第 3 章

函数的极限与连续

Limits and continuity of functions

第 2 章中，我们给出了收敛数列的定义以及数列极限的一些计算方法. 由数列的定义可知，它是一类特殊的函数，并且在研究数列的变化趋势时，自变量 n(只取正整数)的变化过程只有“递增”这一种形式，即 $n\to+\infty$. 对于定义在某区间 I 上的函数 $y=f(x)$而言，不论区间 I 是有限还是无限，它们在该定义区间上是否有一定的变化规律，即自变量趋于无穷大或在某一点有微小变化时，对应的函数值的变化是平稳的、是剧烈的还是具有跳跃性的，这些典型问题都可以用函数的极限和连续进行解答. 本章中，我们首先给出函数极限的定义；然后讨论函数极限的性质、收敛准则和一些计算方法；最后讨论函数的连续与间断及闭区间上连续函数的性质.

3.1 函数的极限

Limits of functions

3.1.1 函数极限的定义

设函数 $y=f(x)$在某区间 I(有限或无限)上有定义，自变量 x 在函数的定义区间 I 上的变化过程通常包括两大类，共六种形式，即：

(1) $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$；

(2) $x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$.

下面我们将逐一给出自变量在上述变化过程中函数极限的定义.

1. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

类比于数列极限的定义，去除数列的特殊性，可以将 $n\to+\infty$ 的形式推广到它的一般情形，即对函数 $y=f(x)$，当 $x\to\infty$ 时，考察函数值的变化趋势. 先看下面的例子.

例 3.1 考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$当 $x\to\infty$时的变化趋势.

解 函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图形如图 1.9(b)所示. 类似数列极限的思想，要使得 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\dfrac{1}{1000}$，只需 $|x|>1000$；要使得 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\dfrac{1}{100^{100}}$，只需 $|x|>100^{100}$ 即可……. 也就是说，随着

自变量的绝对值$|x|$越来越大，$\frac{1}{x}$的值就越来越趋近于0，即$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$可以小于预先给定的任意小正数$\varepsilon$，这时称函数$y=\frac{1}{x}$当$x\to\infty$时的极限为0.

下面给出当$x\to\infty$时函数极限的严格定义.

定义 3.1 设函数$y=f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，A是常数. 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得当x满足不等式$|x|>X$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数A是函数$y=f(x)$当$x\to\infty$时的极限，或称函数当$x\to\infty$时以常数A为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

关于定义3.1的几点说明.

(1) 函数当$x\to\infty$时的极限定义与数列极限的定义有很多相似之处，参考2.1节中关于数列极限定义的说明. 定义3.1的表述方式也称为函数极限的“ε-X”语言.

(2) 几何解释. 从几何上看，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$表示：存在两条直线$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$，当$|x|>X$(即$x>X$或$x<-X$)时，函数$y=f(x)$的图形位于这两条直线之间，即满足$|f(x)-A|<\varepsilon$，如图3.1所示.

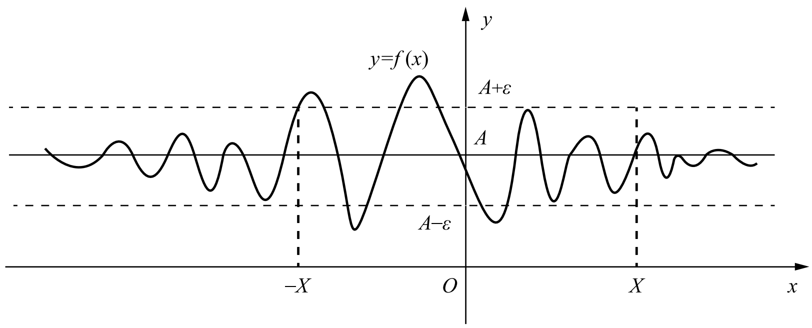

图 3.1

例 3.2 用定义3.1证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2}=1$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{3x+1}=\frac{4}{3}$.

分析 与用数列极限的定义证明类似. 由于ε可以任意小，不妨设$\varepsilon\in(0,1)$，尝试通过求解不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，寻找是否存在X满足该不等式.

证 (1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，要使

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon, \tag{3.1}$$

只需

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取$X=\frac{1}{\varepsilon}$$\left(此处\frac{1}{\varepsilon}不必取正整数，注意和数列极限中N的区别\right)$，则当$|x|>X$时，有不等式

(3.1)成立. 因此, 有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(2) $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 要使

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+2}-1\right|<\varepsilon, \tag{3.2}$$

只需

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+2}-1\right|=\left|\frac{3}{x^2+2}\right|<\left|\frac{3}{x^2}\right|<\varepsilon.$$

取 $X=\sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}}$, 则当 $|x|>X$ 时, 有不等式(3.2)成立. 因此, 有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=1$.

