第 1 章

向量代数与空间解析几何

一、基本要求

1. 理解向量的概念，掌握向量的坐标表示法，会求单位向量、方向余弦、向量在坐标轴上的投影.

2. 会求向量的数量积、向量积和混合积，掌握两向量平行、垂直的条件.

3. 会求平面的点法式方程、一般式方程，会判定两个平面的垂直、平行.

4. 会求直线的对称式方程、参数方程，会判定两条直线是否平行、垂直，会判定直线与平面间的关系（垂直、平行、直线在平面上）.

5. 理解二次曲面的方程及其图形.

二、知识网络图

- 空间解析几何与向量代数
  - 向量代数
    - 与向量相关的定义
      - 向量的定义（定义1.1）
      - 向量的模（定义1.2）
      - 向量的夹角（定义1.3）
    - 向量的线性运算
      - 三角形法则（定义1.4）
      - 负向量（定义1.5）
      - 数乘运算（定义1.6）
    - 平行向量（定理1.1）
    - 向量在轴上的投影（定义1.7及性质1、性质2）
    - 向量的坐标表示
    - 向量间的运算
      - 数量积的定义（定义1.8）及坐标表示（定理1.2）
      - 向量积的定义（定义1.9）及坐标表示（定理1.3）
      - 混合积的定义（定义1.10）及坐标表示（定理1.4）
  - 空间平面方程的表示形式：点法式、一般式、截距式
  - 空间直线方程的表示形式：一般式、对称式、参数式、两点式
  - 位置关系
    - 平面与平面（定理1.5、定理1.6）
    - 直线与直线（定理1.7）
    - 直线与平面（定理1.8、定理1.9）
  - 夹角：两个平面、两条直线、直线与平面
  - 有轴平面束（定理1.10）、平行平面束（定理1.11）
  - 曲面方程的表示形式：一般式、参数式
  - 特殊曲面及其方程：母线平行于坐标轴的柱面、旋转曲面、二次曲面
  - 空间曲线方程的表示形式：一般式、参数式
  - 特殊曲线及其方程：在坐标平面上的投影曲线

1.1 空间直角坐标系和向量

一、知识要点

1. 空间直角坐标系

在空间中取一个定点 O,过 O 点作相互垂直的三条数轴.这三条数轴依次被指定为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),并且规定这三个轴正向的顺序满足**右手法则**,如图 1.1 所示.如此确定的坐标系称为**空间直角坐标系**或笛卡儿**直角坐标系**,按右手法则建立的坐标系称为**右手系**.

点 O 称为**坐标原点**;x 轴、y 轴、z 轴称为**坐标轴**;这三条坐标轴中的每两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**,依次为 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个**卦限**,共 8 个卦限,如图 1.2 所示,其中第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 坐标面上方;第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 坐标面下方.

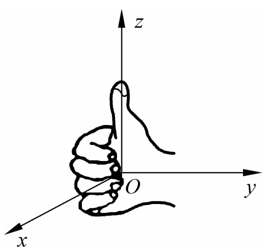


图 1.1

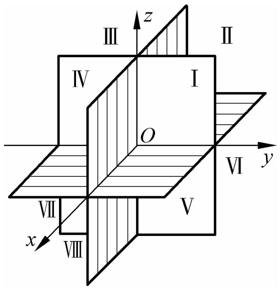


图 1.2

空间中任意一点 P 与三元有序数组(x,y,z)之间存在一一对应关系.有序数组(x,y,z)称为点 P 的**坐标**,记作 $P(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 P 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.由三个坐标轴张成的卦限与坐标轴方向的对应关系、各卦限内点的坐标(x,y,z)的符号见表 1.1.在空间直角坐标系中,一些特殊点的坐标表示汇总为表 1.2.

表 1.1

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x 轴	正半轴	负半轴	负半轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴	正半轴
y 轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴
z 轴	正半轴	正半轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴	负半轴	负半轴
坐标符号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

表 1.2

特殊点	坐标原点 O	x 轴	y 轴	z 轴	xOy 坐标面	yOz 坐标面	zOx 坐标面
坐标	$(0,0,0)$	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$	$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$

2. 空间中两点间的距离公式

空间中的两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

特别地,空间中任意一点 $P(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2}$$

3. 向量的概念及其性质

定义 1.1　既有大小又有方向的量称为**向量**或者**矢量**. 如图 1.3 所示,以 A 为起点,B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 为简便起见,常用小写的粗体字母表示.

注意,如果两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同,则称这两个向量**相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 进一步地,与起点无关的向量称为**自由向量**,简称**向量**. 由此可知,不论向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的起点是否一致,只要大小相等,方向相同,即为相等的向量,也就是说,一个向量和它经过平行移动(方向不变,起点和终点位置改变)所得的向量都是相等的.

定义 1.2　向量的大小称为向量的**模**,将向量$\overrightarrow{AB}$和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$和$|\boldsymbol{a}|$. 特别地,模为 1 的向量称为**单位向量**,将向量$\overrightarrow{AB}$和 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量分别记作$\overrightarrow{AB}^\circ$和 $\boldsymbol{a}^\circ$. 模为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$. 注意,零向量没有规定方向,其方向是任意的.

