第 3 章

无穷级数

Infinite Series

无穷级数主要研究无穷多个数量或函数相加的问题，它本质上是一种特殊数列的极限，因而也是表示函数、研究函数性质和进行数值计算的一个重要的数学工具，无穷级数在自然科学及工程技术中有着重要而广泛的应用.本章首先讨论常数项级数及其敛散性问题；然后讨论幂级数的收敛域和函数以及函数的幂级数的展开等问题.

3.1 常数项级数的概念和性质

3.1.1 常数项级数的概念

在生活中我们常常会遇到无穷多个数相加的情形.例如，我国战国时期的著名哲学家和思想家庄子在《庄子·天下篇》中提出的“一尺之棰，日取其半，万事不竭”，意思是说，一尺长的木杖，第一天截去它的一半即$\frac{1}{2}$，第二天截去它的一半的一半即$\frac{1}{4}$，……这样继续下去，千秋万代也截不完.这样每天截去的木杖的长度分别为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots, \tag{3-1}$$

是一个等比数列，截去的木杖的总长度为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

这是一个无穷多个数相加的问题.一般情况下，计算这个和可采用数列(3-1)的前 n 项和

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

取天数 $n\to\infty$时的极限来计算，即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

在理论和实际应用中，类似这样的问题还有很多，它们都涉及无穷多个数量或函数相加的问题.为此，我们引入无穷级数的概念.

定义 1 给定数列 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$,称表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为**无穷级数**,简称为**级数**,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{3-2}$$

其中 u_n 称为该级数的**通项**或**一般项**(general term).

若级数(3-2)中的每一项 u_n 都为常数,则称该级数为**常数项级数**(series with constant terms);若级数(3-2)中的每一项 $u_n=u_n(x)$是关于 x 的函数,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为**函数项级数.**

级数(3-2)中的前 n 项之**和**(sum)

$$u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数(3-2)的**部分和**,记为 s_n,即

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k. \tag{3-3}$$

由式(3-3)可知

$$s_1=u_1,\quad s_2=u_1+u_2,\quad s_3=u_1+u_2+u_3,\quad \cdots$$

当 n 依次取 1,2,3,…时,级数的部分和 s_n 构成的数列$\{s_n\}$称为级数(3-2)的**部分和数列.**

我们注意到,在研究前面截杖问题的实例中,求得截去木杖的总长为无穷个数量相加的"和"且等于1,而这个"和"是从有限项部分和 s_n 出发,取 $n\to\infty$时的极限推出的.那么,是不是所有的无穷级数都有一个"和"表示它?为此,我们引入了级数收敛和发散的概念.

定义 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列$\{s_n\}$的极限存在,且等于 s, 即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**(convergence),并称极限值 s 为此**级数的和.** 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s,$$

这时也称该级数收敛于 s. 若部分和数列$\{s_n\}$的极限不存在,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散(divergence).**

例 1 判别无穷级数$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$的敛散性.

解 可根据一般项的特点,将其拆成两项之差后,通过求部分和数列的极限来判别.

因为 $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,因此

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以该级数收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$.

例 2 无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+\cdots+aq^n+\cdots\quad(a\neq 0)$$

称为等比级数（或几何级数），q 称为该级数的公比，试讨论该级数的敛散性.

解 该级数的前 n 项部分和为

$$s_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q},\quad q\neq 1.$$

（1）当 $|q|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}.$$

由定义 2 知，该等比级数收敛，其和 $s=\dfrac{a}{1-q}$；

（2）当 $|q|>1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\infty.$$

所以该等比级数发散；

（3）当 $q=1$ 时，$s_n=na$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$，所以该等比级数发散；

（4）当 $q=-1$ 时，$s_n=a-a+a-\cdots+(-1)^{n+1}a=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ a, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 所以部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限不存在，故该等比级数发散.

综上可知，等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$，当公比 $|q|<1$ 时收敛于 $\dfrac{a}{1-q}$，当公比 $|q|\geqslant 1$ 时发散.

例 3 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证明 假设调和级数收敛到 s，则有

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,\quad \lim_{n\to\infty}s_{2n}=s.$$

而

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{个}}=\frac{1}{2}$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=0$ 矛盾，故假设不成立，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

3.1.2 级数的基本性质

根据级数收敛和发散的定义，可以得出级数以下几个基本性质.

