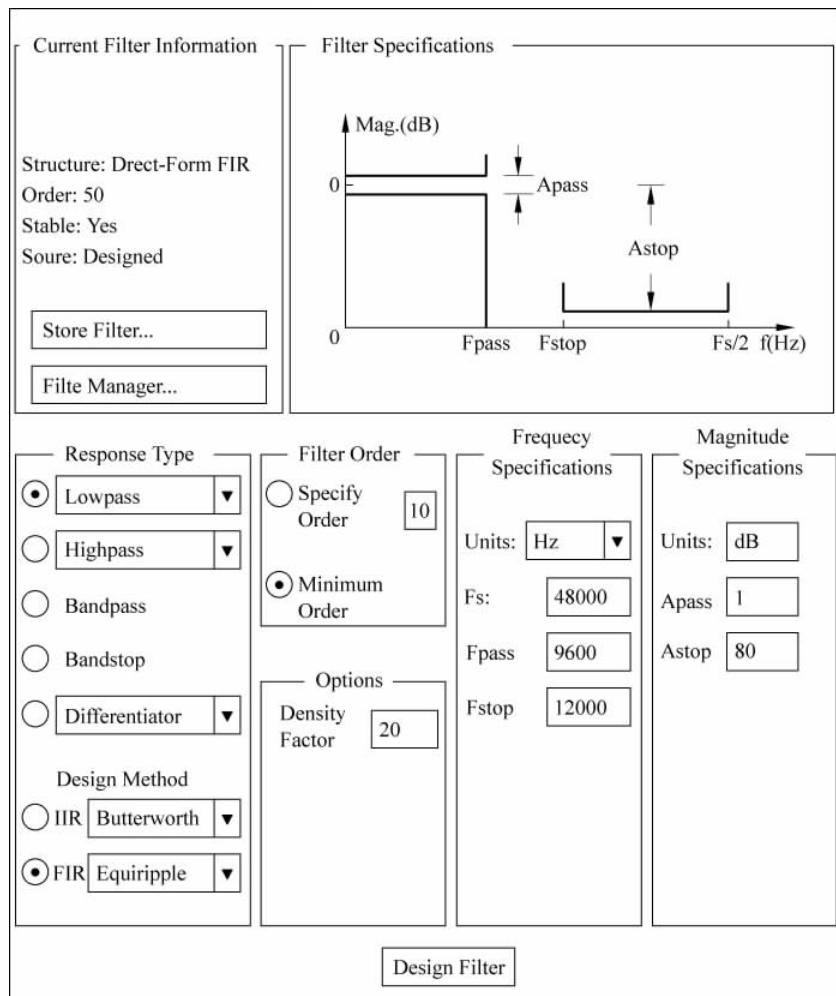


图 5-32 fdatool 的设计 GUI 界面

### 1) 选择滤波器类型,输入频率响应设计指标

在界面下部(从左向右数)第一栏[Response Type]中,选择滤波器类型: Bandpass, 图 5-32 所示界面立即变成图 5-33。在第三栏[Frequency Specifications]中,输入频率参数:  $F_s=8000$ ,  $F_{stop1}=1000$ ,  $F_{pass1}=1400$ ,  $F_{pass2}=2600$ ,  $F_{stop2}=3000$ 。在第四栏[Magnitude Specifications]中,输入幅度响应指标及其单位:  $A_{stop1}=15$ ,  $A_{pass}=3$ ,  $A_{stop2}=15$ , Units=dB。