定义 1.3　若将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经过平行移动,则它们的起点重合后会形成两个角 θ 和 γ,如图 1.4 所示,不妨设 $\theta\leqslant\gamma$. 将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间所夹的较小的角 θ 定义为**两向量的夹角**,记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,显然 $\theta\in[0,\pi]$. 特别地,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta=\pi$.

4. 向量的线性运算

定义 1.4　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个给定的向量. 任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连结 AC,如图 1.5 所示,则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求两个向量和的方法称为**三角形法则**.

对于两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点,以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线所表示的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 1.6 所示. 这种求和的方法称为**平行四边形法则**.

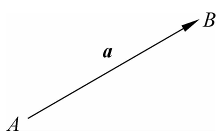


图　1.3

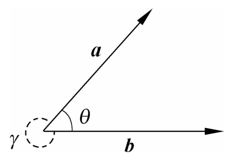


图　1.4

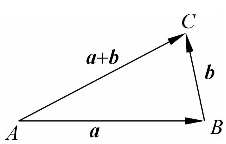


图　1.5

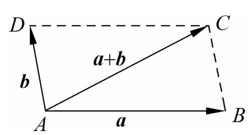


图　1.6

定义 1.5　对于给定的向量 $\boldsymbol{a}$,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差(或称**减法**)可以定义为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$. 如图 1.7 所示,将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 移至公共的始点 O,且 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,则有

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}.$$

特别地,当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同,

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量的长度之和；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中长度较长的向量的方向相同，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量长度之差.

定义 1.6　设 $\boldsymbol{a}$ 是一个给定的向量，λ 是一个实数，规定数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 该向量的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 特别地，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 λ 倍，方向不变；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|\lambda|$ 倍，方向相反，如图 1.8 所示.

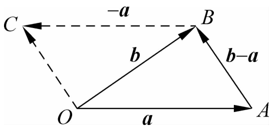


图　1.7

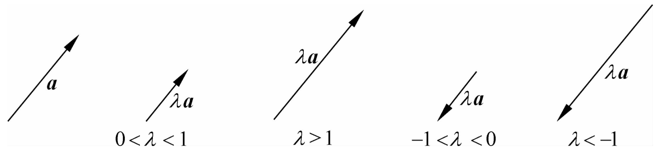


图　1.8

对于任意的实数 λ 和 μ，向量的线性运算满足如下性质：

(i) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(ii) 结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(参见图 1.9)；

(iii) 零元素 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(iv) 负元素 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(v) 单位元 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(vi) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(vii) 分配率 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(viii) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(参见图 1.10).

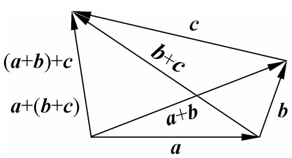


图　1.9

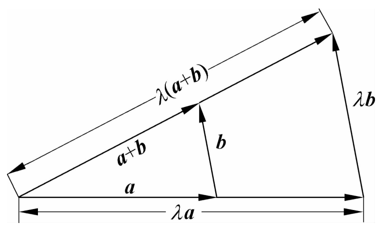


图　1.10

不难验证，如下不等式成立：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ ||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 的关系为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\ \text{或写成}\ \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

5. 向量的共线与共面

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因为零向量的方向是任意的，所以认为零向量平行于任何向量. 若将两个平行向量的起点放在同一点，它们的终点和公共起点将在同一条直线上，所以两个向量平行也称为两向

量**共线**.

定理 1.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

对于 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果这 k 个向量的终点和它们的公共起点在一个平面内,则称这 k 个向量**共面**.

6. 向量在轴上的投影

定义 1.7　设有一个数轴 u,它由单位向量 $\boldsymbol{e}$ 及定点 O 确定,如图 1.11 所示.对任给的向量 $\boldsymbol{a}$,作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,并由点 P 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 P',则称点 P' 为点 P 在 u 轴上的**投影**,向量 $\overrightarrow{OP'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的分向量.设 $\overrightarrow{OP'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a}_u)$.

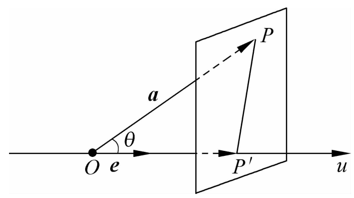


图　1.11

向量及其线性运算在轴上的投影具有如下性质：

性质 1　设 u 轴与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ,如图 1.11 所示,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以 $\cos\theta$,即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

性质 2　(1) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；(2) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$($\lambda$ 为任意实数).两个运算的图示分别如图 1.12(a)和图 1.12(b)所示.

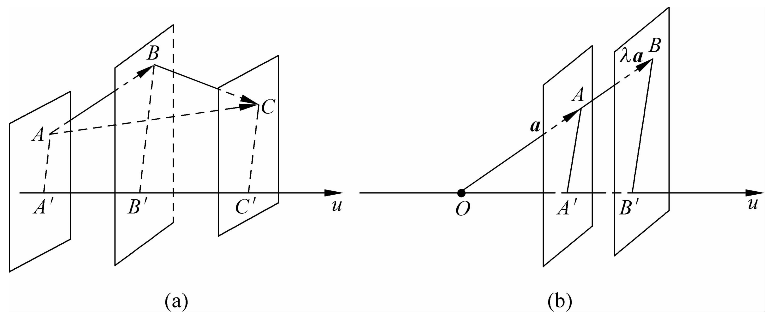


图　1.12

二、疑难解析

1. 在空间直角坐标系中,某一点关于原点、坐标面及坐标轴对称的点特征分别是什么?如何确定对称点?

