第 1 章

函　　数

一、基本要求

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值，并会作出简单的分段函数图像，掌握函数的表示方法.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图像. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

二、知识网络图

- 函数
  - 函数的定义、定义域、值域(定义 1.1)
  - 具有特性的函数
    - 奇函数和偶函数(定义 1.2)
    - 周期函数(定义 1.3)
    - 有界函数(定义 1.4)
    - 单调函数(定义 1.5)
  - 函数的四则运算(加、减、乘、除)
  - 复合函数(定义 1.6)
  - 反函数(定义 1.7)
  - 反函数与单调性的关系(定理 1.1)
  - 基本初等函数(常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)
  - 初等函数的范例(多项式函数、有理函数、双曲函数、反双曲函数)
  - 函数的三种表示方法
    - 分段表示
      - 绝对值函数
      - “整数部分”函数
      - “非负小数部分”函数
      - 符号函数
      - 狄利克雷函数
    - 隐式表示
    - 参数表示
      - 椭圆
      - 旋轮线或摆线
      - 星形线

1.1 基本概念

一、知识要点

1. 函数的定义

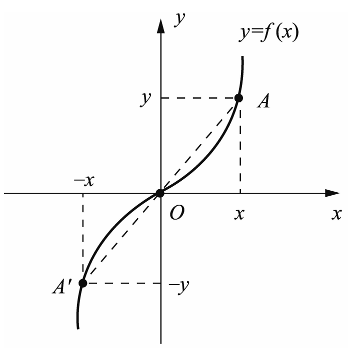
定义 1.1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集. 如果按照对应法则 f,对 D 中的每一个 x,均有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的**函数**,函数关系记作 $f:D\to\mathbf{R}$. 数集 D 称为函数 f 的**定义域**;函数值的集合 $R(f)=\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 f 的**值域**. x 称为**自变量**;y 称为**因变量**. 一般地,定义在 D 上的函数记作 $y=f(x)$, $x\in D$.

函数 $y=f(x)$的图像是指点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$,即当自变量 x 在函数的定义域内变动,并取遍定义域内所有值时,动点$\{(x,f(x))\mid x\in D\}$的轨迹.

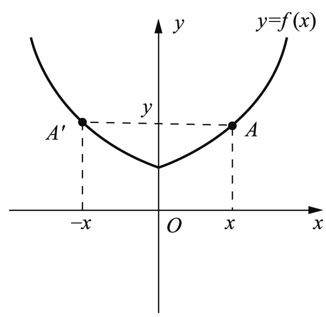
2. 具有某些特性的函数

(1) 奇函数与偶函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,即对于任意的 $x\in D$,都有 $-x\in D$. 如果 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $y=f(x)$是**奇函数**;如果 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$是**偶函数**. 例图如图 1.1 所示.



(a) 奇函数



(b) 偶函数

图 1.1

(2) 周期函数

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义. 若存在正数 T,对于任意给定的 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$是**周期函数**,T 称为该函数的一个**周期**. 例图如图 1.2 所示.

(3) 有界函数

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义. 如果存在数 K(或 k),使得当 $x\in D$ 时,有 $f(x)\leqslant K$(或 $f(x)\geqslant k$),则称函数 $y=f(x)$在 D 上有上(或下)**界**;特别地,如果存在正数 M,使得当 $x\in D$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在 D 上是**有界函数**,同时把正数 M 称为函数 $y=f(x)$在 D 上的一个**界**. 例图如图 1.3 所示.