性质 1 设 k 为非零常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同的敛散性，即同时收敛或同时发散，并且当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 s_n 和 t_n，则

$$t_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n.$$

于是，由数列极限的性质可知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 同时存在或同时不存在，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散，且在收敛时 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = k\lim\limits_{n\to\infty} s_n$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 w_n，s_n 和 t_n，则

$$w_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = \sum_{k=1}^{n} u_k \pm \sum_{k=1}^{n} v_k = s_n \pm t_n,$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛可知，它们的部分和数列的极限都存在，不妨分别设为 s 和 t，于是

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm t_n) = s \pm t,$$

即有 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

注 (1) 由性质 1 和性质 2 可得，对于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，以及任意常数 a 与 b，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n + b\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

例如，由前面的例 1 和例 2 可知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} + \frac{5}{3^n}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 + 5 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}.$$

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则必有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

否则，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，又由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，据性质 2 可得，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(u_n \pm v_n) - u_n] = \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

也收敛，与已知矛盾.

(3) 但若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 可能收敛也可能发散.

性质 3 级数去掉、增加或改变有限项，不改变级数的敛散性.

此性质是显然的，因为一个级数收敛主要取决于 n 充分大以后的变化情况，而与前面的有限项无关，但有限项的变动，收敛级数的和将有所变动.

例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$，相当于由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 去掉前有限项之后得到的，由性质 3 可知，该级数是发散的.

性质 4 收敛级数加括号后所成的新级数仍收敛，且其和不变. 反之不然.

这是因为，如果对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不改变项的次序，只将级数的一些项加括号，例如，将相邻两项加括号所得级数

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})+\cdots$$

其部分和数列实际上是原级数部分和数列 $\{s_n\}$ 的子数列 $\{s_{2n}\}$，因而当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，其部分和数列 $\{s_n\}$ 必收敛，其子数列 $\{s_{2n}\}$ 也必然收敛，且有相同的极限 s，即级数的和不变，由此可理解性质 4 是正确的，这里不再给出具体的证明.

注 加括号后所成的级数收敛，不能推出原级数收敛. 例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛，其和为零，但去掉括号后级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却发散.

性质 5（级数收敛的必要条件） 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证明 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，不妨设其和为 s，即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=0.$$

注 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 仅是级数收敛的必要条件而非充分条件. 例如，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 中的 $u_n=\dfrac{1}{n}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但该级数是发散的（见例 3）.

（2）从级数收敛的必要条件可知：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 可以利用这个结论判定级数是否发散. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+\cdots+n+\cdots,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty\neq 0$，所以该级数是发散的.

例 4 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，所以该级数发散.

习题 3.1

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos \frac{n\pi}{n+1}$.

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；　　(2) $\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{4}+\frac{a^4}{6}-\frac{a^5}{8}+\cdots$；

(3) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$；　　(4) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots$.

3. 利用无穷级数收敛与发散的定义,判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n]$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

4. 利用无穷级数的性质,以及等比级数和调和级数的敛散性,判别下列级数的敛散性：

(1) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}+\cdots$；　　(2) $\frac{7}{8}-\frac{7^2}{8^2}+\frac{7^3}{8^3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{7^n}{8^n}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4n}+\cdots$；　　(4) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$；

(5) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}\right)+\cdots$；

(6) $\frac{1}{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{7}}+\cdots$；　　(7) $1+2+\cdots+n+\cdots$.

提高题

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $1+4+\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$；

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2\times10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)$ 的和.

3. 判断下列命题是否正确,并说明理由.

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{v_n}$ 一定发散；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{u_n}$($a$ 为非零常数)发散.

3.2　正项级数敛散性的判别

正项级数是级数中比较简单但却非常重要的级数,许多级数的敛散性问题都可归结为正项级数的敛散性问题.本节介绍几个常用的判别正项级数敛散性的方法.

定义 1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项都是非负的,即 $u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**(series of positive terms).

定理 1　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是部分和数列$\{s_n\}$有界.

证明　由于 $u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,故有

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant \cdots,$$

即部分和数列$\{s_n\}$单调递增.于是,若数列$\{s_n\}$有界,根据"单调有界数列必有极限",可知极限$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,充分性得证.下面证必要性.

因为部分和数列$\{s_n\}$单调递增,显然有下界.假设数列$\{s_n\}$无上界,则$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,这与已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛矛盾.所以数列$\{s_n\}$有界,充分性得证.