答　如图 1.13(a)所示,对于给定的点 $A(a,b,c)$,它关于原点对称的点的特征是：这两个点到原点的距离相等,且到坐标轴的距离相等,到坐标平面的距离也相等;如图 1.13(b)所示,点 A 关于某一坐标面对称的点的特征是：这两个点到该坐标平面的距离相等;如图 1.13(c)所示,点 A 关于某一坐标轴对称的点的特征是：这两个点到该坐标轴的距离相等.

如图 1.13(a)所示,利用全等三角形原理,不难验证,点 $A(a,b,c)$ 关于坐标原点的对称点是 $A_1(-a,-b,-c)$.

如图 1.13(b)所示,若求点 $A(a,b,c)$ 关于 zOx 面的对称点,则点 A 在 zOx 面上的坐标

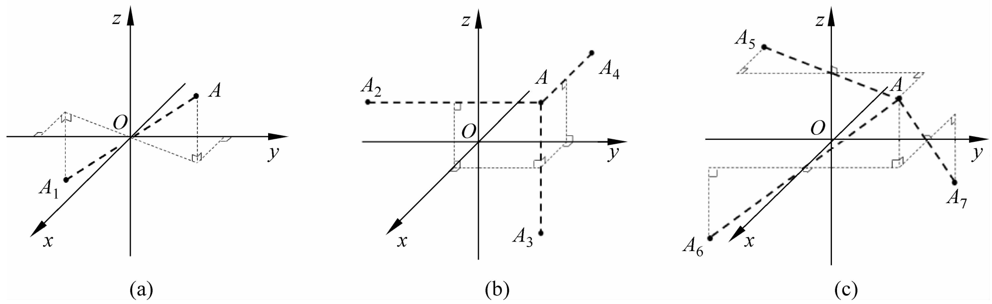


图　1.13

不变，只有 y 轴的坐标变为原来的相反数，因此 $A_2(a,-b,c)$ 即为所求；类似地，关于 xOy 面的对称点是 $A_3(a,b,-c)$；关于 yOz 面的对称点是 $A_4(-a,b,c)$.

如图 1.13(c) 所示，利用全等三角形原理，不难验证，点 $A(a,b,c)$ 关于 z 轴的对称点是 $A_5(-a,-b,c)$；关于 x 轴的对称点是 $A_6(a,-b,-c)$；关于 y 轴的对称点是 $A_7(-a,b,-c)$.

2. 向量的模和实数的绝对值有何联系和区别?

答　易见，模和绝对值所指的对象是不一样的. 对于向量而言，它的模指的是向量的长度，是一个非负实数；实数的绝对值是一个非负实数. 在几何上，实数的绝对值表示数轴上的点到原点的距离. 若将向量的起点移至原点，则向量的模亦为终点到原点的距离. 因此，向量的模可认为是实数的绝对值在二维和三维空间的推广.

3. 说法"向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是：存在不全为零的两个数 α,β，使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$"是否正确? 说明理由.

答　这个说法是正确的. 这是因为：

若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线，故存在不全为零的两个数 α,β，使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

反之，若 $\beta\neq0$，则有 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由定理 1.1 知，$-\dfrac{\alpha}{\beta}$ 即为 λ，故 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，由 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 可知，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\beta=0$，此时向量 $\boldsymbol{a}$ 均平行于向量 $\boldsymbol{b}$.

因此，定理 1.1 的另一种等价说法是：向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在不全为零的两个数 α,β，使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

三、课后习题选解(习题 1.1)

A 类题

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限.

(1)$(1,-5,3)$；　(2)$(2,4,-1)$；　(3)$(1,-5,-6)$；　(4)$(-1,-2,1)$.

分析　对照表 1.1 进行定位.

解　(1) 第Ⅳ卦限；(2) 第Ⅴ卦限；(3) 第Ⅷ卦限；(4) 第Ⅲ卦限.

2. 求点 $M(3,-5,4)$ 与原点及各坐标轴之间的距离.

分析　根据要求，利用两点间距离公式及勾股定理计算.

解　如图 1.14 所示，容易求得，

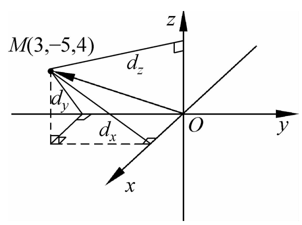


图　1.14

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}=5\sqrt{2}.$$

故点 M 到 x,y,z 轴的距离分别为

$$d_x=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt{41};\quad d_y=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(-5)^2}=5;\quad d_z=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-4^2}=\sqrt{34}.$$

或用如下方法计算可得：

$$d_x=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{41};\quad d_y=\sqrt{3^2+4^2}=5;\quad d_z=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}.$$

3. 在 x 轴上，求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点的坐标.

分析 先依题意设出所求点的坐标，然后利用两点间的距离公式计算.

解 设所求点 P 坐标为 $(x,0,0)$，因为 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$，所以

$$\sqrt{(-4-x)^2+(1)^2+(7)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(5)^2+(-2)^2},$$

两边平方得 $x=-2$，故所求点 P 为 $(-2,0,0)$.

4. 在 yOz 坐标面上，求与三个点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,-1)$ 等距离的点的坐标.

