第 3 章

重积分

Multiple integrals

与定积分类似，重积分的概念也是在解决实际问题的过程中抽象出来的，是定积分的一种推广形式，其中的数学思想与定积分一样，也是一种"和式的极限". 所不同的是：定积分的被积函数是一元函数，积分范围是一个区间；而重积分的被积函数是多元函数，积分范围是平面或空间中的某一区域. 尽管如此，定积分和重积分之间仍然存在着密切联系，如重积分可以转化为累次积分，再利用定积分的计算方法进行求解. 本章首先介绍二重积分的概念、性质、计算方法；然后将其推广到三重积分；最后给出重积分的一些简单应用.

3.1 二重积分的概念与性质 *Concepts and properties of double integrals*

本节通过引入两个实例，即曲顶柱体的体积和非均匀平面薄片的质量，抽象出二重积分的定义，并给出二重积分的几何解释；然后讨论二重积分的一些基本性质；最后根据积分区域的对称性和被积函数的奇偶性，给出二重积分的约化方法.

3.1.1 引例

引例 1 曲顶柱体的体积

这里所指的**曲顶柱体**，其特征是顶为曲面、底为平面、侧面为母线垂直于底面的柱面.

将曲顶柱体放置在空间直角坐标系中，假设其底面为 xOy 坐标面上可求面积的有界闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线、母线平行于 z 轴的柱面，它的顶可以由连续函数 $z=f(x,y)$ 表示，且 $f(x,y)\geqslant 0$，如图 3.1(a)所示. 求该曲顶柱体的体积.

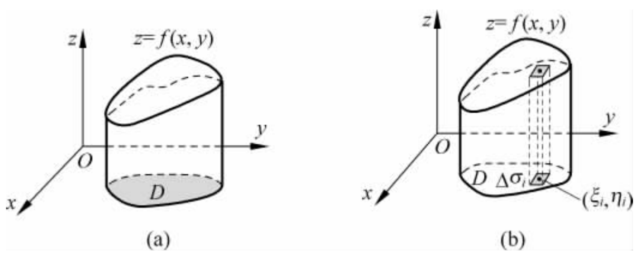

图 3.1

易知，若曲顶柱体的顶是与底面 $z=0$ 平行的平顶，即 $z=f(x,y)=C>0$，则其体积等于底面积乘以高. 但对于曲顶柱体，这个公式就失效了. 事实上，利用计算曲边梯形面积的基本思想，采用“分割、近似、求和、极限”这 4 个步骤，便可以解决此问题. 具体求解步骤如下：

(1) **分割(partition)** 用任意一组线网将平面区域 D 分割成 n 个小闭区域，记作 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也表示小闭区域的面积. 以 $\Delta\sigma_i$ 的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，如图 3.1(b)所示，得到一个小曲顶柱体. 以此类推，可以将原来的曲顶柱体分割成 n 个小曲顶柱体.

(2) **近似(approximation)** 以第 i 个小曲顶柱体(底面为 $\Delta\sigma_i$)为例，体积记作 ΔV_i. 由于函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续，所以函数在小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 内变化很小，于是该小曲顶柱体可以近似看成平顶柱体. 此时，在底 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，则平顶柱体的高为 $f(\xi_i,\eta_i)$，体积为 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 从而第 i 个小曲顶柱体的体积的近似值为 $\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(3) **求和(sum)** 将这些小平顶柱体的体积相加，得到 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并用它作为曲顶柱体的体积 V 的近似值，则有

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(4) **极限(limit)** 当分割越来越细，小平顶柱体的体积之和就会越来越接近于曲顶柱体的体积. 将 $\Delta\sigma_i$ 中任意两点距离的最大值称为 $\Delta\sigma_i$ 的直径，记作 λ_i，则当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}\to 0$ 时，上述和式右端的极限就是曲顶柱体的体积 V，即

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

引例 2 平面薄片的质量

将一非均匀材质的平面薄片放置在平面直角坐标系中，如图 3.2 所示. 若已知其占有 xOy 坐标面上可求面积的有界闭区域 D，面密度由连续函数 $\rho(x,y)((x,y)\in D)$ 表示，且 $\rho(x,y)>0$. 求该平面薄片的质量 m.

沿用引例 1 的求解思想和过程，具体步骤如下：

(1) 分割 用任意一组线网把平面区域 D 分割成 n 个小闭区域，记作 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 也表示小闭区域的面积，如图 3.2 所示.

