第3章

微分中值定理与导数的应用

3.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理,会运用中值定理证明一些等式和不等式.

(2) 掌握函数单调性的判别方法,会求函数的单调区间,会利用单调性证明一些不等式.

(3) 熟练掌握求函数极值的方法,会求函数在闭区间上的最大值和最小值,会解简单的最大值、最小值的应用题.

(4) 会求曲线的凹凸区间和拐点,会求曲线的渐近线,能正确地做出某些函数的图形草图.

(5) 了解泰勒公式、泰勒定理、麦克劳林公式及其拉格朗日型余项,能写出某些初等函数的麦克劳林展开式.

(6) 熟练掌握洛必达法则,会求各类"未定式"的极限.

2. 重点内容

(1) 用中值定理讨论方程在给定区间内的根的情况、证明等式;

(2) 用中值定理和单调性证明不等式;

(3) 用洛必达法则求未定式的极限;

(4) 函数的极值、单调性、凹凸性、拐点及渐近线的求法;

(5) 函数的最大值和最小值以及求实际问题的最大值或最小值.

3.2 内容精要

1. 中值定理与泰勒公式

定理1(费尔马定理) 若函数 $f(x)$满足条件:

(1) $f(x)$在点 x_0 的某邻域有定义,并且在某邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$或 $f(x)\geqslant f(x_0)$;

(2) $f(x)$在 x_0 处可导.

则有 $f'(x_0)=0$.

定理2(罗尔定理) 设函数 $f(x)$满足条件:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导;

(3) $f(a)=f(b)$.

则在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi)=0$.

定理3(拉格朗日中值定理) 设函数 $f(x)$满足条件:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导.

则在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

注意 (1) 在需要建立 $f(x)$与其导数 $f'(x)$联系时,应考虑使用拉格朗日中值定理.

(2) 在证明不等式时,应判断是否使用拉格朗日中值定理.

定理4(柯西定理) 设函数 $f(x),g(x)$满足条件:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内均可导;且 $g'(x)\neq 0$.

则在(a,b)内至少存在一点 ξ 使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

定理5(泰勒公式) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数,则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x,在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为拉格朗日型余项,$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$称为佩亚诺型余项.

(麦克劳林公式) 当 $x_0=0$ 时,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

常用的五种函数的麦克劳林公式,如 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^m$ 的展开式如下:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \theta\in(0,1),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

2. 一元函数微分的应用

(1) **函数的单调性**

① **定义** $\forall x_1,x_2\in(a,b)$,且当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则函数 $f(x)$在(a,b)内单调增加(或单调减少).

② **判别方法** $\forall x\in(a,b)$,都有 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$),则函数 $f(x)$在(a,b)内单调增加(或单调减少).

③ **用函数的单调性可以证明不等式.**

(2) **极值与最值**

① **极值的定义** 函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内异于 x_0 的任意一点,若恒有 $f(x)>f(x_0)$($f(x)<f(x_0)$),则称 $f(x_0)$为 $y=f(x)$的极小值(或极大值).

② **驻点** 若 $f'(x_0)=0$,则 x_0 为函数 $f(x)$的驻点.

③ **定理1(极值存在的必要条件)** 设函数 $f(x)$在 x_0 处可导,且在 x_0 处取得极值,则 $f'(x_0)=0$.

④ **定理2(极值存在的第一充分条件)** 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内可导,且 $f'(x_0)=0$(或 $f(x)$在 x_0 处连续,但 $f'(x_0)$不存在),若设函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内,若:

Ⅰ $f'(x)$在 x_0 的附近**左正右负**,则 $f(x_0)$为**极大值**;

Ⅱ $f'(x)$在 x_0 的附近**左负右正**,则 $f(x_0)$为**极小值**;

Ⅲ $f'(x)$在 x_0 的附近**不变号**,则 $f(x_0)$**不是极值.**

⑤ **定理3(极值存在的第二充分条件)** 设函数 $f(x)$在 x_0 处有 $f''(x_0)\neq 0$ 且 $f'(x_0)=0$,则:

Ⅰ 当 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$为极大值;

Ⅱ 当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$为极小值;

Ⅲ 当 $f''(x_0)=0$ 时,无法判断.