(3) 根据需要, 不妨设 $|x|>1$. $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 要使

$$\left|\frac{4x-3}{3x+1}-\frac{4}{3}\right|<\varepsilon, \tag{3.3}$$

只需

$$\left|\frac{4x-3}{3x+1}-\frac{4}{3}\right|=\frac{13}{3}\left|\frac{1}{3x+1}\right|\leqslant\frac{13}{3}\frac{1}{3|x|-1}\leqslant\frac{13}{6}\frac{1}{|x|}<\varepsilon.$$

取 $X=\max\left\{1,\sqrt{\dfrac{13}{6\varepsilon}}\right\}$, 则当 $|x|>X$ 时, 有不等式(3.3)成立. 因此, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{3x+1}=\frac{4}{3}.$$

证毕

有些函数, 如$\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$等, 它们的定义域虽然是无穷区间, 但也只是单侧无限, 在研究它们的自变量趋于无穷大时的变化趋势时, 也只能是分别沿着 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 变化. 对于指数函数 $y=a^x(0<a<1)$, 如图 1.10 所示, 虽然它的定义域为 $\mathbf{R}$, 但是当 $x\to+\infty$ 时, 函数单调递减趋于零, 而当 $x\to-\infty$ 时, 函数单调递增趋于正无穷大. 对于反正切函数 $y=\arctan x$, 如图 1.16(a)所示, 它的定义域也为 $\mathbf{R}$, 但是当 $x\to+\infty$ 时, 函数单调递增趋于$\dfrac{\pi}{2}$, 而当 $x\to-\infty$ 时, 函数单调递减趋于$-\dfrac{\pi}{2}$, 因此, 需要分别对 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种形式给出函数极限的定义.

定义 3.2 设函数 $y=f(x)$ 在 x 大于某一正数时有定义, A 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 使得当 x 满足不等式 $x>X$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 是函数 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限, 或称函数当 $x\to+\infty$ 时以常数 A 为极限, 记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$

由定义 3.2 可以看到, 数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的特殊情形.

定义 3.3 设函数 $y=f(x)$ 在 x 小于某一负数时有定义, A 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 使得当 x 满足不等式 $x<-X$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 是函数 $y=f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限, 或称函数当 $x\to-\infty$ 时以常数 A 为极限,

记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty).$$

由定义 3.1、定义 3.2 及定义 3.3 可以得到如下定理.

定理 3.1 函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限存在且等于 A 的充分必要条件是：当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时函数的极限存在且都等于 A，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

例 3.3 用定义 3.2 或定义 3.3 证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$.

证 (1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，要使

$$\left|\frac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}-1\right|<\varepsilon, \tag{3.4}$$

只需

$$\left|\frac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}-1\right|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon.$$

取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，有不等式(3.4)成立. 因此，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}=1$.

(2) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，要使

$$|2^x-0|=2^x<\varepsilon, \tag{3.5}$$

只需

$$x<\log_2\varepsilon.$$

取 $X=-\log_2\varepsilon$，则当 $x<-X$ 时，有不等式(3.5)成立. 因此，有 $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$. 证毕

2. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

下面考察当自变量的变化过程为 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的变化趋势. 先看下面两个例子.

例 3.4 考察函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x\to2$ 时的变化趋势.

解 函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的图形如图 3.2 所示. 注意到，该函数在点 $x=2$ 处没有定义. 当 x 越来越趋近于 2(但不等于 2)，即 $|x-2|$ 越来越小时，$\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$ 就越来越趋近 4. 要使得 $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\dfrac{1}{1000}$，只需 $|x-2|<\dfrac{1}{1000}$，即自变量落在以 2 为中心，以 $\dfrac{1}{1000}$ 为半径的邻域内即可；要使得 $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\dfrac{1}{100^{100}}$，只需 $|x-2|<\dfrac{1}{100^{100}}$ 即可. 也就是说，随着自变量 x 越来越趋近于 2，函数 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的值就越来越趋近于 4，即

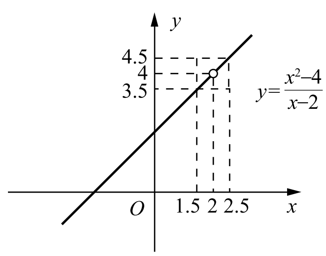

图 3.2

$\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|$可以小于预先给定的正数 ε，这时称函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$当 $x\to2$ 时的极限是 4.

