

第 1 章

多元函数微分学

1.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

- (1) 理解二元函数的概念,了解多元函数的概念,会求二元函数的定义域。
- (2) 了解二元函数的极限与连续性的概念,了解有界闭区域上连续函数的性质。
- (3) 理解二元函数偏导数与全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件。
- (4) 掌握复合函数一阶偏导数的求法,会求复合函数的二阶偏导数。
- (5) 会求隐函数(包括由两个方程构成的方程组确定的隐函数)的一阶和二阶偏导数。
- (6) 理解二元函数极值与条件极值的概念,会求二元函数的极值,了解求条件极值的拉格朗日乘数法,会求一些比较简单的最大值与最小值的应用问题。

2. 重点内容

- (1) 偏导数和全微分的概念。
- (2) 求多元复合函数的一阶、二阶偏导数。
- (3) 求隐函数的一阶、二阶偏导数。
- (4) 多元函数的极值,包括无条件极值和条件极值。
- (5) 利用多元函数解决实际应用中的最大值、最小值问题以及在一定条件下的最大值、最小值问题。

1.2 内容精要

1. 基本概念

(1) **二元函数的定义** 设 D 是平面上的一个非空点集,如果对于 D 内的任一点 (x, y) , 按照某种法则 f , 都有唯一确定的实数 z 与之对应, 则称 f 是 D 上的二元函数, 它在 (x, y) 处的函数值记为 $f(x, y)$, 即 $z = f(x, y)$, 其中 x, y 称为自变量, z 称为因变量。点集 D 称为该函数的定义域, 数集 $\{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为该函数的值域。

类似地, 可定义三元及三元以上函数。当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数。

(2) **二元函数的几何意义** 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , 对于任意取定的

$P(x, y) \in D$, 对应的函数值为 $z = f(x, y)$, 这样, 以 x 为横坐标、 y 为纵坐标、 z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$, 当 $P(x, y)$ 取遍 D 上的一切点时, 得一个空间点集 $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 这个点集称为二元函数的图形。二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形就是空间中区域 D 上的一张曲面, 定义域 D 是该曲面在 xOy 面上的投影。

(3) **二元函数的极限** 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一去心邻域内有定义, 如果当点 $P(x, y)$ 无限趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 无限趋于一个常数 A , 则称 A 为函数 $z = f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

或

$$f(x, y) \rightarrow A ((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0).$$

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则, 在此不再详述。为了区别于一元函数的极限, 我们称二元函数的极限为二重极限。

说明:

- ① 定义中 $P \rightarrow P_0$ 的方式是任意的;
- ② 二元函数的极限运算法则与一元函数类似。

(4) **二元函数的连续性** 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不连续, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处间断。

如果 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都连续, 则称该函数在区域 D 内连续。在区域 D 上连续的二元函数的图形是区域 D 上的一张连续曲面, 曲面上没有洞, 也没有撕裂的地方。

(5) **偏导数的定义** 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应地函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ 。如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad f_x(x_0, y_0).$$

例如, 有

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

类似地, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数为

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad f_y(x_0, y_0).$$

实际上,偏导数本质上是一元函数的导数, $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $\varphi(x) = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数,即

$$f_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0) = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = (f(x, y_0))'_x \Big|_{x=x_0};$$

而偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 是一元函数 $\psi(y) = f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数,即

$$f_y(x_0, y_0) = \psi'(y_0) = \left. \frac{df(x_0, y)}{dy} \right|_{y=y_0} = (f(x_0, y))'_y \Big|_{y=y_0}.$$

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内任一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数就是 x, y 的函数,它就称为函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导数,记作 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x$ 或 $f_x(x, y)$ 。同理可以定义函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导数,记作 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y$ 或 $f_y(x, y)$ 。

偏导数的概念可以推广到二元以上函数。

(6) 二元函数可微性与全微分的定义 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可以表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 而仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记为 dz , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

若函数在区域 D 内各点处可微分, 则称这函数在 D 内可微分。

(7) 可微分的必要条件

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微分, 则有:

① $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续;

② $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 存在, 且 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分

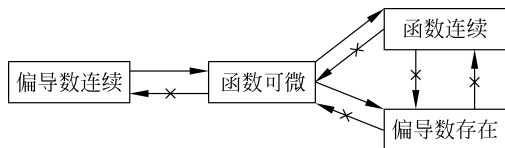
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