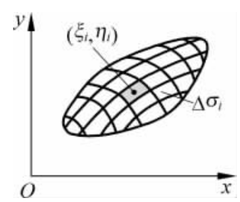

图 3.2

(2) 近似 在第 i 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，以该点所对应的面密度 $\rho(\xi_i,\eta_i)$ 代替 $\Delta\sigma_i$ 上其他点处的面密度，则 $\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 可近似看成第 i 个小块薄片的质量.

(3) 求和 将这些小块的质量相加，便得到所求平面薄片质量的近似值，即

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(4) 极限 与引例 1 类似，同样将 $\Delta\sigma_i$ 中任意两点距离的最大值称为 $\Delta\sigma_i$ 的直径，记作 λ_i，则当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}\to 0$ 时，上述和式右端的极限就是平面薄片的质量 m，即

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

抛开上述两个引例自身的应用背景，不难抽象出二重积分的定义.

3.1.2 二重积分的概念

定义 3.1 设 D 是可求面积的有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上有界. 首先将 D 用线网任意分割成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 也表示小闭区域的面积；然后在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i=1,2,\cdots,n)$，再作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在(记作 J)，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上**可积**，称极限值 J 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分(double integral)**，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i, \tag{3.1}$$

其中，$f(x,y)$ 称为**被积函数**，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积微元**，D 称为**积分区域**，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为**积分和**.

关于定义 3.1 的几点说明.

(1) 在定义中，当 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在时，式(3.1)的运算结果是一个数值，该数值仅与被积函数 $f(x,y)$ 及积分区域 D 有关，而与积分变量用哪些字母表示无关，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 在定义中，对有界闭区域 D 的分割是任意的，点 (ξ_i, η_i) 在 $\Delta\sigma_i$ 上的取法也是任意的，只有这两个"任意"同时被满足，且 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在的前提下，才称其极限值 J 为函数 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分.

(3) 若已知函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，由二重积分的定义可知，对 D 进行任意形式的分割都不会改变最后的结果 J. 因此，为方便计算起见，常选用一些特殊的分割方法，如在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网分割区域 D，如图 3.3 所示，那么除一些包含边界的小闭区域外(并不影响最后的结果)，其余的小闭区域都是矩形闭区域，面积为 $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$. 此时通常将面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，将二重积分记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为直角坐标系中的面积微元.

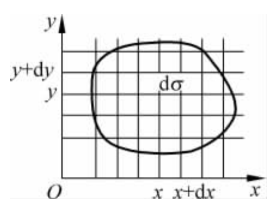

图 3.3

(4) 由定义可知，引例 1 中曲顶柱体的体积可表示为 $V = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$；引例 2 中平面薄

片的质量可表示为 $m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

定理 3.1 当函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续时,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 必存在.

3.1.3 二重积分的几何解释

对于放置在空间直角坐标系中的曲顶柱体,如图 3.1 所示,它的顶为曲面 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$,底为 xOy 坐标面上区域 D,侧面为以 D 的边界曲线为准线、母线平行于 z 轴的柱面.二重积分的几何解释是:当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示上述曲顶柱体的体积;当被积函数 $f(x,y)\leqslant 0$ 时,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示曲顶柱体体积的负值;当被积函数 $f(x,y)$在区域 D 上有正有负时,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示在 xOy 面的上、下曲顶柱体体积的代数和.特别地,当 $f(x,y)\equiv 1$,σ 为闭区域D 的面积时,$\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$. 该等式表示:以 D 为底、高为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于该柱体的底面积.

例 3.1 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$;

(2) $\iint\limits_D \left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

分析 根据被积函数和积分区域的特点,利用二重积分的几何意义计算.