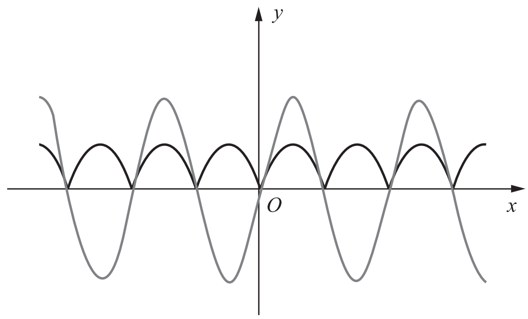


图 1.2

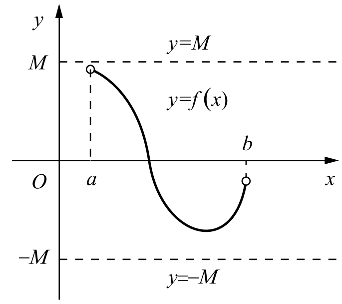


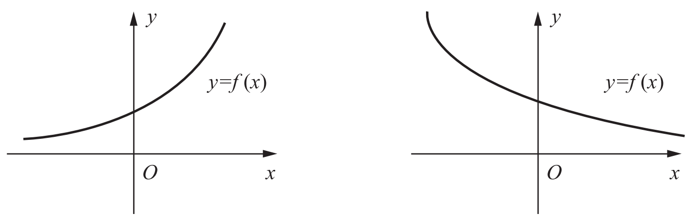
图 1.3

(4) 单调函数

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，$I\subset D$. 若对于区间 I 上的任意两点，即 $\forall x_1, x_2\in I$，只要它们满足 $x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**单调递增**(或**单调递减**). 这两类函数统称为**单调函数**. 若上述不等式中的不等号严格成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**严格单调递增**或**严格单调递减**，如图 1.4 所示.



(a) 严格单调递增 (b) 严格单调递减

图 1.4

3. 函数的四则运算

设函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D_2. 若 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则有：

和(差) $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x), x\in D$；

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), x\in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, x\in D\backslash\{x\mid g(x)=0\}$.

4. 复合函数

定义 1.6 设函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的定义域分别为 U 和 D. 若对于任意的 $x\in D$，有 $g(x)\in U$，则函数

$$y=f[g(x)], \quad x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的**复合函数**，变量 u 称为中间变量.

5. 反函数

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 若对任意 $y\in f(D)$，有唯一一

个 $x\in D$ 与之对应,即 $f(x)=y$,则称函数 $y=f(x)$在 D 上存在**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

函数 $y=f(x)$称为**直接函数**. 习惯上,x 为自变量 y 为因变量,反函数为 $y=f^{-1}(x)$,它与直接函数的图像在同一坐标平面内关于直线 $y=x$ 是对称的,如图 1.5 所示.

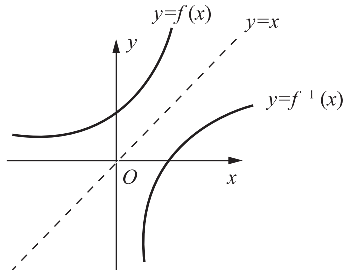


图 1.5

定理 1.1 若函数 $y=f(x)$在某区间 X 上严格递增(严格递减),则函数 $y=f(x)$存在反函数,且反函数 $x=f^{-1}(y)$在 $f(X)$上也严格递增(严格递减).

二、疑难解析

1. 两个给定的函数在什么条件下可以认为是相同的. 例如,如下两个函数是否相同?

$$f(x)=1,\quad g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x.$$

答 由函数的定义可以看到,构成函数的两个基本要素是定义域 D 和对应法则 f. 因此,可以把定义域相同并且对应法则相同的两个函数认为是相等的;而把定义域或对应法则不完全一样的两个函数称为不同的函数. 换句话说,两个函数是否相同与自变量、对应法则及因变量所使用的符号是没有关系的. 因此函数 $f(x)=1$ 和 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 是相同函数. 再例如,因为函数 $y=f(x)=\ln x^2$ 和 $y=g(x)=2\ln x$ 的定义域不同,所以它们是不同的函数.

2. 命题"两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数"是否正确? 说明理由.

答 说法错误. 因为缺少条件"在公共定义域上". 正确的说法是:设函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$是区间$[-a,a]$上的奇函数,函数 $g_1(x)$,$g_2(x)$是区间$[-a,a]$上的偶函数,则 $f_1(x)+f_2(x)$是奇函数,$g_1(x)+g_2(x)$是偶函数. 这个说法可以用奇函数和偶函数的定义进行验证.

事实上,对任意 $x\in[-a,a]$,有

$$f_1(-x)=-f_1(x),\quad f_2(-x)=-f_2(x),\quad g_1(-x)=g_1(x),\quad g_2(-x)=g_2(x).$$

由于

$$f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)+(-f_2(x))=-(f_1(x)+f_2(x)),$$
$$g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x),$$

所以 $f_1(x)+f_2(x)$是奇函数,$g_1(x)+g_2(x)$是偶函数.

