第 3 章

微分中值定理与导数的应用

Mean Value Theorem of Differentials and Derivative's Applications

本章将利用函数的导数这一有效工具来研究函数自身所应具有的性质,首先,介绍微分中值定理.然后,运用微分中值定理,介绍一种求未定式极限的有效方法——洛必达法则.最后,运用微分中值定理,通过导数来研究函数及其曲线的某些性态,并利用这些知识解决一些实际问题.

3.1 微分中值定理

中值定理揭示了函数在某区间的整体性质与该区间内部某一点的导数之间的关系,因而称为中值定理.中值定理既是用微分学知识解决应用问题的理论基础,又是解决微分学自身发展的一种理论性模型,因而称为微分中值定理.

微分中值定理包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理.

3.1.1 罗尔定理

定理 1(罗尔定理) 如果函数 $f(x)$满足:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导;

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

如图 3-1 所示,由定理假设知函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,表明函数 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$的图形是一条连续曲线段 ACB,函数 $f(x)$在(a,b)内可导,表明函数 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$的图形上每一点处都有切线,$f(a)=f(b)$表示直线段$\overline{AB}$平行于 x 轴.

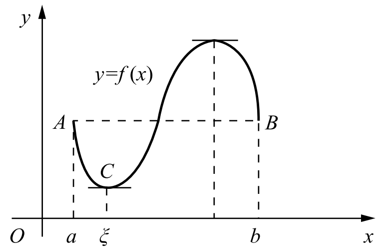

图 3-1

定理的结论表明,在曲线上至少存在一点 C,在该点曲线具有水平切线(平行于$\overline{AB}$).

证明 因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续,根据闭区间上连

续函数的性质，$f(x)$在$[a,b]$上必取得最大值 M 和最小值 m.

(1) 如果 $M=m$，则 $f(x)$在$[a,b]$上恒等于常数 M，因此，对一切 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)=0$. 定理自然成立.

(2) 若 $M>m$，由于 $f(a)=f(b)$，因此 M 和 m 中至少有一个不等于 $f(a)$，不妨设 $M\neq f(a)$（设 $m\neq f(a)$，证明完全类似），则 $f(x)$应在(a,b)内的某一点 ξ 处达到最大值，即 $f(\xi)=M$. 下面证明 $f'(\xi)=0$.

因为 $\xi\in(a,b)$，由定理假设(2)知 $f'(\xi)$存在，因而有

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

又 $f(x)$在 ξ 达到最大值，所以不论 Δx 是正的还是负的，只要 $\xi+\Delta x\in(a,b)$，总有

$$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0.$$

当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

根据极限的保号性及 $f'(\xi)$的存在知

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

当 $\Delta x<0$ 时，有

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

于是

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

从而必须有

$$f'(\xi)=0.$$

注 (1) 证明一个数等于 0 往往证其大于等于 0，又小于等于 0，或证明其等于它的相反数.

(2) 称导数为 0 的点为函数的**驻点**（或**稳定点**、**临界点**）.

(3) 罗尔定理的三个条件缺少其中任何一个，定理的结论将不一定成立. 但也不能认为这些条件是必要的. 例如，$f(x)=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi\right)$在区间$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$上连续，在$\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$内可导，但 $0=f(0)\neq f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1$，而此时仍存在 $\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$，使 $f'(\xi)=\cos\frac{\pi}{2}=0$（参见图 3-2）.

例 1 验证罗尔定理对函数 $f(x)=\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的正确性.

解 显然函数 $f(x)=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上满足罗尔定理的三个条件，由 $f'(x)=\cos x$，故在$(0,2\pi)$内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi)=0$. 事实上$(0,2\pi)$内的点 $\xi_1=\frac{\pi}{2}$ 和 $\xi_2=\frac{3\pi}{2}$ 都可取做 ξ.

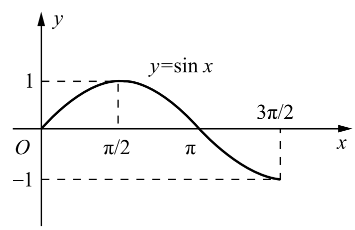

图 3-2

例 2 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=f(2)=0$. 由罗尔定理，$\exists \xi_1 \in (1,2)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，即 ξ_1 是 $f'(x)=0$ 的一个实根.

$f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，在 $(2,3)$ 内可导，且 $f(2)=f(3)=0$. 由罗尔定理，$\exists \xi_2 \in (2,3)$，使得 $f'(\xi_2)=0$，即 ξ_2 是 $f'(x)=0$ 的一个实根.