推论 设函数 $f(x)$在 x_0 处具有二阶以上的 n 阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则:

Ⅰ n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$,则 $f(x)$在 x_0 处取得极大值;

Ⅱ n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$,则 $f(x)$在 x_0 处取得极小值;

Ⅲ n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)=0$,无法判断;

Ⅳ n 为奇数时,$f(x)$在 x_0 处无极值.

⑥ **最值**

若 $f(x)$为定义在$[a,b]$上的连续函数,则在$[a,b]$函数值最大的为最大值,最小的为最小值.这时,求最值的求法步骤为:

Ⅰ 求 $f'(x)$,求出驻点和使 $f'(x)$不存在的点;

Ⅱ 计算出(Ⅰ)中所得到的各点的函数值及 $f(a)$,$f(b)$;

Ⅲ 比较以上各函数值的大小,最大者为最大值,最小者为最小值.

若 $f(x)$为定义在$[a,b]$上有唯一的极值点,则这个极值点为最值点.

应用问题的最值：

Ⅰ 建立目标函数(根据实际问题)；

Ⅱ 求目标函数的最值.

(3) **函数的凹凸和拐点**

① 函数的凹凸定义：设 $\forall x_1, x_2 \in I$，恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\left(f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是上凸的(下凸).

② 凹凸性的判断：设 $\forall x\in I$，若 $f''(x)<0$(或 $f''(x)>0$)，则 $f(x)$ 在 I 上是上凸的(下凸).

③ 拐点：函数 $f(x)$ 的图形上上凸弧和下凸弧的分界点称为图形的拐点.

④ 拐点的求法：若在 x_0 处 $f''(x_0)=0$(或 $f''(x_0)$ 不存在)，当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点；否则不是拐点.

(4) **渐近线**

① **水平渐近线**：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则称 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

② **铅直渐近线**：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

③ **斜渐近线**：若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则称 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

(5) **边际与弹性**

① **边际**

设函数 $y=f(x)$ 可导，称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数，$f'(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的边际函数值，即当 $x=x_0$ 时，若 x 改变一个单位，则 y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

在经济学中，边际成本定义为产量增加一个单位时所增加的总成本，边际收益定义为多销售一个单位产品时增加的销售总收入，等等.

$C(x)$ 表示产量为 x 单位时的总成本，$R(x)$ 表示销售 x 单位产品时的总收益，$C'(x)$ 和 $R'(x)$ 表示边际成本和边际收益，则

总利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)$，边际利润 $L'(x)=R'(x)-C'(x)$.

② **弹性**

弹性用于定量描述一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度，即当一个经济变量变动百分之一时另一个经济变量变动百分之几. 设 x 和 y 是两个变量，y 对 x 的弹性记为 $\dfrac{Ey}{Ex}$，当 $y=y(x)$ 可导时，其计算公式为 $\dfrac{Ey}{Ex}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

设某商品的需求量为 Q，价格为 P，需求函数 $Q=Q(P)$ 可导，则该商品需求对价格的弹性(需求弹性)为 $\dfrac{EQ}{EP}=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$. 由于需求函数 $Q=Q(P)$ 一般是单调减少的，因而需求对价格的弹性常为负值.

收益对价格的弹性为$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$. 因为 $R=PQ$,于是有

$$\frac{ER}{EP}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}PQ}{\mathrm{d}P}=\frac{1}{Q}\left(Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=1+\frac{EQ}{EP}.$$

3.3 题型总结与典型例题

1. 中值定理

题型 3-1 欲证结论:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题的证明

【解题思路】 此类型的命题证法有三种思路:

(1) 验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件,由该定理证得.

(2) 验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点,用费尔马定理证明.

(3) 条件涉及某一点的高阶导数都存在时,也可用泰勒公式;在使用泰勒公式之后可能需要用介值定理.

例 3.1 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上具有二阶导数 $f''(x)$,且 $f(2)=f(1)=0$. 如果 $F(x)=(x-1)f(x)$,证明:至少存在一点 $\xi\in(1,2)$,使 $F''(\xi)=0$.

证明 由已知 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,在 $(1,2)$ 内可导,$F(1)=F(2)=0$,所以 $F(x)$ 满足罗尔定理条件,则至少存在一点 $a\in(1,2)$,使得 $F'(a)=0$. 因为 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$,则由题设知 $F'(x)$ 在 $[1,a]$ 上连续,在 $(1,a)$ 内可导,且 $F'(1)=f(1)=0=F'(a)$,故 $F'(x)$ 在 $[1,a]$ 上满足罗尔定理条件,则至少存在一点 $\xi\in(1,a)\subset(1,2)$,使 $F''(\xi)=0$.