解 (1) 易见,被积函数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是球心在坐标原点,半径为 R 的上半球面,积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$是被积函数在 xOy 坐标面上的投影.由二重积分的几何意义知,$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 等于半径为R 的上半球的体积,如图 3.4(a)所示,所以

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2\pi R^3}{3}.$$

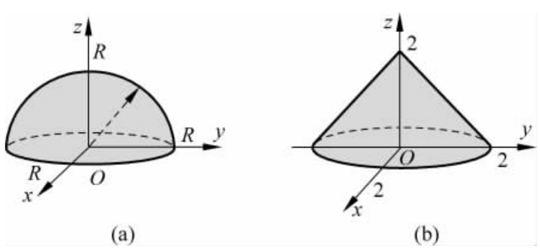

图 3.4

(2) 易见,被积函数 $f(x,y)=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 是 yOz 坐标面上的直线 $z=2-y$ 绕 z 轴旋转一周形成的半圆锥面,积分区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.由二重积分的几何意义知,

$\iint\limits_D (2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$ 等于底面半径为 2 高为 2 的圆锥体的体积，如图 3.4(b)所示，所以

$$\iint\limits_D (2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 2 = \frac{8\pi}{3}.$$

3.1.4 二重积分的性质

由于二重积分与定积分有完全类似的性质，这里不加证明地给出二重积分的几个重要性质. 在如下的各性质中，均假设函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积.

性质 1（线性性质） 对于任意的 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，函数 $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ 在 D 上可积，且

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

事实上，性质 1 的结论包含了二重积分运算的两种特殊情形，即

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (k \text{ 为常数}).$$

上面的第一式表明两个函数的和（差）的二重积分等于它们的二重积分的和（差）；第二式表明被积函数的常数因子可以提到积分号的外面.

性质 1 的结论可推广到有限个可积函数的线性组合的积分，即 $\forall k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D [k_1f_1(x,y)+k_2f_2(x,y)+\cdots+k_rf_r(x,y)]\mathrm{d}\sigma\\ =&k_1\iint\limits_D f_1(x,y)\mathrm{d}\sigma + k_2\iint\limits_D f_2(x,y)\mathrm{d}\sigma+\cdots+k_r\iint\limits_D f_r(x,y)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

性质 2（积分区域的可加性） 如果 D 可被曲线分为两个没有公共内点的闭子区域 D_1 和 D_2，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3（保序性质） 在 D 上，如果有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特别地，不难证明如下的绝对值不等式成立：

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

性质 4（积分的估值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，M,m 分别为 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

性质 5（积分中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，σ 为 D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma.$$

例 3.2 比较下列二重积分的大小：

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 x 轴，y 轴以及 $x+y=1$ 围成的三角形区域；

(2) $\iint\limits_D \tan^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D \tan^3(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 x 轴，y 轴以及 $x+y=\frac{\pi}{4}$ 围成的三角形区域.

分析 当二重积分的积分区域相同时，比较被积函数的大小.

解 (1)易见，在 D 内，$0\leqslant x+y\leqslant 1$，故有 $(x+y)^2\leqslant(x+y)$，由性质 3 可得

$$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$$

(2) 易见，在 D 内，$0\leqslant x+y\leqslant\frac{\pi}{4}$，故有 $0\leqslant\tan(x+y)\leqslant 1$，从而 $\tan^2(x+y)\geqslant\tan^3(x+y)$，其中等号仅当 $x+y=0$ 和 $x+y=\frac{\pi}{4}$ 时成立. 故

$$\iint\limits_D \tan^2(x+y)\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_D \tan^3(x+y)\mathrm{d}\sigma.$$

例 3.3 估计下列二重积分的值的范围：

(1) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_D (1+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

分析 先求出被积函数在积分区域上的最大值和最小值，然后利用性质 4 估算.

解 (1) 易见，D 是边长为 1 的闭方形区域，面积为 $\sigma=1$. 在 D 内，有 $0\leqslant x+y\leqslant 2$，由性质 4 知，$0\cdot\sigma\leqslant\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma\leqslant 2\cdot\sigma$，即

$$0\leqslant\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma\leqslant 2.$$

(2) 易见，D 是圆心在点 $(1,0)$，半径为 1 的圆形闭区域，面积为 $\sigma=\pi$. 在 D 内，$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{2x}\leqslant 2$，于是 $1\leqslant 1+\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 3$，由性质 4 知

$$\pi\leqslant\iint\limits_D (1+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma\leqslant 3\pi.$$

3.1.5 二重积分的对称性质

在计算定积分时知道，若被积函数在对称区间上具有奇偶性，则定积分有“偶倍奇零”的结论. 对于二重积分而言，利用积分区域的对称性与被积函数关于单个变量的奇偶性，有时可以简化计算，甚至可以直接得到结果.