3. 任意几个函数是否可以构成复合函数? 若不能,条件是什么?

答 几个函数构成复合函数需要满足一定的条件. 如:两个函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$可以构成复合函数的条件是 $g(D)\subset U$,即函数 $u=g(x)$在 D 上的值域必须包含在函数 $y=f(u)$的定义域 U 内,否则不能构成复合函数. 换句话说,不论有多少层函数,内层函数的值域必须包含在外一层函数的定义域内. 例如,三个函数

$$y=\sqrt{1-u},\quad u=\sin^2 v,\quad v=x+2$$

生成的复合函数是

$$y=\sqrt{1-\sin^2(x+2)},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

4. 定理 1.1 中的条件"函数在区间上的严格单调性"中的"严格"两字是否可以忽略?

说明理由.

答 不能忽略. 例如常值函数不存在反函数.

三、经典题型详解

题型1 求函数的定义域

例1.1 求函数 $f(x)=\lg(4-x)+\sqrt{x^2+3x-10}$ 的自然定义域.

分析 函数的定义域是使函数有意义的自变量 x 的集合,即自然定义域.

解 依题意 $\begin{cases}4-x>0,\\ x^2+3x-10\geqslant 0,\end{cases}$

解之得 $x\leqslant -5$ 或 $2\leqslant x<4$,即函数的定义域为 $x\leqslant -5$ 或 $2\leqslant x<4$.

例1.2 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求函数 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域.

分析 利用复合函数的定义.

解 根据复合函数的定义条件,即要求中间变量的值域包含在外层函数的定义域内,有

$$0\leqslant x+a\leqslant 1 \quad 且 \quad 0\leqslant x-a\leqslant 1.$$

通过解不等式得到 $a\leqslant x\leqslant 1-a$. 由于 $a>0$,所以要求 $a\leqslant 1-a$,即 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. 于是 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $D=\left\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant 1-a,0<a\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

题型2 函数特性的判别

例1.3 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,证明:$f[g(x)]$ 和 $g[g(x)]$ 均为偶函数.

分析 利用奇函数和偶函数的定义进行验证.

证 因为 $g(x)$ 为偶函数,所以 $g(-x)=g(x)$. 由于

$$f[g(-x)]=f[g(x)],\quad g[g(-x)]=g[g(x)],$$

因此,$f[g(x)]$ 和 $g[g(x)]$ 均为偶函数. 证毕

例1.4 设 $f(x)$,$g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上都是单调递增函数,并且满足 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. 证明:$f[g(x)]\leqslant g[h(x)]$.

分析 利用复合函数的定义和函数的单调性进行验证.

证 由已知 $f(x)\leqslant g(x)$ 可得,$f[g(x)]\leqslant g[g(x)]$;由已知 $g(x)\leqslant h(x)$ 可得,$g[g(x)]\leqslant g[h(x)]$. 因此有 $f[g(x)]\leqslant g[h(x)]$. 证毕

例1.5 设函数 $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x^2+1}$,证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

分析 根据函数的表达式的特点,利用绝对值不等式进行放大,进而寻求函数的一个界.

证 因为 $x^2+1\geqslant 2x$,变形得 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{2}$,且 $\left|\frac{1}{x^2+1}\right|\leqslant 1$,所以有

$$|f(x)|=\left|\frac{x^2+x+3}{x^2+1}\right|=\left|1+\frac{2}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant 1+\left|\frac{2}{x^2+1}\right|+\frac{1}{2}\leqslant 1+2+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

于是,函数 $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 证毕

例 1.6 叙述无界函数的定义,并证明函数 $y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是无界的.

分析 利用函数的有界性定义. 证明函数在其定义域上无界的方法是:对于任意大的正数,通过解不等式,在函数的定义域上总可以找到一点,使得它的函数值大于这个给定的正数.

证 根据函数的有界性定义,无界函数的定义可叙述为:假设函数 $f(x)$的定义域为 D. 对任意给定的正数 M,在函数的定义域内总存在 $x_0\in D$,使得$|f(x_0)|>M$.