例 3.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导. 连接点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的直线段交曲线 $f(x)$ 于 $C(c,f(c))$ 处,此处 $a<c<b$. 证明:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

证明 $f(x)$ 在 $[a,c]$,$[c,b]$ 上满足拉格朗日中值定理,因此,至少分别存在一点 $\xi_1\in(a,c)$,$\xi_2\in(c,b)$ 使得 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$,$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$,由 a,b,c 三点位于同一直线上,因此 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$,不妨设 $\xi_1<\xi_2$,在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上,$f'(x)$ 满足罗尔定理条件,故至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $f''(\xi)=0$.

例 3.3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导. 又 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,$f(3)=1$,证明存在一点 $\xi\in(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.

证明 有题设可知,函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,所以 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 的最小值和最大值,于是

$$m\leqslant f(1)\leqslant M,\quad m\leqslant f(2)\leqslant M,\quad m\leqslant f(0)\leqslant M,$$

$$3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M,\quad 即\ m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理,存在点 $\eta\in[0,2]$,使得 $f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$. 又 $f(3)=1$,可知 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上满足罗尔定理,故存在一点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.

例 3.4 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续可导,$x_i\in(a,b)$,$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i) = f'(\xi)$.

证明 不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n$. 若 $x_1 = x_n$，则取 $\xi = x_1$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i) = f'(\xi)$ 显然成立.

若 $x_1 < x_n$，再设

$f'(x_1) = \min\{f'(x_1), f'(x_2), \cdots, f'(x_n)\}$，$f'(x_n) = \max\{f'(x_1), f'(x_2), \cdots, f'(x_n)\}$，

则有

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= f'(x_1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(x_1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(x_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(x_n) = f'(x_n)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = f'(x_n), \end{aligned}$$

即 $f'(x_1) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i) \leqslant f'(x_n)$. 又因为 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，因而也在 (x_1, x_n) 上连续，由连续函数的介值定理，存在 $\xi \in (x_1, x_n) \subset (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(x_i)$. 本题去掉导函数的连续性结论也成立.

例 3.5 已知函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，$f(1) = 0$. 证明：存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使 $f''(\xi) = 0$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，得 $f(0) = 0$，$f'(0) = 0$.

函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，由罗尔定理，至少存在 $x_0 \in (0,1)$ 使 $f'(x_0) = 0$.

函数 $f'(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续，在 $(0, x_0)$ 内可导，且 $f'(0) = f'(x_0) = 0$，由罗尔定理，至少存在 $\xi \in (0, x_0) \subset (0,1)$ 使 $f''(\xi) = 0$.

例 3.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a) = f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b) > 0$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi) = 0$.

证明 因为 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$，所以，可设 $f'_+(a) > 0$，$f'_-(b) > 0$. 由于 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) > 0$，所以，总存在 $c\left(a < c < \dfrac{a+b}{2}\right)$，使 $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$. 又 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'_-(b) > 0$，所以，总存在 $d\left(\dfrac{a+b}{2} < d < b\right)$，使 $\dfrac{f(d)-f(b)}{d-b} > 0$，即 $f(c) > f(a) = f(b) > f(d)$，且 $[c,d] \subset [a,b]$.

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知，$f(x)$ 在 $[c,d]$ 上也连续，由介值定理知总存在 $x_0 \in [c,d] \subset [a,b]$ 使 $f(x_0) = f(a) = f(b)$. 将 $f(x)$ 分别在 $[a, x_0]$、$[x_0, b]$ 上用罗尔定理得：总存在 $x_1 \in (a, x_0)$，$x_2 \in (x_0, b)$，使 $f'(x_1) = 0$，$f'(x_2) = 0$，在 $[x_1, x_2]$ 上再用罗尔定理得：总存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$，使 $f''(\xi) = 0$.

题型 3-2 欲证结论：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f^{(n)}(\xi) = k$ 的命题的证明

【解题思路】 (1) 作辅助函数 $F(x)$；

(2) 验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件,由该定理结论证得.

构造辅助函数 $F(x)$ 的方法:(1)原函数法;(2)常数 k 值法.