给定一个平面区域 D，$\forall(x,y)\in D$，若有 $(x,-y)\in D$，则称区域 D 关于 x 轴对称；若有 $(-x,y)\in D$，则称 D 关于 y 轴对称. 利用二重积分的几何解释，可以得到如下结果.

对称性 1 如果积分区域 D 关于 x 轴对称，设 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,y\geqslant 0\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y);\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

对称性 2 如果积分区域 D 关于 y 轴对称，设 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y);\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y).\end{cases}$$

对称性 3 如果积分区域 D 关于坐标原点对称，设 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,-y)=-f(x,y);\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

事实上，关于二重积分的对称性质还有很多，有兴趣的读者可以查阅相关资料.

例 3.4 利用二重积分的对称性质化简：

(1) $\iint\limits_D f(x^2+y^2)(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $y=1$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D f(x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(3) $\iint\limits_D (xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 $D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leqslant 4\}$.

分析 利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性化简.

解 (1) 令 $g(x,y)=xyf(x^2+y^2)$. 因为区域 D 关于 y 轴对称，且 $g(-x,y)=-g(x,y)$，故 $\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则有

$$\iint_D f(x^2+y^2)(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

进一步地，令 D_1 为区域 D 在第一象限的部分，则有

$$\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 令 D_1 为区域 D 在第一象限的部分. 因为 D 关于 x 轴和 y 轴均对称，且 $f(x^2y^2)$ 关于自变量 x 或关于 y 均为偶函数，则

$$\iint_D f(x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_1} f(x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 易见，积分区域 D 是一个椭圆形区域，面积为 2π. 因为积分区域关于 x 轴对称，且函数 $f(x,y)=xy$ 关于自变量 y 是奇函数，所以 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；又因为 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$，所以

$$\iint_D (xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

习 题 3.1

思考题

1. 将二重积分的定义与定积分的定义进行比较,找出它们的相似之处与不同之处.

2. 试用二重积分表示 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}e^{\frac{i^2+j^2}{n^2}}$.

3. 利用二重积分的对称性质简化计算,需要考虑哪些因素?

A类题

1. 用二重积分表示由平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围成的四面体的体积 V,并用不等式(组)表示曲顶柱体在 xOy 坐标面上的底.

2. 计算 $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

3. 判断 $\iint\limits_{r\leqslant|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\,d\sigma\,(0<r<1)$ 的符号.

4. 比较 $\iint\limits_D(x+y)^2\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D(x+y)\,d\sigma$ 的大小,其中 $D=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant 1\}$.

5. 利用二重积分的性质估计下列积分值的范围:

(1) $\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}\,d\sigma$,其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1, 0<b<a\right\}$;

(2) $\iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+9}}$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 3\}$.

6. 利用二重积分的对称性质化简:

(1) $\iint\limits_D f(x^2y)(1+2x)\,d\sigma$,其中 D 由曲线 $y=3x^2$ 与 $y=2$ 所围成;

(2) $\iint\limits_D(5y+1)\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}$.

B类题

1. 用二重积分表示由圆形抛物面 $z=4-(x^2+y^2)$ 及平面 $z=0$ 所围成的曲顶柱体 V 的体积,并用不等式(组)表示曲顶柱体在 xOy 坐标面上的底.

2. 利用二重积分的几何意义,计算 $\iint\limits_D(R-\sqrt{x^2+y^2})\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

3. 判断 $\iint\limits_D\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma$ 的符号,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

4. 利用二重积分的性质估计下列积分值的范围:

(1) $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(2) $\iint\limits_D (x+y+10)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

5. 利用二重积分的对称性质化简：

(1) $\iint\limits_D (2xf(x^2y)+3)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(2) $\iint\limits_D (2x+1)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-3\leqslant y\leqslant 3\}$.

3.2 二重积分的计算方法
Calculation of double integrals

由定义3.1可见，二重积分仍然是计算一类和式的极限，并且形式上要比定积分的更加复杂.因此，直接利用定义计算二重积分会十分困难.为了计算一般形式的二重积分，可以从计算曲顶柱体的体积入手.本节首先给出二重积分在直角坐标系中的计算方法，然后给出其在极坐标系中的计算方法.

3.2.1 直角坐标系下二重积分的计算

根据二重积分的几何意义，当二重积分的被积函数在积分区域上连续且非负时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 等于曲顶柱体的体积.在学习定积分在几何上的应用时，我们知道：若已知一立体的平行截面的面积，便可以利用定积分计算它的体积.受此启发，若已知曲顶柱体的平行于某坐标面的截面面积，也可以计算它的体积，而截面面积可以利用定积分的方法解决.