分析 先依题意设出所求点的坐标，然后利用两点间的距离公式计算.

解 设所求点为 P，其坐标为 $(0,y,z)$，按题意有 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，所以

$$\begin{cases}3^2+(1-y)^2+(2-z)^2=0^2+(5-y)^2+(-1-z)^2,\\ 4^2+(-2-y)^2+(-2-z)^2=0^2+(5-y)^2+(-1-z)^2,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}8y-6z=12,\\ 14y+2z=2.\end{cases}$ 解得 $y=\dfrac{9}{25}$，$z=-\dfrac{38}{25}$. 故所求点 P 的坐标为 $\left(0,\dfrac{9}{25},-\dfrac{38}{25}\right)$.

5. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

分析 如图 1.15 所示，由于 $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，可以先利用平行四边形法则建立方程组，然后求解方程组得到所求向量.

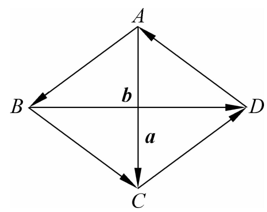


图 1.15

解 由菱形的性质可知：$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. 因为

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a},\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b},\end{cases}\quad 即 \begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}.\end{cases}$$

解得

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{CD}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{DA}=-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}.$$

B 类题

1. 证明：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

分析 利用两点间距离公式分别求出三条边的长度即可.

证 因为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},\quad |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

易见，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，结论得证. **证毕**

2. 利用向量证明：

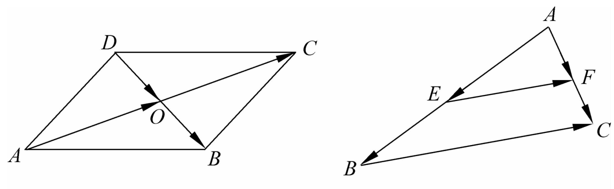
(1) 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

(2) 三角形两边的中点的连线平行于底边，并且其长度等于第三边的一半.

分析 根据要求，利用向量的线性运算证明.

证 (1) 如图 1.16(a)所示，已知四边形 $ABCD$ 的对角线向量为 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$，且 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. 问题转化为，已知：$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. 求证：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

因为



(a) (b)

图 1.16

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ 为平行四边形(因为两个向量相等,意味着这两个向量平行且相等).

(2) 如图 1.16(b)所示,因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$,所以

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AE}=2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})=2\overrightarrow{EF},$$

所以$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{BC}$,且$|\overrightarrow{EF}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$. **证毕**

1.2 向量的坐标表示

一、知识要点

1. 向量的坐标分解

令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向同向的单位向量,如图 1.17 所示.对于空间中任意一点 P,作向量$\overrightarrow{OP}$,若存在唯一的实数 x,y,z,使得$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$,则有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1.3}$$

式(1.3)称为向量$\overrightarrow{OP}$在空间中的**坐标分解式**,有序实数组(x,y,z)称为点 P 的**坐标**,记作$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

2. 向量及其运算的坐标表示

(1) 向量的坐标表示

设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的起点和终点分别为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,如图 1.18 所示,则有

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

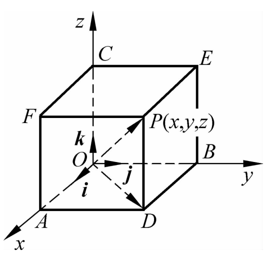


图 1.17

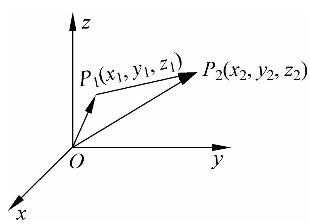


图 1.18

对于任意给定的向量 $\boldsymbol{a}$,它在三个坐标轴(x 轴、y 轴、z 轴)上的投影分别记作

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$$

或

$$a_x=(\boldsymbol{a})_x,\quad a_y=(\boldsymbol{a})_y,\quad a_z=(\boldsymbol{a})_z,$$

则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标分解式为 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，坐标表示为 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$.

(2) 向量的线性运算的坐标表示

对于空间向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，有：

(i) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$； (ii) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

(3) 平行向量的坐标表示

两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 平行的充要条件是：两个向量的对应坐标成比例，即

$$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.\tag{1.4}$$

3. 向量的模和方向余弦的坐标表示

起点在坐标原点，终点为 $P(x,y,z)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 的模为

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\tag{1.5}$$

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的方向角为向量 $\overrightarrow{OP}$ 与三条坐标轴正向之间的夹角，用 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$ 来表示，如图 1.19 所示. 对应的 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的**方向余弦**，即

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\tag{1.6}$$

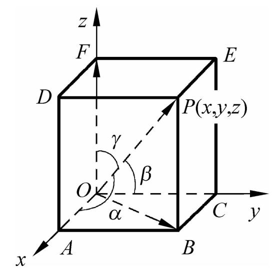


图 1.19

易见，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 由此可知，以方向余弦为坐标分量的向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 必是单位向量，其方向与向量 $\overrightarrow{OP}$ 相同，即

$$\overrightarrow{OP}^{\circ}=\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).\tag{1.7}$$

对于任意给定的向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，它的模和方向余弦分别为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};\tag{1.5$'$}$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\tag{1.6$'$}$$

与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\tag{1.7$'$}$$

二、疑难解析

1. 对于向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\boldsymbol{a}$，它们的坐标表示有什么区别和联系？

答 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标刻画了点 P 相对于坐标原点的位置，其各坐标分量即为点 P 的各坐标. 若点 P 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示为 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 为自由向量，其坐标表示是终点和起点的相对位置.若 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.若将 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至原点，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示也同其终点 M 的坐标.