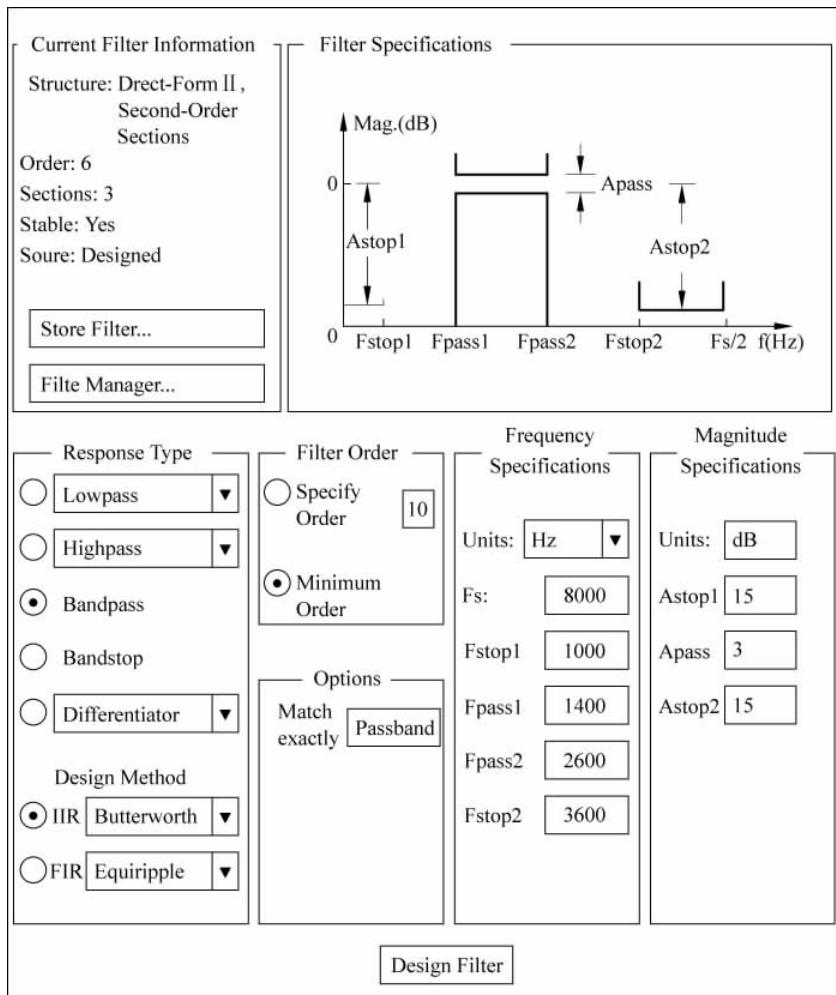


图 5-33 利用 fdatool 设计例 5.12 的带通滤波器

### 2) 确定设计方法

在界面下部第一栏的下部[Design Methods]中确定设计方法: IIR, Butterworth。

### 3) 选择滤波器的阶

在界面下部第二栏[Filter Order]选择滤波器的阶: Minimum orders;

准确匹配通带(Match exactly): Passband

## 4) 启动设计过程

按下界面底部中间的按钮[Design Filter],很快就得岀设计结果。

## 5) 设计结果

设计结果在界面上部显示。在左边栏[Current Filter Information]内,用文字说明所设计的滤波器的当前有关信息,包括:滤波器结构(Filter structure): Direct form II, Second-Order Sections; 阶(Order): 6; 级数(Sections): 3; 是否稳定(Stable): Yes; 来源(Source): Designed。在右边栏内是设计结果的图形显示,其内容由界面第三行(图中未画出)所列的部分图标按钮控制,包括:滤波器指标[Filter Specifications],幅度响应[Magnitude response],相位响应[Phase response],幅度和相位响应[Magnitude & phase response],群延时响应[Group delay response],相延时[Phase delay];冲激响应[Impulse response],阶跃响应[Step response],极-零点图[Pole / zero plot],滤波器系数[Filter coefficients],滤波器信息[Filter information],幅度响应估计[Magnitude response estimation],舍入噪声功率谱[Round-off noise power spectrum]等选择。单击按钮[Filter Coefficients],右上栏内显示所设计的滤波器的系数,可由[File]下拉菜单中的[Export]导出至 MATLAB 工作空间或指定的其他位置。得到

	第一级 2 阶节			第二级 2 阶节			第三级 2 阶节		
分子系数	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
分母系数	1	0.6825	0.6510	1	-0.6825	0.6510	1	0	0.3246
增益系数	0.1745			0.7291			0.3900		