为了更直观地理解二重积分在直角坐标系下的计算方法，需要先对积分区域进行分类，并根据每个分类将二重积分化为累次积分，再利用计算定积分的方法计算累次积分.

1. 积分区域的分类

一般地，平面积分区域可以分为三类，即 X 型区域、Y 型区域和混合型区域.

类型一　X 型区域

设有区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$，其中函数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 分别在 $[a,b]$ 上连续.如果用垂直于 x 轴的直线($a<x<b$)穿过 D 的内部时，这些直线与 D 的边界最多有两个交点，如图3.5(a)，(b)所示.此种类型的区域称为 X 型区域.

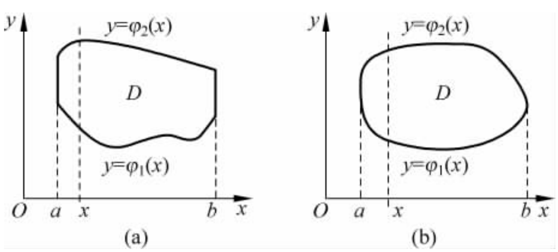

图 3.5

类型二　Y 型区域

设有区域 $D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$，其中函数 $\psi_1(y)$，$\psi_2(y)$ 分别在 $[c,d]$ 上连续. 如果用垂直于 y 轴的直线 $(c<y<d)$ 穿过 D 的内部时，这些直线与 D 的边界最多有两个交点，如图 3.6(a)，(b)所示. 此种类型的区域称为 Y 型区域.

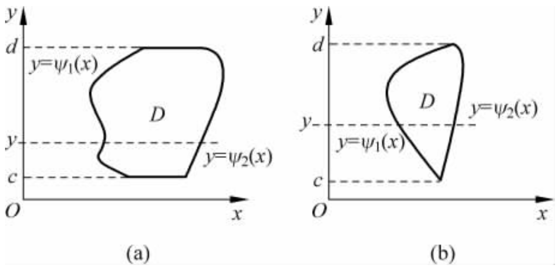

图　3.6

X 型区域和 Y 型区域统称为简单区域. 还有一类有界闭区域，它既不是 X 型区域，又不是 Y 型区域，称之为混合型区域.

类型三　混合型区域

对于有界闭区域 D，如果用垂直于 x 轴和 y 轴的直线穿过 D 的内部时，除了相交为线段的情形外，存在直线与 D 的边界的交点多于两个的情形，如图 3.7 所示，此种类型的积分区域称为**混合型区域**.

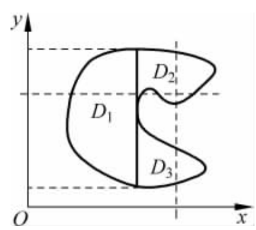

图　3.7

对于混合型区域，可以用一条或几条辅助线将其分割为若干个小区域，使得这些小区域为简单区域，即或是 X 型区域，或是 Y 型区域. 例如，如图 3.7 所示的区域，可用一条辅助线将区域 D 分割为三个 X 型区域.

2. 直角坐标系中的累次积分法

下面根据积分区域的类型将二重积分化为累次积分，其中假定 $f(x,y)\geqslant 0$.

类型一　X 型区域的累次积分

假设二重积分的积分区域 D 为 X 型区域，如图 3.8 所示，在闭区间 $[a,b]$ 上取一定点 x_0，过点 x_0 作与 yOz 坐标面平行的平面，方程为 $x=x_0$，该平面与曲顶柱体相交所得的截面是一个底边为闭区间 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$、曲边为曲线 $z=f(x_0,y)$ 的曲边梯形，截面的面积记作 $A(x_0)$. 由定积分的几何意义可知，$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)\mathrm{d}y$.

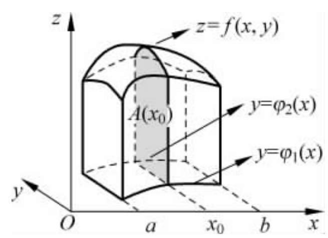

图　3.8

一般地，当 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动时，与 yOz 坐标面平行的截面面积可以表示为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

于是，利用计算“平行截面面积为已知的立体的体积”的方法，曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$