又因为 $f'(x)$ 为二次多项式，最多只能有两个零点，故 $f'(x)=0$ 恰好有两个实根，分别在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且对于 $(0,1)$ 内所有 x 有 $f'(x)\neq 1$，求证在 $[0,1]$ 上有且仅有一个 x_0，使 $f(x_0)=x_0$.

证明 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(1)=f(1)-1\leqslant 0$，$F(0)=f(0)\geqslant 0$. 由连续函数介值定理知至少存在一点 $x_0\in[0,1]$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$.

以下证明在 $[0,1]$ 上仅有一点 x_0，使 $F(x_0)=0$.

假设另有一点 $x_1\in[0,1]$，使得 $F(x_1)=0$. 不妨设 $x_0<x_1$，则由罗尔定理可知在 (x_0,x_1) 上至少有一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$，这与原题设矛盾. 这就证明了在 $[0,1]$ 内有且仅有一个 x_0，使 $f(x_0)=x_0$.

罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 这个条件是相当特殊的，它使罗尔定理的应用受到限制. 拉格朗日在罗尔定理的基础上作了进一步的研究，取消了罗尔定理中这个条件的限制. 但仍保留了其余两个条件，得到了在微分学中具有重要地位的拉格朗日中值定理.

3.1.2 拉格朗日中值定理

去掉罗尔定理中的第三个条件 $f(a)=f(b)$，会得到什么结论呢（会不会在曲线上仍存在一点 C，曲线在 C 点的切线平行于 $\overline{AB}$）？由图 3-3 可以看出，连续曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点 C，曲线在这点的切线也平行于直线段 AB，但这时直线段 AB 并不平行于 x 轴.

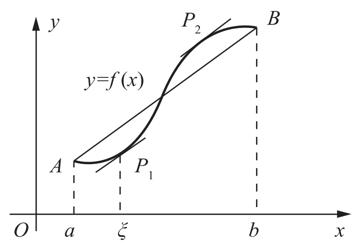

图 3-3

下面的拉格朗日中值定理反映了这个几何事实.

定理 2 若函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{3-1}$$

式(3-1)称为**拉格朗日中值公式**.

证明 将式(3-1)改写为如下等价形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]\bigg|_{x=\xi}=0.$$

将此式与罗尔定理中的结论相比较，可引入辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

则 $F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且

$$F(a)-F(b)=0,\quad 即\quad F(b)=F(a).$$

由罗尔定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

因此得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注 (1) 罗尔定理是拉格朗日中值定理 $f(a)=f(b)$时的特例.

(2) 拉格朗日中值公式反映了可导函数在$[a,b]$上整体平均变化率$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$与在(a,b)内某点 ξ 处函数的局部变化率 $f'(\xi)$的关系.因此,拉格朗日中值定理是连接局部与整体的纽带.

(3) 此定理的证明使用了“根据待定结论构造辅助函数”的方法.这对许多证明题都是很有效的方法.后面我们还会用到这个方法.另外,还可用斜率相等构造辅助函数.

(4) 拉格朗日中值定理的结论常称为拉格朗日公式,它有几种常用的等价形式,可根据不同问题的特点,在不同场合灵活运用:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b),\tag{3-2}$$

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\quad \theta\in(0,1),\tag{3-3}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\quad \theta\in(0,1).\tag{3-4}$$

(5) 值得注意的是,在式(3-2)中,无论 $a<b$ 或 $a>b$,公式总是成立的,其中 ξ 是介于 a 与 b 之间的某个数.同样地,式(3-4)无论 $h>0$ 或者 $h<0$ 都是成立的.

由拉格朗日中值定理可得到在微分学中很有用的三个推论.

推论 1 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)>0,x\in(a,b)$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增.

证明 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$,不妨设 $x_1<x_2$,则由式(3-2)可得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2.$$

由于 $f'(x)>0,x\in(a,b)$,因此 $f'(\xi)>0$,从而

$$f(x_2)>f(x_1).$$

由 x_1,x_2 的任意性可知 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增.

类似地可以证明:若 $f'(x)<0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调递减.

推论 2 如果 $f(x)$在开区间(a,b)内可导,且 $f'(x)\equiv 0$,则在(a,b)内,$f(x)$恒为一个常数.

它的几何意义是:斜率处处为零的曲线一定是一条平行于 x 轴的直线.

证明 在(a,b)内任取两点 x_1,x_2,不妨设 $x_1<x_2$,显然 $f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足拉格朗日中值定理的条件,于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2.$$

因为 $f'(x)\equiv 0$,所以 $f'(\xi)=0$,从而

$$f(x_2)=f(x_1).$$

这说明区间内任意两点的函数值相等,从而证明了在(a,b)内函数 $f(x)$是一个常数.