例 3.5 考察函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$当 $x\to0$ 时的变化趋势.

解 函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$的图形如图 3.3 所示. 当 x 分别取 0.5，0.1，0.05，0.01，…时，对应的值分别为 0.96，0.998，0.9996，0.9998，…. 注意到，当 x 越来越趋近于 0 时，即 $|x-0|$ 越来越小时，$y=\dfrac{\sin x}{x}$的值就越来越趋近于 1. 因此可以猜测，1 就是函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$当 $x\to0$ 时的极限. 严格的证明将在 3.2 节中给出.

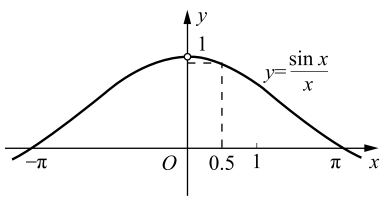

图 3.3

于是，我们有如下的定义.

定义 3.4 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 称为函数 $y=f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，或称函数当 $x\to x_0$ 时以常数 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

关于定义 3.4 的几点说明.

(1) 不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\neq x_0$，即函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可能没有定义，即使有定义，$f(x_0)$也与极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在没有任何关系. 换句话说，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有没有定义不影响$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的存在性，参见例 3.4 和例 3.5. 以后我们将会看到，许多重要的概念都是在点 x_0 处的去心邻域内定义的.

(2) 定义 3.4 从数量上描述了自变量 x 无限接近于 x_0 时，函数 $y=f(x)$就会无限趋近于 A. 它用 ε 描述了 $f(x)$与 A 的接近程度，用 δ 描述了 x 与 x_0 的接近程度 $|x-x_0|<\delta$. δ 的存在性是通过求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 得到印证的，其中 ε 是任意给定的正数. 这表明了 δ 和 ε 的依赖关系，但要注意它们不是函数关系.

(3) "用定义证明函数极限"有时也称为"用 ε-δ 语言证明函数极限"，其中希腊字母 δ（小写，大写为 Δ；∂为其老体的小写字母）的英文表示为 delta，也按此拼写来发音. 在证明时，重要的是 δ 的存在性，不必求其最小值，即在求解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 之前，可以先将 $|f(x)-A|$ 放大，使放大后的表达式中含有因子 $|x-x_0|$，并且容易求出 $|x-x_0|$ 的解集.

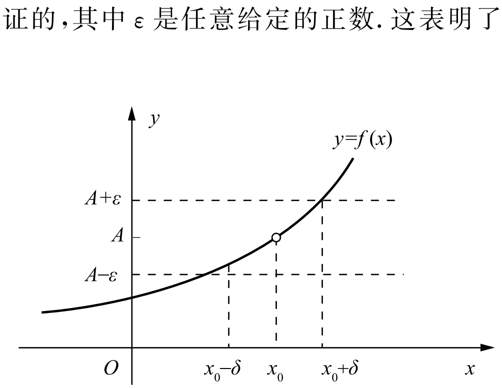

图 3.4

(4) 几何解释. 从几何上来说，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 表示：存在两条直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，函数 $y=f(x)$的图形位于这两条直线之间，即满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$，如图 3.4 所示.

例 3.6 利用定义 3.4 证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$； (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}=2$.

证 (1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x-2|<\varepsilon, \tag{3.6}$$

只需 $|x-2|<\varepsilon$. 取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有不等式(3.6)成立. 因此，有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

(2) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，要使

$$|e^x-1|<\varepsilon, \tag{3.7}$$

只需 $\ln(1-\varepsilon)<x<\ln(1+\varepsilon)$. 取 $\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon),\ln(1+\varepsilon)\}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，有不等式(3.7)成立. 因此，有 $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$.

(3) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，要使

$$\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}-2\right|=\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<\varepsilon, \tag{3.8}$$

为了能够找到 δ，保留因子 $|x-1|$，而将因子 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|$ 放大. 为此加上限制条件

$$0<|x-1|<1,\quad 即\quad 0<x<2,$$

于是有 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|<1$. 因此，由于

$$\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<|x-1|<\varepsilon,$$

取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有不等式(3.8)成立. 因此，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=2.$$

证毕

在函数极限的定义 3.4 中，$x\to x_0$ 表示自变量 x 沿着点 x_0 的两侧趋于 x_0. 但有时候，函数 $f(x)$ 只在 x_0 一侧有定义，或者需要分别研究函数在 x_0 点两侧的性态. 因此，需要引入单侧极限的概念.