由三级 2 阶节求出直接型结构传输函数的分子和分母多项式系数和增益系数

	$z^0$	$z^{-1}$	$z^{-2}$	$z^{-3}$	$z^{-4}$	$z^{-5}$	$z^{-6}$
分子多项式系数	1	0	-3	0	3	0	-1
分母多项式系数	1	0	1.1608	0	0.6952	0	0.1376
增益系数	0.0496						

为便于比较,将分子多项式化成首一多项式,得到

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-2} + 3z^{-4} - 1}{20.1613 + 23.4032z^{-2} + 14.0161z^{-4} + 2.7748}$$

与例 5.12 的结果一致。

## 习题

## 5.1 设 IIR 数字低通滤波器的幅度响应满足约束条件

$$\begin{cases} 1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

推导等效的模拟低通滤波器的参数  $\epsilon$  和  $A$  与  $\delta_p$  和  $\delta_s$  之间的关系式。

**5.2** 推导  $N$  阶 Butterworth 模拟低通滤波器的平方幅度响应在  $\Omega_c$  处的斜率与  $N$  之间的关系式。

**5.3** 证明  $N$  阶 Butterworth 模拟低通滤波器的平方幅度响应在  $\Omega=0$  处的前  $2N-1$  阶导数存在且等于零。

**5.4** 证明在  $\Omega \gg \Omega_c$  的高频范围内,随着  $\Omega$  的增加,  $N$  阶 Butterworth 滤波器的幅度响应每倍频程衰减大约  $6\text{dB}$ 。

**5.5** 为了设计一个满足以下指标的低通模拟滤波器

$$F_p = 400\text{Hz}, \quad F_s = 500\text{Hz}, \quad A_p = 0.5\text{dB}, \quad A_s = 35\text{dB}$$

求选择性因子  $r$  和鉴别因子  $d$ 。

**5.6** 推导计算 Butterworth 低通滤波器的阶的公式(5.18)。

**5.7** 式(5.20)是根据在阻带截止频率上满足阻带衰减要求推导出来的。选择该数值作为  $3\text{dB}$  截止频率,即  $\Omega_c = \Omega_{cs}$ ,由此确定所需的滤波器的阶

$$N = \frac{\lg(\delta_s^{-2} - 1)}{2\lg(\Omega_s/\Omega_c)}$$

假设按照以下技术指标设计 Butterworth 低通滤波器

$$[\Omega_c, \Omega_s, A_s] = [1000\pi, 2000\pi, 40\text{dB}]$$

求所需的滤波器的阶  $N$ ,确定滤波器的极点的表达式,并写出传输函数的表达式。

**5.8** 求频率归一化( $\Omega_c = 1\text{rad/s}$ )的 3 阶 Butterworth 模拟低通滤波器的传输函数。

**5.9** 假设  $3\text{dB}$  截止频率  $F_c = 10\text{Hz}$ ,这里  $F_c$  与  $\Omega_c$  的关系是  $F_c = \Omega_c/2\pi$ 。

(1) 写出 3 阶 Butterworth 模拟低通滤波器的平方幅度函数  $|H_a(j\Omega)|^2$  的表达式。

(2) 求  $H_a(s)H_a(-s)$  的极点  $p_k$ ,画出极点在  $s$  平面上的分布图。

(3) 构造一个因果和稳定的低通滤波器的传输函数  $H_a(s)$ 。

**5.10** 利用查表法重做习题 5.8,并将结果与习题 5.8 的结果进行比较。

**5.11** 将滤波器的阶改成 4 阶,重做习题 5.8 和习题 5.10。

**5.12** 已知平方幅度函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{\Omega^4 - 2\Omega^2 + 1}{\Omega^6 + 3\Omega^4 - 2\Omega^2 + 5}$$