推论 3 若 $f(x)$及 $g(x)$在(a,b)内可导,且对任意 $x\in(a,b)$,有 $f'(x)=g'(x)$,则在(a,b)内,$f(x)=g(x)+C$(C 为常数).

证明 因$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=0$,由推论 2,有 $f(x)-g(x)=C$,即 $f(x)=g(x)+C,x\in(a,b)$.

例 4 证明不等式

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

对一切 $x>0$ 成立.

证明 由于 $f(x)=\ln(1+x)$在$[0,+\infty)$上连续、可导,对任何 $x>0$,在$[0,x]$上运用微分中值公式(3-2)可得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad 0<\xi<x,$$

即

$$\ln(1+x)-0=\frac{1}{1+\xi}x,\quad 0<\xi<x.$$

由于

$$\frac{x}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}x<x,$$

因此当 $x>0$ 时,有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

例 5 设 $f(x)$在$[0,\delta]$($\delta>0$)上连续,在$(0,\delta)$内可导,若

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=A,$$

试证 $f(x)$在 $x=0$ 点右可导,且 $f'_+(0)=A$.

证明 由导数的定义和拉格朗日中值定理下列式子成立:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xlongequal{\text{存在 }\xi\in(0,x)}\lim_{x\to 0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to 0^+}f'(\xi)=A.$$

例 6 试证 $\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}(|x|\leqslant 1)$.

证明 设 $F(x)=\arcsin x+\arccos x(|x|\leqslant 1)$.

当$|x|<1$ 时,有

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

由推论 2 知,$F(x)$在$(-1,1)$上恒为常数,即 $F(x)\equiv C$,C 为常数,$x\in(-1,1)$.

将 $x=0$ 代入上式,得 $C=\frac{\pi}{2}$,因此,当$|x|<1$ 时,有 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

显然，当 $|x|=1$ 时，$F(x)=\frac{\pi}{2}$.

故当 $|x|\leqslant 1$ 时，有

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}.$$

3.1.3　柯西中值定理

柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广，可叙述如下.

定理 3（柯西中值定理）　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，

那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad (a<\xi<b). \tag{3-5}$$

证明　首先明确 $g(a)\neq g(b)$. 假若 $g(a)=g(b)$，则由罗尔定理，至少存在一点 $\xi_1\in(a,b)$，使 $g'(\xi_1)=0$，这与定理的假设矛盾. 故 $g(a)\neq g(b)$.

将式(3-5)写成如下等价形式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)\right]\Bigg|_{x=\xi}=0$.

故作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x).$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(b)-F(a)=0$，即 $F(a)=F(b)$. 于是在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

从而有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

特别地，若取 $g(x)=x$，则 $g(b)-g(a)=b-a$，$g'(\xi)=1$，式(3-5)就成了式(3-1)，可见拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情形.

例 7　设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

证明　将待证等式右端改写为

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}.$$

由上式右端可见，若令

$$F(x)=\frac{f(x)}{x}, \quad G(x)=\frac{1}{x},$$

则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件,因此,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

将 $F'(\xi)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,$G'(\xi)=-\frac{1}{x^2}$ 代入上式,得

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

为了进一步说明构造辅助函数方法的有效性,下面再介绍两个例子.

例 8 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=0$,试证:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi).$$

证明 将待证结论变形为

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=[xf(x)]'|_{x=\xi}=0,$$

可见若令 $F(x)=xf(x)$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的全部条件,则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi).$$

例 9 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=0$,试证:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$\alpha f(\xi)+f'(\xi)=0, \quad \xi\in(a,b).$$

证明 将待证等式左端的 ξ 写为 x,得

$$\alpha f(x)+f'(x)=0.$$

但它不是某个函数的导数. 为了能证 $\alpha f(\xi)+f'(\xi)=0$,将此式两边同乘以一个函数 $\varphi(x)$,得

$$\alpha\varphi(x)f(x)+\varphi(x)f'(x)=0,$$

使得左边可写为 $(\varphi(x)f(x))'=0$,即

$$(\varphi(x)f(x))'=\varphi'(x)f(x)+\varphi(x)f'(x)=\alpha\varphi(x)f(x)+\varphi(x)f'(x).$$

由此可得 $\varphi'(x)=\alpha\varphi(x)$,故 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$.

因此,若令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$,则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $F(a)=F(b)=0$,则由罗尔定理,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$. 使

$$F'(\xi)=[\alpha f(\xi)+f'(\xi)]\mathrm{e}^{\alpha\xi}=0.$$

因 $\mathrm{e}^{\alpha\xi}>0$,故有

$$\alpha f(\xi)+f'(\xi)=0, \quad \xi\in(a,b).$$

习题 3.1

1. 验证函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件,并求出相应的 ξ,使

$f'(\xi)=0$.