2. 判断下列说法是否正确，并给出理由：

(1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是单位向量；　　(2) $-\boldsymbol{i}$ 不是单位向量；

(3) 空间中点的坐标和向量的坐标表示在表示形式是不同的.

答　(1) 错误.因为向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的模为 $\sqrt{3}$，所以它不是单位向量.

(2) 错误.因为向量 $-\boldsymbol{i}$ 的模是1，故 $-\boldsymbol{i}$ 是单位向量.

(3) 正确.在空间直角坐标系中，任意一点 P 的坐标表示形式为 $P(x,y,z)$，其中 x,y,z 分别表示点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标；任意一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示可写为 $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，它说明 $\boldsymbol{a}$ 是以点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，点 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量.

3. 若三个向量的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 分别具有如下特征：

(1) $\cos\alpha=1$；　　(2) $\cos\gamma=0$；　　(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，

则这些向量与坐标轴或坐标面有何关系？

答　根据等式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 可得：

(1) 当 $\cos\alpha=1$ 时，$\cos\beta=\cos\gamma=0$，于是有，$\alpha=0,\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$.故此向量平行于 x 轴，方向与 x 轴的正向一致.

(2) 当 $\cos\gamma=0$ 时，$\gamma=\frac{\pi}{2}$.故该向量平行于 xOy 坐标面.

(3) 当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时，$\cos\gamma=\pm1$，于是有 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=0$ 或 π.则此向量平行于 z 轴.

三、经典题型详解

题型1　利用向量及其线性运算的坐标分解式或坐标表示计算

例 1.1　已知 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{p}$.

分析　易见，给定的向量是坐标分解式的形式，直接利用向量的线性运算计算即可.

解　根据向量的线性运算的坐标分解式，有

$$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=8\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}.$$

例 1.2　已知两点 $M_1(2,0,1)$ 和 $M_2(1,\sqrt{3},1)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

分析　先写出向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示；然后利用式(1.5)′～式(1.7)′求解.

解　易见，$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\sqrt{3}-0,1-1)=(-1,\sqrt{3},0)$.于是，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角分别为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+0^2}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\gamma=0;$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{\pi}{6},\quad \gamma=\frac{\pi}{2}.$$

题型 2 综合应用题

例 1.3 已知向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，回答下列问题：

(1) 用 $\boldsymbol{a}$ 的模及方向余弦表示 $\boldsymbol{a}$；

(2) 求与向量 $\boldsymbol{a}=(12,0,16)$ 平行、方向相反、且长度为 40 的向量.

分析 根据式(1.5)′～式(1.7)′求解.

解 (1) 依题意，有

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|\left(\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i}+\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j}+\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{k}\right)$$
$$=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}).$$

(2) 按题意，设所求向量为

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(12\lambda,0,16\lambda),\quad \lambda<0,$$

且 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(12\lambda)^2+0+(16\lambda)^2}=20|\lambda|=40$，解得 $\lambda=-2$. 于是，$\boldsymbol{b}=(-24,0,-32)$.

例 1.4 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量都不平行，但向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行. 证明：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

分析 利用向量平行的充要条件.

证 因为向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，根据定理 1.1 知，存在常数 λ 和 μ，使得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$. 将两式相减可得：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$，即 $(1+\mu)\boldsymbol{a}=(1+\lambda)\boldsymbol{c}$. 由于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，必有 $1+\mu=1+\lambda=0$，所以 $\lambda=\mu=-1$. 从而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+c=\boldsymbol{0}$. **证毕**

四、课后习题选解(习题 1.2)

A 类题

1. 设有向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，计算下列向量：

(1) $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$； (2) $\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p}$.

分析 参考经典题型详解中例 1.1.

解 容易求得，

(1) $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})-(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$.

(2) $\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}$.

2. 已知 $\boldsymbol{m}=(2,3,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,-4,0)$，求下列向量的模、方向余弦以及方向角：

(1) $\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$； (2) $2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$.

分析 参考经典题型详解中例 1.1 和例 1.2.

解 (1) 容易求得，$\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}=(2,3,1)+2(1,-4,0)=(4,-5,1)$. 于是

$$|\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}|=\sqrt{4^2+(-5)^2+1^2}=\sqrt{42}.$$

进一步地，有

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{42}};\quad \cos\beta=-\frac{5}{\sqrt{42}};\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{42}}.$$

$$\alpha=\arccos\frac{4}{\sqrt{42}};\quad \beta=\pi-\arccos\frac{5}{\sqrt{42}};\quad \gamma=\arccos\frac{1}{\sqrt{42}}.$$

(2) 容易求得，$2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}=2(2,3,1)-3(1,-4,0)=(1,18,2)$. 于是 $|2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}|=\sqrt{329}$.

进一步地，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{329}};\quad \cos\beta=\frac{18}{\sqrt{329}};\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{329}}.$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{329}}; \quad \beta = \arccos \frac{18}{\sqrt{329}}; \quad \gamma = \arccos \frac{2}{\sqrt{329}}.$$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=\alpha\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$ 平行，求 α 和 γ 的值.