定义 3.5 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的右邻域有定义，A 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<x-x_0<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

常数 A 称为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的**右极限(right limit)**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A.$$

定义 3.6 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的左邻域有定义，A 是常数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

常数 A 称为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的**左极限(left limit)**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

由定义 3.4，定义 3.5 和定义 3.6 可以得到下面的结论.

定理 3.2 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处存在极限的充分必要条件是：它在点 x_0 处的左、右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 3.7 讨论下列函数的极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}|x|$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$.

分析 先求函数在点 $x_0=0$ 处的左、右极限，然后利用定理 3.2 判断.

解 （1）由于$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$故有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0 \quad 和 \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0,$$

由定理 3.2 知$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

（2）易见，$f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $x=0$ 是分段点. 由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \quad 即 \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|},$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$不存在.

例 3.8 讨论下列分段函数在分段点的极限是否存在，如果存在，求出极限：

（1）$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0;\end{cases}$ （2）$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\\ e^x, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

分析 先求函数在分段点处的左、右极限，然后利用定理 3.2 判断.

解 （1）易见，$x=0$ 是函数 $f(x)$的分段点. 不难求得

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+4)=4, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，根据定理 3.2，函数 $f(x)$在分段点 $x=0$ 处的极限不存在.

（2）易见，$x=1$ 和 $x=2$ 是函数 $f(x)$的两个分段点. 不难求得

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2=1,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2=4, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} e^x=e^2.$$

在点 $x=1$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，根据定理 3.2，函数 $f(x)$在分段点 $x=1$ 处的极限存在，即$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$；在点 $x=2$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$，根据定理 3.2，函数 $f(x)$在分段点 $x=2$ 处的极限不存在.

3.1.2 无穷小量和无穷大量

在 2.1.4 节中，我们引入了数列的无穷小量和无穷大量. 与之相类似，函数在自变量的某一变化过程中也有无穷小量和无穷大量. 如$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$，$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ 等，这些

函数在自变量的各自变化过程中，极限都是 0. 再如，函数 $y=x$，$y=2^{-x}$，$y=\dfrac{1}{x-2}$分别在 $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to 2$ 时，函数的绝对值都无限变大，如果严格遵循函数极限的定义，这种情况的极限是不存在的，为了研究需要，我们称这些函数在自变量的各自变化过程中的极限为无穷大量.

1. 无穷小量

定义 3.7 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $y=f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的**无穷小量**，简称**无穷小**(**infinitesimal**).

在后面的学习中将会看到，函数的导数、定积分、级数的收敛性等重要概念，都是通过无穷小定义的，这说明无穷小在高等数学中有着不可替代的作用.

关于定义 3.7 的几点说明.

(1) 函数中的无穷小与数列中的无穷小类似，它们不是“很小的常数”，而是一个变量. 除去零外，任何常数，无论它们的绝对值怎么小，都不是无穷小. 因此，不要把无穷小与非常小的数相混淆，如 10^{-100}很小，但它不是无穷小.

(2) 常数 0 是任何极限过程中的无穷小. 无穷小与极限过程分不开，不能脱离自变量的变化过程说某个函数是无穷小. 如 $\sin x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小，但因$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$，所以 $\sin x$ 不是 $x\to\dfrac{\pi}{2}$时的无穷小. 由于 $\lim C=C$(C 为常数)，所以任何非零常数都不是无穷小.

(3) 在定义 3.7 中，若将自变量的变化过程 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，则可定义不同形式的无穷小. 例如，函数 x^3，$\sin x$，$\tan 2x$ 都是当 $x\to 0$ 时无穷小；函数$\dfrac{1}{x^2}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ 都是当 $x\to+\infty$时无穷小.

定理 3.3 在自变量的同一变化过程中，函数 $y=f(x)$的极限为 A 的充分必要条件是：$f(x)=A+\alpha$，其中 α 是该变化过程的无穷小.

分析 利用无穷小的定义.

证 (**必要性**)不失一般性，假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 由定义 3.4 可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

令 $\alpha=f(x)-A$，由无穷小的定义知，α 是$x\to x_0$ 时的无穷小. 因此，$f(x)=A+\alpha$. 这就证明了 $f(x)$可以表示为它的极限 A 与一个无穷小α 之和.