2. 下列函数在指定区间上是否满足罗尔定理的三个条件？有没有满足定理结论中的 ξ？

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}-1,[-1,1]$;

(2) $f(x)=|x-1|,[0,2]$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\leqslant\pi,\\ 1, & x=0,\end{cases}\quad[0,\pi]$.

3. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=0,\xi\in(a,b).$$

5. 设 $f(a)=f(c)=f(b)$，且 $a<c<b$，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

6. 验证拉格朗日中值定理对函数 $f(x)=x^3+2x$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性，并求出满足条件的 ξ 值.

7. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总位于区间的正中间.

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=f(a),\qquad \xi\in(a,b).$$

（提示：由 $F(x)=xf(x)$，利用拉格朗日中值定理，或由 $F(x)=xf(x)-xf(a)$，利用罗尔定理）

9. 证明下列不等式：

(1) $a>b>0,n>1$，证明 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

(2) $a>b>0$，证明 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$;

(3) $|\arctan b-\arctan a|\leqslant|b-a|$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 试证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$. 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

$$\left(\text{提示：问题转化为证}\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}\right)$$

提高题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\tau\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\tau)=1$.

2. 已知函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0,\quad \xi\in(a,b).$$

3. 设函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上二阶可导且存在相等的最大值,又

$$f(a)=g(a),\quad f(b)=g(b).$$

证明:(1)存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $f(\eta)=g(\eta)$;(2)存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

4. 设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数,且 $f(1)>0$,$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$,证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.

5. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导且 $f(0)=f(1)=0$,但当 $x\in(0,1)$时,$f(x)>0$,求证:$\exists\,\xi\in(0,1)$,使$\dfrac{2016\cdot f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

6. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,并且满足 $f(0)\leqslant0$,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.试证:

(1) 存在 $\xi_1\in(-\infty,0)$和 $\xi_2\in(0,+\infty)$使得 $f(\xi_1)=2014=f(\xi_2)$;

(2) 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使得 $f(\xi)+f'(\xi)=2014$.

7. 设函数 $f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导,且$|f(x)|\leqslant1$,$f(-2)=f(0)=f(2)$.又设$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$.试证:在$(-2,2)$内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

3.2 洛必达法则

本节我们将利用微分中值定理来考虑某些重要类型的极限.

由第 2 章我们知道在某一极限过程中,$f(x)$和 $g(x)$都是无穷小量或都是无穷大量时,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限可能存在,也可能不存在.通常称这种极限为**未定式**(或**待定型**),并分别简记为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$.对于这种未定式的计算,有一个重要而简便的方法,即本节要介绍的**洛必达(L'Hospital)法则**.

3.2.1 $\dfrac{0}{0}$型未定式

定理 1 设 $f(x)$,$g(x)$满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

(2) $f(x)$,$g(x)$在$\mathring{U}(x_0)$内可导,且 $g'(x)\neq0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$).

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这就是说:当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在时,$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也存在且等于$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$为无穷大时,$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也为无穷大.

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

证明 由于函数在 x_0 点的极限与函数在该点的定义无关,由条件(1),不妨设 $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$. 由条件(1)和(2)知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续. 设 $x\in\mathring{U}(x_0)$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[x_0,x]$ 或 $[x,x_0]$ 上满足柯西定理的条件,于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

当 $x\to x_0$ 时,显然有 $\xi\to x_0$,由条件(3)得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注 (1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为 $\frac{0}{0}$ 型未定式,且 $f'(x)$, $g'(x)$ 满足定理条件,则可继续使用洛必达法则.

(2) 洛必达法则仅适用于未定式求极限,运用洛必达法则时,要验证定理的条件,当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 既不存在也不为∞时,不能运用洛必达法则.

(3) 这个定理的结论对于 $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, $x\to\infty$ 的情形都成立.

(4) 洛必达法则可与其他求极限的方法混合使用,达到简化计算的目的. 例如**等价无穷小代换,将非零极限因子先求出来**等.

例 1 求:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}$.

解 (1) 该极限属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

注 ① 上式中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}$ 已不是未定式,不能对它应用洛必达法则,否则会导致错误结果. 以后使用洛必达法则时应经常注意这一点. 如果不是未定式,就不能用洛必达法则.

② 本题用等价无穷小代换会更简单.

(2) 该极限属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=-2.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 本题可以对分子分母分解因式,约去零公因子,但这需要技巧. 应用洛必达法则更为直接.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$