分析 利用定理1.1的坐标表示式(1.4)求解.

解 依题意，由式(1.4)可得 $\frac{\alpha}{3}=\frac{5}{1}=\frac{-1}{\gamma}$，即 $\alpha=15,\gamma=-\frac{1}{5}$.

B类题

1. 设有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的起点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$. 若点 $P(x,y,z)$ 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 成定比 $\lambda(\lambda\neq 1)$，即 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，证明：分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

分析 根据平行向量的坐标表示即可证得.

证 由于 $\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$，及 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，故 $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda$. 整理得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证毕

2. 已知向量 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$ 的坐标表示、在各坐标轴上的投影.

分析 根据向量的坐标表示及向量在坐标轴上的投影定义即可求得.

解 易见，向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 的坐标表示分别为 $\boldsymbol{m}=(2,2,-1)$，$\boldsymbol{n}=(3,1,-2)$ 和 $\boldsymbol{p}=(2,-4,3)$. 容易求得，

$$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=2(2,2,-1)-(3,1,-2)+(2,-4,3)=(3,-1,3).$$

于是

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=a_x=3, \quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=a_y=-1, \quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=a_z=3.$$

3. 若 $A(x,y,z)$ 为空间中一点，$|\overrightarrow{OA}|=4$，且 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$，求点 A 的坐标.

分析 根据方向余弦的性质求出与向量 z 轴的夹角的余弦；再利用模和夹角来表示向量.

解 设 $\overrightarrow{OA}$ 与 z 轴的夹角为 γ，由于 $\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1$，解得 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$.

由于 $\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\left(\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3},\cos\gamma\right)=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$，故

$$A(2\sqrt{2},2,2) \quad 或 \quad A(2\sqrt{2},2,-2).$$

1.3 向量的数量积、向量积和混合积

一、知识要点

1. 向量的数量积

定义1.8 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，也称为内积或点积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

注意到，两个向量的数量积的结果是一个数，其值与向量的模和夹角有关. 不难验证，向量的数量积有如下运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(5) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

(6) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$；

(7) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.

特别地，在空间直角坐标系下，对于两两互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0.$$

定理 1.2 对于向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.8}$$

推论 对于两个给定的向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是：$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

向量的模和夹角的坐标表示公式如下：

(4)′ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$；

(7)′ $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

2. 向量的向量积

定义 1.9 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按照如下条件确定了向量 $\boldsymbol{c}$：

(1) 向量 $\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

(2) 向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的平面（既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），且向量 $\boldsymbol{c}$ 的正方向按照右手法则从向量 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定，如图 1.20 所示，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**（也称**外积**或**叉积**），记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

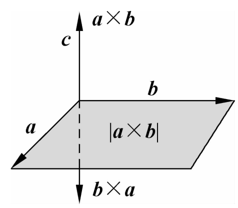


图 1.20

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{c}$ 的几何解释：向量 $\boldsymbol{c}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积. 进一步地，向量的向量积有如下的性质和运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(3) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(4) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(5) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$ （λ 为实数）.

在空间直角坐标系下，对于两两互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0};\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j};$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

定理 1.3 对于向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}. \tag{1.9}$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}, \tag{1.10}$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{1.10$'$}$$

推论 对于两个给定的向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是：$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

说明 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则当 b_x,b_y,b_z 中出现零时，约定相应的分子也为零，例如当 $b_x=0$ 时，规定 $a_x=0$，且有 $\dfrac{a_x}{0}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

3. 向量的混合积

定义 1.10 对于三个给定的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，若先作两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，把所得的向量与向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，如此得到的数值称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记作 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$，即 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

向量的混合积的几何解释：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ 的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为相邻棱的平行六面体的体积，如图 1.21 所示.

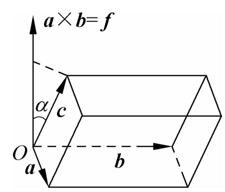


图 1.21

定理 1.4 对于向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的混合积的坐标表示为

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

推论 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是：它们的混合积 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

二、疑难解析

1. 向量的数量积、向量积和混合积的运算特点是什么？

答 向量的数量积和混合积的运算结果都是数；向量的向量积的运算结果是一个向量. 两个向量的数量积表示其中一个向量的模乘以其在另一个向量上的投影；两个向量的向量积的模是以两向量为边的平行四边形的面积，方向垂直于这两个向量所在的平面；混合积的绝对值是以三个向量为棱的平行六面体的体积.

2. 等式 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 和 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$ 是否成立？说明理由.

答 (1) 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量时，等式 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 成立，其他情况不成立.

(2) 因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta$,所以当$\theta=0$或$\theta=\pi$,即$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$,否则结论不成立.

3. 若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,能否由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$或$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$推出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?说明理由.

答　(1) 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则有

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}),$$

因$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,所以

$$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}).$$

显然,由上面的等式无法直接确定$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

(2) 同理,由等式$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$也无法直接确定$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

4. 验证等式$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$是否成立?若成立,是否还有其他类似形式的等式?

答　成立.在空间直角坐标系中引入向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$.根据向量混合积的坐标表示式(1.11),利用行列式的性质可得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}.$$

事实上,根据混合积的定义,并利用行列式的性质还可证明:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}].$$

请读者自行证明.