(8) 可微分的充分条件

如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 则函数在该点处可微分。

(9) 多元函数连续、可导、可微的关系

偏导数连续的函数一定可微; 可微的函数一定可导; 可微的函数一定连续; 其他则未必。



2. 闭区域上连续函数的性质

定理 1(最大值和最小值定理) 有界闭区域 D 上连续的二元函数, 在 D 上能够取得最大值和最小值。

定理 2(有界性定理) 有界闭区域 D 上连续的二元函数在 D 上一定有界。

定理 3(介值定理) 有界闭区域 D 上连续的二元函数在 D 上能够取得最大值与最小值之间所有的值。

3. 求导法则

(1) 复合函数的求导法则

① 若 $z=f(u, v)$, $u=u(t)$ 及 $v=v(t)$, 则 $z=f[u(t), v(t)]$, 且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

② 若 $z=f(u, v)$, $u=u(x, y)$ 及 $v=v(x, y)$, 则 $z=f[u(x, y), v(x, y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

③ 若 $z=f(u, v, w)$, $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, $w=w(x, y)$, 则

$$z=f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)], \text{ 且}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

④ 若 $z=f(u, x, y)$, $u=u(x, y)$, 则 $z=f[u(x, y), x, y]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 把复合函数 $z=f[u(x, y), x, y]$ 中的 y 看作不变而对 x 的导数; 而 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 把

$z=f(u, x, y)$ 中的 u 及 y 看作不变而对 x 的偏导数; $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的区别与上面相同。

(2) 隐函数的求导法则

① 一个方程的情形

若方程 $F(x, y)=0$ 确定 $y=f(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ 。

若方程 $F(x, y, z)=0$ 确定 $z=f(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ 。

注 F_z 是将 $F(x, y, z)$ 中的 x, y 看作常数对 z 求导的结果, 其他类似。

② 方程组的情形

若方程组 $\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$ 确定 $y=y(x), z=z(x)$, 只要将每个方程两边分别对 x 求

导, 得

$$\begin{cases} F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = 0, \\ G_x + G_y \frac{dy}{dx} + G_z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

解上述关于 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 的二元线性方程组, 求出 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 即可。

4. 偏导数的应用

(1) **二元函数极值** 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的任意一点 (x, y) , 如果

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0),$$

则称函数在 (x_0, y_0) 有极大值; 如果

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

则称函数在 (x_0, y_0) 有极小值; 极大值、极小值统称为极值。使函数取得极值的点称为极值点。

(2) **二元函数取得极值的必要条件** 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在点 (x_0, y_0) 处有极值, 则它在该点的偏导数必然为零, 即

$$f_x(x_0, y_0)=0, \quad f_y(x_0, y_0)=0.$$

(3) 充分条件

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有直到二阶的连续偏导数, 且 $f_x(x_0, y_0)=0$, $f_y(x_0, y_0)=0$ 。令

$$f_{xx}(x_0, y_0)=A, \quad f_{xy}(x_0, y_0)=B, \quad f_{yy}(x_0, y_0)=C.$$

① 当 $AC-B^2>0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极值, 且当 $A>0$ 时取得极小值 $f(x_0, y_0)$; $A<0$ 时取得极大值 $f(x_0, y_0)$ 。

② 当 $AC-B^2<0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取不到极值;

(4) 条件极值

方法一 转化为无条件极值计算

方法二 拉格朗日乘子法

一般地, 条件极值问题可以转化为无条件极值问题来处理, 这种转化对有些问题有效, 但由于要解方程往往有一定困难, 有时甚至根本做不到转化为无条件极值, 这时可以用拉格朗日乘数法。

求函数 $u=f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y)=0$ 下的极值点, 基本步骤为:

① 构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y),$$

其中 λ 为参数

② 求 $L(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$ 对 x, y 及 λ 的一阶偏导数, 并使之为零, 得到

$$\begin{cases} f_x(x, y)+\lambda\varphi_x(x, y)=0, \\ f_y(x, y)+\lambda\varphi_y(x, y)=0, \\ \varphi(x, y)=0, \end{cases}$$

解出 x, y, λ 成为条件驻点, x, y 就是 $u=f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z)=0$ 下可能的极值点。