1) 原函数方法

具体步骤:(1) 将欲证结论中的 ξ 改写成 x;

(2) 将式子写成容易去掉一次导数符号的形式(即容易积分的形式);

(3) 去掉一次导数符号(即积分一次),移项,使等式一端为"0",另一端即为新作的辅助函数 $F(x)$(为简便,积分常数取为 0).

例如,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $cf'(\xi)=dg'(\xi)$,其中 c,d 为常数.

因为 $cf'(\xi)=dg'(\xi) \Leftrightarrow [cf(x)]'\Big|_{x=\xi}=[dg(x)]'\Big|_{x=\xi}\Leftrightarrow[cf(x)-dg(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$,所以可构造辅助函数 $F(x)=cf(x)-dg(x)$.

有的时候需要把待证等式进行变形,求辅助函数 $F(x)$.

例 3.7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,$f(a)=0(a>0)$. 证明:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

【分析】 将欲证结论中的 ξ 改写成 x,则

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)\Rightarrow f(x)=\frac{b-x}{a}f'(x)\Rightarrow\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{b-x}{a}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{b-x}\Rightarrow[\ln f(x)]'$$
$$=[-a\ln(b-x)]'\Rightarrow\ln f(x)=-a\ln(b-x)+C\Rightarrow(b-x)^af(x)=C.$$

证明 做辅助函数 $F(x)=(b-x)^af(x)$,则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理,在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $F'(\xi)=0$,即 $a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^af'(\xi)=0$,约去 $(b-\xi)^{a-1}$ 得 $af(\xi)+(b-\xi)f'(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

例 3.8 设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上二阶可导,且 $f(0)=f'(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. 试证:至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,使得 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

【分析】 欲证结论可写为 $f''(\xi)(1-2\xi)-2f'(\xi)=f'(\xi)$.

令 $\xi=x$,则上式为

$$f''(x)(1-2x)-2f'(x)=f'(x),\quad 即[f'(x)(1-2x)]'=f'(x).$$

根据拉格朗日中值定理的推论得 $f'(x)(1-2x)=f(x)+C$. 令 $C=0$,并移项得

$$f'(x)(1-2x)-f(x)=0.$$

则令辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$.

证明 做辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$,显然 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内可导,且

$$F(0)=f'(0)(1-0)-f(0)=0,\quad F\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上满足罗尔定理的条件,则至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,使 $F'(\xi)=0$,即

$f''(\xi)(1-2\xi)-3f'(\xi)=0$，亦即 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

2）**常数 k 值法**

此方法适用于常数部分可被分离出来的命题. 构造辅助函数的步骤如下：

(1) 令常数部分为 k.

(2) 做恒等变形，使上式一端为 a 及 $f(a)$ 构成的代数式，另一端为 b 及 $f(b)$ 构成的代数式.

(3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式. 若是，只要把 a（或 b）改成 x，相应的函数值 $f(a)$（或 $f(b)$）改成 $f(x)$，则代换变量后的表达式就是所求的辅助函数 $F(x)$.

例 3.9　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

【分析】　令 $\dfrac{bf(a)-af(a)}{b-a}=k\Rightarrow bf(b)-kb=af(a)-ka$ 为轮换对称式.

证明　令 $F(x)=xf(x)-kx=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$，则

$$F(b)-F(a)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}b-af(a)+\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}a=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

题型 3-3　证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

【解题思路】　利用导数公式 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'$，找出辅助函数 $F(x)=f(x)g(x)$.

例 3.10　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明　将待证结论改写为 $f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi)-f(a)g'(\xi)-g(b)f'(\xi)=0$，即

$$[f(x)g(x)]'\Big|_{x=\xi}-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]'\Big|_{x=\xi}=0,$$

$$\{[f(x)g(x)]-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]\}'\Big|_{x=\xi}=0.$$

令 $F(x)=[f(x)g(x)]-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=-f(a)g(b)=F(b)$，由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

题型 3-4　证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

【解题思路】　常将等式化为 $\dfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'\Bigg|_{x=\xi}=0$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

特别地，当 $g(\xi)=\xi$ 时，$g'(\xi)=1$，可令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

注 凡遇到含导数的两个函数乘积只差时，常用上述求导公式找出辅助函数.