三、经典题型详解

题型1　利用向量的数量积、向量积、混合积的定义、性质或坐标表示化简或计算

例1.5　已知$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d}$,其中$\boldsymbol{c}=(1,2,1)$,$\boldsymbol{d}=(2,-1,2)$.求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$及$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$:

分析　根据数量积、向量积定义的坐标表示形式即可求得.

解　容易求得

$$\boldsymbol{a}=3(1,2,1)+(2,-1,2)=(5,5,5),\quad \boldsymbol{b}=(1,2,1)-2(2,-1,2)=(-3,4,-3).$$

于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5\times(-3)+5\times4+5\times(-3)=-10,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}5&5\\4&-3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}5&5\\-3&-3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}5&5\\-3&4\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-35\boldsymbol{i}+35\boldsymbol{k},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-10}{5\sqrt{3}\times\sqrt{34}}=-\frac{2}{\sqrt{102}}.$$

例1.6　已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=3$,求$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

分析　利用向量的数量积建立等式,然后求解.

解　依题意,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=3$.由$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,得

$$0=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$$

从而求得,$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-13$.

题型2 综合应用题

例1.7 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=\frac{\pi}{3}$，$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=\frac{\pi}{6}$. 求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模.

分析 利用向量的模与数量积之间的关系求解，即 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的关系 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 可知，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$. 于是，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+\\&\quad 2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})\\&=4+1+1+0+\sqrt{3}+2=8+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

因此，

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{8+\sqrt{3}}.$$

例1.8 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. 求 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

分析 根据结论 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 建立方程组，然后计算 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，即得 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 由已知可得，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$. 于是

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0,\\(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\=|\boldsymbol{b}|^2\left(3\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{b}|^2}-1+2\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)=0.\end{cases}$$

解得 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=1$，$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-1$，即 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=-1$.

四、课后习题选解(习题1.3)

A类题

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2,1)$. 计算下列各题：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；　(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

分析 参考经典题型详解中例1.5.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+1\times(-2)+(-4)\times1=-4$；

(2) $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-4}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{9}$，所以 $\theta=\pi-\arccos\frac{2\sqrt{2}}{9}$；

(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=3\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

2. 求下列给定的向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$.

分析 参考经典题型详解中例1.5.

解 (1) 容易求得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1,\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}2&3\\-1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

(2) 由于 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$，因此，$\boldsymbol{b}=(9,6,-3)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 于是

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=42$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1$.

3. 设 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$，计算下列各题：

(1) $|(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|$；　　(2) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

分析　先利用向量积和数量积的线性运算规律将两个式子化简，再根据定义计算.

解　(1) 容易求得

$$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

所以

$$|(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})| = |7\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 7|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 7\times5\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 35\sqrt{3}.$$

(2) 不难求得

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}) &= 4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 4|\boldsymbol{a}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2\\ &= 4\times5^2-12|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+9\times2^2 = 100-60+36 = 76.\end{aligned}$$

4. 在 xOy 坐标面内求一单位向量，使其与向量 $\boldsymbol{r}=(-2,1,3)$ 垂直.

分析　依题意可设出单位向量，再根据两向量垂直点积为零计算.

解　设 $\boldsymbol{e}=(x,y,0)$，且 $x^2+y^2=1$. 因为 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{r}$，所以 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}=-2x+y=0$.

求解由 $x^2+y^2=1$ 和 $-2x+y=0$ 组成的方程组，得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$，$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. 从而

$$\boldsymbol{e}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right).$$

5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条边对应的向量分别为 $\overrightarrow{AB}=(2,1,4)$ 和 $\overrightarrow{AD}=(3,2,2)$，求平行四边形的面积.

分析　由于平行四边形的面积等于以其两邻边作为向量的向量积的模，故本题可先求两向量的向量积，再求其模.

解　因为

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

所以

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-6)^2+8^2+1^2} = \sqrt{101}.$$

B类题

1. 求与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线，且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=-18$ 的单位向量 $\boldsymbol{r}^\circ$.

分析　根据两向量共线的充要条件，可设 $\boldsymbol{r}=k\boldsymbol{a}$，再根据向量的数量积求出 $\boldsymbol{k}$，即得 $\boldsymbol{r}$.

解　因为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，设 $\boldsymbol{r}=k\boldsymbol{a}$. 由已知条件可得 $-18=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cdot k\boldsymbol{a}=k|\boldsymbol{a}|^2$. 由于 $|\boldsymbol{a}|=3$，所以 $-18=9k$，即 $k=-2$. 于是 $\boldsymbol{r}=-2\boldsymbol{a}=(-4,2,-4)$，且 $\boldsymbol{r}^\circ=\frac{1}{3}(-2,1,-2)$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

分析 先根据数量积求两向量夹角的余弦,再求向量积的模.

解 容易求得 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-3}{1\times5}=-\dfrac{3}{5}$. 所以有 $|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|=\dfrac{4}{5}$. 于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|=1\times5\times\frac{4}{5}=4.$$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,计算下列各题:

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

分析 本题可根据向量及其数量积、向量积及混合积的坐标表示公式进行计算.