求函数 $u=f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z)=0$ 下的极值点, 基本步骤为:

① 构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda)=f(x, y, z)+\lambda\varphi(x, y, z),$$

其中 λ 为参数。

② 求 $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$ 对 x, y, z 及 λ 的一阶偏导数, 并使之为零, 得到

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) + \lambda \varphi_x(x, y, z) = 0, \\ f_y(x, y, z) + \lambda \varphi_y(x, y, z) = 0, \\ f_z(x, y, z) + \lambda \varphi_z(x, y, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

解出 x, y, z, λ , 其中 x, y, z 就是 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下可能的极值点。

注 这些可能的极值点是否为极值点, 还需进一步的考查和判别。但在实际问题中, 如果由问题的实际意义知所讨论的问题存在极值(或最值), 而通过拉格朗日乘数法又只求出唯一一个可能极值点, 则无需再论证, 该点就是所求的最大值点或最小值点。

(5) 最大值与最小值求法

有界闭域 D 上的连续函数可以在 D 上取得最大值和最小值。

① 若最大值或最小值在区域 D 的内部取得, 则一定是极值;

② 若最大值或最小值在区域 D 的边界曲线上取得, 则属于条件极值问题。

因此, 求最大值、最小值的一般方法:

① 求函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内的所有驻点;

求函数 $z = f(x, y)$ 在 D 的边界曲线上的所有条件驻点;

计算所有驻点和条件驻点处的函数值, 比较大小即可。

② 在应用问题中, 若已知 $z = f(x, y)$ 在 D 内有最大值或最小值, 且在 D 内有唯一的驻点, 则该驻点一定就是最大值点或最小值点。

(6) 全微分在近似计算中的应用

当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 都较小时, 则由二元函数的全微分可得到近似计算公式

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

1.3 题型总结与典型例题

题型 1-1 求多元函数的定义域

【解题思路】 求比较复杂的多元函数的定义域也和一元函数一样, 先写出构成部分的各简单函数的定义域, 再解联立不等式组即得所求定义域。

例 1.1 求定义域

$$(1) z = \sqrt{x^2 - 4x + y^2} + \ln(y - x^2); \quad (2) u = \sqrt{\arcsin \frac{x^2 + y^2}{z}}.$$

解 (1) 由题设可知

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 \geq 0, \\ y - x^2 > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 \geq 4, \\ y > x^2, \end{cases}$$

定义域为 $\{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 \geq 4, y > x^2\}$ 。

$$(2) \begin{cases} \arcsin \frac{x^2+y^2}{z} \geq 0, \\ \left| \frac{x^2+y^2}{z} \right| \leq 1, \\ z \neq 0, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} z \geq x^2+y^2, \\ z \neq 0, \end{cases}$$

定义域为 $\{(x, y, z) | z \geq x^2 + y^2, z \neq 0\}$ 。

题型 1-2 多元函数的极限

【解题思路】 求二元函数极限常用的方法：

- (1) 利用极限的性质(如极限运算法则、夹逼准则、等价无穷小代换)；
- (2) 用变量代换法转化为求简单的极限或一元函数的极限；
- (3) 利用无穷小量与有界函数之积为无穷小量；
- (4) 若连续, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ；
- (5) 对于多元函数极限洛必达法则不再适用。

例 1.2 求下列极限：

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}, a > 0;$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

解 (1) **解法一** $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left[\left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x^2}{xy(x+y)}}$

而 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{xy} \stackrel{t=xy}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e, \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x^2}{xy(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{1}{y\left(1 + \frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{a}.$

故 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\frac{1}{a}}.$

解法二 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{1}{xy} \cdot \frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{1}{xy} \cdot \frac{x^2}{x}} = e^{\frac{1}{a}}.$

(2) 因为 $0 \leq \left| xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy|$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |xy| = 0$, 由夹逼准则知, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$

例 1.3 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 连续。

证明 因为 $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, 所以 $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$, 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = 0$, 所以

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$, 函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。

题型 1-3 证明二元函数的极限不存在

【解题思路】 证明极限不存在的常用方法是,取两个不同的路径,极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不相

等或取某一路径极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在,均可证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在。

特别地,证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在:

(1) 若 $f(mx, my) = f(x, y)$, 且 $f(x, y) \neq c$, 一般选用直线路径 $y = kx$, 当动点沿 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时极限值随 k 的变化而变化, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在。

(2) 若 $f(m^\alpha x, m^\beta y) = f(x, y) (\alpha > 0, \beta > 0)$, 选用曲线路径 $y = kx^{\frac{\beta}{\alpha}}$, 当动点沿 $y = kx^{\frac{\beta}{\alpha}}$ 趋于 $(0, 0)$ 时极限值随 k 的变化而变化, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在。

(3) $f(mx, my) = m^\alpha f(x, y)$ 时, 可令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 当动点趋于 $(0, 0)$ 时极限值随 θ 的变化而变化, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在。

(4) 若 $f(x, y)$ 为分式函数, 可先将 $f(x, y)$ 的分子、分母变形, 倒推出 y 与 x 的关系, 从而找出要取的路径。

例 1.4 下列极限是否存在? 若存在, 求极限值:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}; \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y + xy^4 + x^2 y}{x + y}; \quad (4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x + y}.$$

证明 (1) 当 y 与 x 同阶时, 分子、分母同阶, $f(mx, my) = f(x, y)$, 可以选用路径 $y = kx$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 + xkx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{1+k}{1+k^2},$$

极限值随 k 的变化而变化, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}$ 不存在。

具有这样特点的极限还可令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta,$$

极限值随 θ 的变化而变化, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}$ 不存在。

(2) $f(mx, m^2 y) = f(x, y)$, $\alpha = 1, \beta = 2$, 令 $y = kx^2$ 时, 分子与分母同阶。因为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{k}{1+k^2}, \text{ 所以 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ 不存在。}$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^3 - x}} \frac{x^3 y + xy^4 + x^2 y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 - x^4 + o(x^4)}{x^3} = -1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{x^3 y + x y^4 + x^2 y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4 + x^5}{2x} = 0,$$

故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y + x y^4 + x^2 y}{x+y}$ 不存在。

(4) 当动点沿直线 $y = -x$ 趋于点 $(0,0)$ 时, 函数 $\frac{x^2 y}{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 的任一邻域内无意义,

故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x+y}$ 不存在。

题型 1-4 用定义判断二元函数在某点是否连续、可偏导及可微

【解题思路】 分界函数在分界点处的偏导数和可微性要用定义来讨论。

(1) 判断 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否连续, 只需求 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 。

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不连续。

(2) 判断 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否可偏导, 就是求两个极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

若两个极限都存在, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可偏导, 且

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

(3) 按定义判断二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否可微, 只需求极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

$$\text{若 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

则函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微;

$$\text{若 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \neq 0,$$

则函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不可微。

特别地, 判断二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微, 只需求极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 可微; 若

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 不可微。

例 1.5 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使得 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是

A. $x_1 > x_2, y_1 < y_2$ B. $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ C. $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ D. $x_1 < x_2, y_1 > y_2$

解 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ 表示函数 $f(x, y)$ 关于变量 x 是单调递增的, 关于变量 y 是单调递减的. 因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时, 必有 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$, 故选 D.

例 1.6 当 $x^2 + y^2 > 0$ 时, $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, f(0, 0) = 0$, 研究函数在点 $(0, 0)$ 的可微性.

解 $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t^2} = 0.$

同理 $f_y(0, 0) = 0$. 于是

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2} = 0,$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

例 1.7 如果 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微. (2012 考研数学一, 二, 三)

证明 因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0$, 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

又因 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 则

$$f(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2}$ 存在, 所以 $f(x, y) - f(0, 0)$ 是 $x^2 + y^2$ 的同阶或

高阶无穷小, 从而 $f(x, y) - f(0, 0)$ 是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的高阶无穷小, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

特别地,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0,$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

即 $f(x, y) - f(0, 0) = f_x(0, 0) \cdot x + f_y(0, 0) \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2}),$

所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

例 1.8 设函数 $\phi(x, y) = |x - y| \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 连续, 研究 $\phi(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处的可微性.

解 令 $z = \phi(x, y) = |x - y| \varphi(x, y)$, 则 $\phi(0, 0) = 0 \cdot \varphi(0, 0) = 0,$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \phi(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x - y| \varphi(x, y) = 0 = \phi(0, 0),$$