(**充分性**)设 $f(x)=A+\alpha$，其中 A 是常数，α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小. 由无穷小的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha|=|f(x)-A|<\varepsilon.$$

因此有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 证毕

2. 无穷大量

定义 3.8 设 $y=f(x)$在 x_0 的某去心邻域有定义，若$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $y=f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**,简称**无穷大**(**infinity**),也称函数是当 $x\to x_0$ 时有**非正常极限无穷大**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad \text{或} \quad f(x)\to\infty(x\to x_0).$$

将上面的不等式$|f(x)|>M$ 改为

$$f(x)>M \quad \text{或} \quad f(x)<-M,$$

则称函数 $y=f(x)$当 $x\to x_0$ 时是**正无穷大**或**负无穷大**,也称函数是当 $x\to x_0$ 时有**非正常极限**$+\infty$或$-\infty$,分别记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \quad \text{或} \quad f(x)\to+\infty(x\to x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \quad \text{或} \quad f(x)\to-\infty(x\to x_0).$$

与理解无穷小类似,无穷大也是一个变量,不是一个数,不能把无穷大与很大的数混为一谈. 比如 100^{100} 即使很大,但它也不能称为无穷大. 无穷大同样与极限过程分不开,不能脱离自变量的变化过程说某个函数是无穷大.

例 3.9 证明:$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$.

分析 利用无穷大的定义. 通过求解不等式$\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$ 寻求 δ.

证 $\forall M>0$,要使

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|>M,$$

只需$|x-2|<\dfrac{1}{M}$,取 $\delta=\dfrac{1}{M}$,于是$\forall M>0$,$\exists\delta=\dfrac{1}{M}>0$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有$\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$,即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2}=\infty$. 证毕

3. 无穷小量与无穷大量的关系

定理 3.4 若函数 $f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to x_0$ 时的无穷大;反之,若函数 $f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

证 我们只证第一种情形,第二种情形可类似地证明.

因为 $f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,即$\forall\varepsilon\in(0,1)$,$\exists\delta>0$,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)|<\varepsilon \quad \text{或} \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$,由 ε 的任意性和无穷大的定义知,函数$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to x_0$ 时的无穷大. 证毕

类似地,对于自变量的其他变化过程,定理 3.4 的结论同样成立.

在定义 3.1~定义 3.6 中,函数极限的定义主要包括两个方面:一是函数值与极限的近似程度,可以用"$\forall\varepsilon>0$……有$|f(x)-A|<\varepsilon$"来描述;二是自变量的变化过程,包括两大类,共六种情况,即:(1)$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$;(2)$x\to x_0$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$. 如 $x\to x_0$ 可用"$\exists\delta>0$,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时"来描述.

由定义 3.8 知，在引入了函数 $y=f(x)$是自变量的某一变化过程的无穷大后，函数的极限有四种情况，即

$$f(x)\to A,\quad f(x)\to\infty,\quad f(x)\to+\infty,\quad f(x)\to-\infty.$$

对于函数极限的这四种情况以及自变量的变化过程的六种情况，读者一定要对号入座，切不可错位描述. 虽然情况较多，但是可以进行归类描述，如可以针对函数极限进行归类，即 $f(x)\to A$，$f(x)\to\infty$；也可以针对自变量的变化过程进行归类，如 $x\to\infty$，$x\to x_0$.

习 题 3.1

思考题

1. 反正切函数 $y=\arctan x$ 当 $x\to\infty$时的极限是否存在，为什么？

2. 在定义 3.4 中，点 x_0 的去心邻域是否必须要满足，为什么？

3. 当 $x\to x_0$ 时，两种说法"函数 $y=f(x)$的极限不存在"和"函数 $y=f(x)$不以 A 为极限"是否相同，为什么？

4. 无穷小和 0 之间是否存在关系，无穷大和无界函数呢？

A 类题

1. 用极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{6x-1}=\dfrac{1}{6}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$；　(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=+\infty$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=1$；　(5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$；　(6) $\lim\limits_{x\to1^+}(2x+3)=5$.

2. 设 $y=3x-5$，问 δ 该如何取值，才能使得当$|x-3|<\delta$ 时，有$|y-4|<0.001$？

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+2x+2, & x>1,\\ 3x+a, & x<1,\end{cases}$ 问当 a 取何值时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在？

4. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

5. 证明：若函数 $f(x)$是当 $x\to\infty$时的无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to\infty$时的无穷小.

6. 证明：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A<0$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<0$.

B 类题

1. 用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arcsin x=0$；　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$；　(4) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+3)=1$.