解 (1) 由向量的数量积及其线性运算的坐标表示公式可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}&=[2\times1+(-3)\times(-1)+1\times3]\boldsymbol{c}-[2\times1+(-3)\times(-2)+1\times0]\boldsymbol{b}\\&=8\boldsymbol{c}-8\boldsymbol{b}=8(0,-1,-3).\end{aligned}$$

(2) 由向量的向量积及其线性运算的坐标表示公式可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=\begin{vmatrix}-4&4\\-3&3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}4&3\\3&2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3&-4\\2&-3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(3) 由向量的混合积的坐标表示公式可得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

4. 化简下列运算:

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$; (2) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]$.

分析 (1)可根据向量积的运算性质进行化简;(2)根据混合积的定义及向量积的性质进行化简.

解 (1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(2) 易知,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 以及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$.

根据行列式的性质,易证

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

于是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=(-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-25(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}-3(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\&=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+25[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]-3[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=21[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}].\end{aligned}$$

1.4 平面及其方程

一、知识要点

1. 平面方程

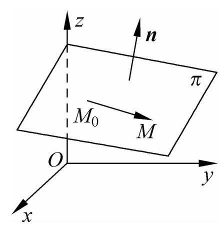


图 1.22

已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 以及平面内的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,如图 1.22 所示,则该平面的**点法式方程**为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1.12)$$

平面的**一般方程**为

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1.13}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是平面的法向量，D 为参数.

平面的**截距式方程**为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1.14}$$

其中 a,b,c 分别称为平面在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距.

2. 空间中点与平面的位置关系

空间中的点与平面的位置关系有两种：点在平面内或者点在平面外.

若已知平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，平面外的**点 $\boldsymbol{P}(x_0,y_0,z_0)$ 到平面的距离公式**为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.15}$$

3. 平面与平面的位置关系

设空间两个平面方程分别为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

定理 1.5 平面 π_1 和 π_2 平行（$\pi_1 /\!/ \pi_2$）的充分必要条件是：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

定理 1.6 平面 π_1 和 π_2 垂直（$\pi_1\perp\pi_2$）的充分必要条件是：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

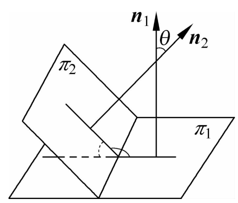


图 1.23

当两平面相交时，两平面的夹角定义为这两个平面的法向量所夹的锐角，如图 1.23 所示，用 θ 表示 $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，根据向量的数量积的定义，计算两平面的夹角问题可转化为计算其法向量间的夹角，于是有

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{1.16}$$

二、疑难解析

1. 平面的点法式方程、一般式方程及截距式方程是如何相互转化的？

答 若已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 以及平面内的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则该平面的点法式方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，整理即得一般式方程，即 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. 当平面不通过坐标原点时，$D\neq0$. 将一般式方程两端同除以 $-D$，并整理得 $\dfrac{x}{-\frac{D}{A}}+\dfrac{y}{-\frac{D}{B}}+\dfrac{z}{-\frac{D}{C}}=1$，即为截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 的形式；若再将截距式方程变形为 $\dfrac{1}{a}(x-0)+\dfrac{1}{b}(y-0)+\dfrac{1}{c}(z-c)=0$，即得到点法式方程.

2. 讨论当平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的各参数 A,B,C,D 中至少有一个为零时，对应的平面各有什么特点？

答 当参数 A,B,C,D 中至少有一个为零时，平面方程对应一些特殊平面，列表如下：

表 1.3

$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	平面过原点
$A=0$	$By+Cz+D=0$	平面平行于 x 轴
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	平面平行于 y 轴
$C=0$	$Ax+By+D=0$	平面平行于 z 轴
$A=B=0$	$Cz+D=0$	平面平行于 xOy 坐标面
$B=C=0$	$Ax+D=0$	平面平行于 yOz 坐标面
$A=C=0$	$By+D=0$	平面平行于 zOx 坐标面

3. 如何判断两个平面的位置关系？

答 设空间两个平面方程分别为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

当$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$时，两平面重合；当$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$时，两平面平行；当 $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$ 时，两平面相交，夹角公式为式(1.16).

三、经典题型详解

题型1 利用已知条件求平面方程

例 1.9 按照下列条件求平面的方程：

(1) 过三点 $M_1(1,1,0)$，$M_2(-2,2,-1)$和 $M_3(1,2,1)$；

(2) 平行于 zOx 坐标面且经过点$(2,-5,3)$的平面方程；

(3) 平行向量$\boldsymbol{v}_1=(1,0,1)$，$\boldsymbol{v}_2=(2,-1,3)$且过点 $P(3,-1,4)$的平面方程.

解 (1) 设平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，将三点的坐标代入到平面方程，得如下的线性方程组

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ -2A+2B-C+D=0, \\ A+2B+C+D=0. \end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{2}{5}D$，$B=-\dfrac{3}{5}D$，$C=\dfrac{3}{5}D$. 于是，所求平面的方程为

$$2x+3y-3z-5=0.$$

(2) 设平行于 zOx 坐标面的平面方程为：$By+D=0$. 将点$(2,-5,3)$代入方程得$-5B+D=0$，即 $D=5B$. 故平面方程为 $y=-5$.

(3) 由向量的向量积的定义可知，平面的法线向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

故平面方程为$(x-3)-(y+1)-(z-4)=0$，即 $x-y-z=0$.

题型2 综合应用题

例 1.10 求与平面 $8x+y+2z+5=0$ 平行且与三个坐标平面所构成的四面体体积为