据此构造一个因果和稳定的模拟滤波器的传输函数。

**5.13** 为了设计一个满足以下指标的 Butterworth 模拟低通滤波器

$$F_p = 1000\text{Hz}, \quad F_s = 2000\text{Hz}, \quad \delta_p = 0.05, \quad \delta_s = 0.05$$

(1) 确定滤波器的阶  $N$  和  $3\text{dB}$  截止频率  $F_c$ 。

(2) 若选择  $F_c = F_p$ ,求阻带衰减。

(3) 若选择  $F_c = F_s$ ,求通带波纹。

**5.14** 设计一个满足以下指标的 Butterworth 模拟低通滤波器

$$[F_p, F_s, \delta_p, \delta_s] = [300\text{Hz}, 500\text{Hz}, 0.1, 0.05]$$

(1) 求滤波器所需的最小的阶。

(2) 为了准确满足通带波纹的指标要求,3dB 截止频率  $F_c$  等于多少?

(3) 为了准确满足阻带波纹的指标要求,3dB 截止频率  $F_c$  等于多少?

(4) 为了使通带和阻带波纹都是过设计的,3dB 截止频率  $F_c$  应如何选取?

**5.15** 已知一个 3 阶模拟低通 Butterworth 滤波器的 3dB 截止频率  $F_c=4\text{Hz}$ 。求该滤波器的传输函数。

**5.16** 已知一个 8 阶模拟低通 Butterworth 滤波器的 3dB 截止频率  $F_c=1/\pi\text{Hz}$ 。画出该滤波器的极-零点图。

**5.17** 推导  $N$  阶 Chebyshev I 型滤波器的极点计算公式(5.33),并证明所有极点位于一个长短轴分别等于  $a$  和  $b$  的椭圆上, $a$  和  $b$  分别用式(5.29)和式(5.30)定义。

**5.18** 推导计算 Chebyshev I 型滤波器的阶的公式(5.37)。

**5.19** 求满足以下技术指标的 Chebyshev I 型模拟低通滤波器的最小阶。

$$[F_p, F_s, \delta_p, \delta_s] = [100\text{Hz}, 200\text{Hz}, 0.03, 0.05]$$

**5.20** 已知  $F_p=10\text{Hz}$  和  $\delta_p=0.1$ ,求一个 2 阶模拟低通 Chebyshev I 型滤波器的传输函数。

**5.21** 为了设计一个满足以下技术指标的 Chebyshev I 型模拟低通滤波器

$$[F_p, F_s, A_p, A_s] = [500\text{Hz}, 1000\text{Hz}, 1\text{dB}, 40\text{dB}]$$

试确定滤波器的阶和极点。

**5.22** 为了设计一个满足以下技术指标的模拟低通滤波器,当用 Butterworth 滤波器、Chebyshev I 型滤波器、Chebyshev II 型滤波器和椭圆滤波器逼近时,比较所需的滤波器的阶  $N$ 。

$$[F_p, F_s, \delta_p, \delta_s] = [50\text{Hz}, 60\text{Hz}, 0.05, 0.02]$$

**5.23** 已知一个模拟滤波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}$$

利用冲激响应不变法将它映射成等效的数字滤波器。假设  $T_s=0.1\text{s}$ 。

**5.24** 本题是上题的一般化。已知原型模拟滤波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

利用冲激响应不变法将它映射成等效的数字滤波器。

(1) 求数字滤波器的传输函数的表达式。

(2) 数字滤波器的零点由什么确定?