利用定理 1 可以得到如下一种非常有效的判别正项级数收敛或发散的方法,即比较判别法.

定理 2(比较判别法)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数,若存在正整数 N,使当 $n \geqslant N$ 时,不等式 $u_n \leqslant v_n$ 成立,则有:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明　根据性质 3,改变级数前面的有限项并不改变级数的敛散性.因此,不妨设 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$,有 $u_n \leqslant v_n$.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的前 n 项部分和分别为 s_n 和 t_n,由上述不等式,有

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n = t_n.$$

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,根据定理 1,数列$\{t_n\}$有上界,从而数列$\{s_n\}$也有上界,再根据定理 1,级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,根据定理 1,数列$\{s_n\}$无上界,从而数列$\{t_n\}$也无上界,根据定理

1，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

例 1 讨论 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ 的收敛性，其中 $p>0$.

解 由于当 $p=1$ 时，该级数为调和级数，是发散的，所以将级数按 $p>1$ 和 $p\leqslant1$ 两种情况讨论.

（1）当 $p\leqslant1$ 时，由于$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据比较判别法可知，此时 p- 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散.

（2）当 $p>1$ 时，由于对任意的 $x>0$，$\exists\, n\in\mathbb{Z}^+$，使得 $n-1\leqslant x<n$，于是有$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{x^p}$，则对于 $\forall\, n\geqslant2$，有

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{n^p}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

从而 p-级数的部分和

$$\begin{aligned}s_n&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\leqslant1+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\\&=1+\left[\frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^n=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}.\end{aligned}$$

可见部分和数列$\{s_n\}$有上界，由定理 1 可知，此时 p-级数收敛.

综上可知，p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

例 2 判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$；　　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 （1）由于

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

已知 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$收敛，由比较判别法知，原级数收敛.

（2）由于

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}=\frac{1}{n+1},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，由比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$发散.

在判别正项级数的敛散性时，什么时候需要加强不等式？什么时候需要减弱不等式？由例 2 可见，当判断级数收敛时，需要加强不等式；当判断级数发散时，需要减弱不等式.

推论（比较判别法的极限形式） 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$（$v_n\neq0$）满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则：

(1) 当 $0<l<+\infty$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $l=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证明 (1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则对给定的 $\varepsilon=\frac{l}{2}>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon=\frac{l}{2}, \quad 即 \quad \frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n.$$

由比较判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散.

类似地，可证明结论(2)和结论(3).

例 3 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

解 (1) 因为 $n\to\infty$时

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2n}}=1.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，所以原级数发散.

(2) 因为 $n\to\infty$时

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=1,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 也收敛.

比较判别法及其极限形式都需要找到一个已知敛散性的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 作为比较对象，在前面的例题中，我们已经得到了 p-级数、调和级数和等比级数的敛散性，通常将其选为比较对象，但在很多情况下，比较对象比较难找. 下面介绍两个判别法，即比值判别法(达朗贝尔判别法)和根值判别法(柯西判别法)，利用级数自身的特点，就可判别出级数的敛散性.

定理 3(比值判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则:

(1) 当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$(包括 $\rho=+\infty$)时,级数发散.

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$,因此总可找到适当小的正数 $\varepsilon_0>0$,使得 $\rho+\varepsilon_0=q<1$. 根据极限的定义,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon_0,$$

于是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon_0=q.$$

所以,当 $n>N$ 时,有

$$u_{n+1}<qu_n<q^2u_{n-1}<\cdots<q^{n-N}u_{N+1}.$$

而 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}q^{n-N}u_{N+1}$ 是公比为 $q(0<q<1)$ 的等比级数,故收敛,所以由比较判别法可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$,可取适当小的正数 $\varepsilon_0>0$,使得 $\rho-\varepsilon_0>1$. 由极限的定义,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon_0,$$

于是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon_0>1,$$

即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 u_n 是逐渐增大的,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,由级数收敛的必要条件可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 类似地,可证明当 $\rho=+\infty$ 时,级数也发散.

注 当 $\rho=1$ 时,正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛,也可能发散.

例如 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,对于任意 $p>0$,总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1,$$

但当 $p>1$ 时,p-级数收敛; $p\leqslant 1$ 时,p-级数发散. 因此,当 $\rho=1$ 时,不能断定级数的敛散性.