例 3.11 设函数 $f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且 $f(2)=5f(0)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证明 待证等式可写为$(1+x^2)f'(x)-2xf(x)=0$，即$(1+x^2)f'(x)-(1+x^2)'f(x)=0$，亦即$\dfrac{(1+x^2)f'(x)-(1+x^2)'f(x)}{(1+x^2)^2}=0$.

令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(1+x^2)}$，则 $F(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且

$$F(0)=f(0),\quad F(2)=\frac{f(2)}{5}=f(0).$$

由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$\frac{(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{(1+\xi^2)^2}=0,\quad 即(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi).$$

题型 3-5 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$

【解题思路】 可构造辅助函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$，利用罗尔定理证明.

例 3.12 设函数 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，且 $f(-a)=f(a)$，$a>0$. 证明存在 $\xi\in(-a,a)$ 使得证明存在 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证明 待证结论改写为$[f'(x)-2xf(x)]\Big|_{x=\xi}=0$.

令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x^2}$，则 $F(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，且

$$F(-a)=f(-a)\mathrm{e}^{-(-a)^2}=f(a)\mathrm{e}^{-a^2}=F(a).$$

由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(-a,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2}-2\xi\mathrm{e}^{-\xi^2}f(\xi)=0\qquad 故\ f'(\xi)=2\xi f(\xi).$$

例 3.13 设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证明 (1) 由于 $f(x)$为奇函数，则 $f(0)=0$. 由于 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

(2) 由于 $f(x)$为奇函数，则 $f'(x)$为偶函数，由(1)可知存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$，且 $f'(-\xi)=1$.

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-1)$，由条件显然可知 $\varphi(x)$在$[-\xi,\xi]$上连续，在$(-\xi,\xi)$内可导，且 $\varphi(-\xi)=\varphi(\xi)=0$，由罗尔定理可知，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $\varphi'(\eta)=0$，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

题型 3-6 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，n 为正整数

【解题思路】 可构造辅助函数 $F(x)=x^nf(x)$，利用罗尔定理证明.

例 3.14 设函数 $f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $f(a)=0$，$a>0$，证明存在 $\xi\in(0,a)$使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$(n 为正整数).

证明 令 $F(x)=x^nf(x)$，则 $F(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(-a,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^{n}f(\xi)=0,\quad \text{故 } nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

题型 3-7 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

【解题思路】 由 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 得 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$，可构造辅助函数 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，利用罗尔定理证明.

例 3.15 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$g''(x)\neq0$，且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

(1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq0$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明 (1) 反证法 假设存在 $c\in(a,b)$，使得 $g(c)=0$，对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $g'(\xi_1)=0$，$g'(\xi_2)=0$. 对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $g''(\xi_3)=0$. 这与条件 $g''(x)\neq0$ 矛盾，故在 (a,b) 内 $g(x)\neq0$.

(2) 做辅助函数 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0,\quad \text{故 } \frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

题型 3-8 欲证结论：在 (a,b) 内存在 ξ,η 且 $\xi\neq\eta$ 满足某种关系式的命题的证明

【解题思路】 两次使用拉格朗日中值定理或两次使用柯西中值定理，或一次拉格朗日中值定理、一次柯西中值定理，然后再做某种运算，证明中的辅助函数的做法不同于题型3-5，而是利用分离变量法，使等式一端只含 ξ 的代数式，另一端只含 η 的代数式，结合原函数法稍加分析 ξ,η 的代数式，即可看出该做什么样的辅助函数.

例 3.16 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【分析】 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1\Rightarrow e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}\Rightarrow[e^{x}f(x)]'_{x=\eta}=e^{\xi}$.

证明 (1) 令 $F(x)=e^{x}f(x)$，则由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $F'(\eta)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$，即 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\dfrac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}=\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$ $(f(a)=f(b)=1)$.

(2) 令 $\varphi(x)=e^{x}$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a},\quad \text{即 } e^{\xi}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}.$$

综合(1)(2)可得 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$，即 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

例 3.17 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 试证明：对于任意给定的正数 a 和 b，在开区间 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ 和 η，使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

证明 取数 $\mu\in(0,1)$，由连续函数介值定理知，存在 $C\in(0,1)$，使得 $f(C)=\mu$. 在区间 $[0,C]$ 与 $[C,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$f'(\xi)=\frac{f(C)-f(0)}{C-0}=\frac{\mu}{C},\quad 0<\xi<C,$$