**5.25** 将模拟滤波器映射成数字滤波器,除了冲激响应不变法,还有一种方法是阶跃响应不变法。它的基本思想与冲激响应不变法相似,就是保持模拟滤波器的阶跃响应不变来得到数字滤波器的阶跃响应。更具体地说,将模拟滤波器的阶跃响应  $U_a(t)$  取样得到数字滤波器的单位阶跃响应  $U(n)=U_a(nT_s)$ 。利用阶跃响应不变法重解习题 5.24。

**5.26** 证明用冲激响应不变法设计数字滤波器,所得到的设计结果与取样周期

$T_s$  的数值没有关系。提示：需证明(1)滤波器的阶与  $T_s$  无关，(2)极点不受  $T_s$  的影响。

**5.27** 设  $H_a(s)$  在  $s=s_0$  处有  $r$  阶极点，则可以将  $H_a(s)$  表示成

$$H_a(s) = G_a(s) + \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{(s - s_0)^k}$$

其中， $G_a(s)$  是只有 1 阶极点的传输函数。假设  $H_a(s)$  是因果的。

(1) 推导计算  $A_k$  的公式。

(2) 推导计算  $H_a(s)$  的冲激响应  $h_a(t)$  的公式(用  $s_0$  和  $g_a(t)$  表示)，这里  $g_a(t)$  是  $G_a(s)$  的拉普拉斯逆变换。

**5.28** 利用 Butterworth 滤波器作为原型滤波器，用冲激响应不变法设计一个满足以下技术指标的低通 IIR 数字滤波器。设计模拟原型滤波器时，要求采用查表法。并将设计结果与例 5.7 进行比较。

$$[\omega_p, \omega_s, A_p, A_s] = [0.2\pi, 0.3\pi, 1\text{dB}, 15\text{dB}]$$

**5.29** 推导式(5-67)。

提示：将  $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$  写成  $\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}$  的形式，然后利用 Eulerian 公式。

**5.30** 用 Chebyshev I 型滤波器作为原型滤波器，用双线性变换法设计一个满足习题 5.28 技术指标的低通 IIR 数字滤波器。

**5.31** 用 Butterworth 滤波器作为原型滤波器，用双线性变换法设计一个满足以下技术指标的低通 IIR 数字滤波器，假设取样频率  $f_s = 20\text{Hz}$ 。

$$[f_p, f_s, \delta_p, \delta_s] = [2.5\text{Hz}, 7.5\text{Hz}, 0.1, 0.1]$$

按照通带波纹设计指标决定 3dB 截止频率  $F_c$ 。画出设计的数字滤波器的幅度响应。

**5.32** 利用冲激响应不变法将具有下列传输函数的模拟滤波器映射成数字滤波器，假设  $T_s = 0.5$ 。

$$H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 9}$$

**5.33** 已知一个模拟滤波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

其中， $\Omega_c$  是模拟滤波器的 3dB 截止频率。用双线性变换法设计一个 3dB 截止频率  $\omega_c = 0.2\pi$  的单极点 IIR 低通数字滤波器。

**5.34** 用 3 阶 Butterworth 模拟滤波器作原型滤波器，将其转换成 3dB 截止频率  $F_c = 1000\text{Hz}$  的模拟低通滤波器。求模拟低通滤波器的传输函数，并用 MATLAB 画出幅度响应。

**5.35** 用 1 阶 Butterworth 模拟滤波器作原型滤波器，将其转换成具有任意 3dB 截止频率  $\Omega_c \text{rad/s}$  的模拟低通滤波器，求滤波器的传输函数表达式。

**5.36** 将 1 阶 Butterworth 模拟原型滤波器转换成截止频率为  $\Omega_{p1}$  和  $\Omega_{p2}$  的模拟带通滤波器，求带通滤波器的传输函数表达式。

**5.37** 假设用1阶Butterworth模拟滤波器作为原型滤波器,采用双线性变换方法,设计一个满足以下技术指标的带阻数字滤波器:阻带带宽为 $\Delta\omega$ ,阻带中心频率为 $\omega_0$ ,阻带衰减为 $A_{s1}=A_{s2}=3\text{dB}$ 。求模拟带阻滤波器的传输函数。

**5.38** 推导式(5.92)。

**5.39** 假设采用式(5.98)作为低通到高通的频率变换函数,试推导式(5.99)。如果根据映射关系 $\omega=\omega_p \Leftrightarrow \theta=-\theta_p$ 推导参数 $a$ ,求计算 $a$ 的公式。

**5.40** 利用fdatool解习题5.31。