对任意大的正数 $M>1$,解不等式$\frac{1}{x}>M$,可得 $x<\frac{1}{M}$. 取 $x_0=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$,便有$|f(x_0)|>M$. 由正数 M 的任意性可知,结论成立. 证毕

题型 3 复合函数的运算

例 1.7 已知函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. 证明:$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

分析 分别将 $x=a,x=b,x=\frac{a+b}{1+ab}$代入函数,然后再进行化简.

证 易见,$f(a)=\ln\frac{1+a}{1-a}$,$f(b)=\ln\frac{1+b}{1-b}$. 不难求得

$$f(a)+f(b)=\ln\frac{1+a}{1-a}+\ln\frac{1+b}{1-b}=\ln\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}=\ln\frac{1+ab+a+b}{1+ab-a-b},$$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\ln\frac{1+\frac{a+b}{1+ab}}{1-\frac{a+b}{1+ab}}=\ln\frac{1+ab+a+b}{1+ab-a-b}.$$

因此有 $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$. 证毕

例 1.8 已知 $f\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=x^4+2x+\frac{1}{x^2}+5$. 求出 $f(x)$的表达式.

分析 通过观察函数右端的表达式信息,利用配项方法找到复合函数的中间变量.

解 由于 $f\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2+5$,令 $u=x^2+\frac{1}{x}$,有 $f(u)=u^2+5$. 因此有

$$f(x)=x^2+5.$$

四、课后习题选解(习题 1.1)

A类题

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $x^2+x\leqslant6$; (2) $|x-2|\leqslant1$; (3) $(x-1)(x+3)>0$.

分析 利用求解不等式的方法.

解 (1) 该不等式的解为$-3\leqslant x\leqslant2$,对应的区间为$[-3,2]$.

(2) 该不等式的解为 $1\leqslant x\leqslant3$,对应的区间为$[1,3]$.

(3) 该不等式的解为 $x>1$ 或 $x<-3$,对应的区间为$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

2. 对于任意给定的实数 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

分析 利用绝对值不等式证明.

解 由于对任意给定的实数 $a,b\in\mathbf{R}$ 都有 $-|a||b|\leqslant ab\leqslant|a||b|$,因此有
$$|a|^2-2|a||b|+|b|^2\leqslant a^2+2ab+b^2\leqslant|a|^2+2|a||b|+|b|^2.$$
开方后即得要证明的不等式.

3. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; (2) $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$; (4) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{9-x^2}$.

分析 利用函数的定义.

解 (1) 函数的定义要求 x 为满足 $x^2-3x+2\neq0$ 的全体实数,即 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1,x\neq2\}$.

(2) 函数的定义要求 x 为满足$\dfrac{x-3}{x+1}\geqslant0$ 且 $x+1\neq0$ 的全体实数,即 $D=\{x\mid x\geqslant3$ 或 $x<-1\}$.

(3) 函数的定义要求 x 为满足 $4-x^2\geqslant0$ 且 $x-1\neq0$ 的全体实数,即 $D=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\neq1\}$.

(4) 函数的定义要求 x 为满足 $x^2-4x+3\neq0$ 且 $9-x^2\geqslant0$ 的全体实数,即
$$D=\{x\mid-3\leqslant x<3 \text{ 且 } x\neq1\}.$$

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,计算 $f(-x),f(x+1),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f[f(x)]$.

分析 利用复合函数的定义.

解 令 $f(u)=\dfrac{1+u}{1-u}$. 分别将 $u=-x,u=x+1,u=\dfrac{1}{x},u=f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$代入 $f(u)$,得
$$f(-x)=\frac{1-x}{1+x},\quad f(x+1)=-\frac{2+x}{x},\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+x}{x-1},\quad f[f(x)]=-\frac{1}{x}.$$

5. 设 $f(x)=2x^2$,计算$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$和$\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$,其中 $h\neq0$.

提示 利用复合函数的定义. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x+2h$;$\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}=4x-2h$.

6. 假设函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$是区间$[-a,a]$上的奇函数,函数 $g_1(x)$和 $g_2(x)$是区间$[-a,a]$上的偶函数,证明:

(1) 乘积函数 $f_1(x)\cdot f_2(x)$和 $g_1(x)\cdot g_2(x)$都是偶函数;

(2) 乘积函数 $f_1(x)\cdot g_2(x)$和 $g_1(x)\cdot f_2(x)$都是奇函数.

分析 利用奇函数和偶函数的定义进行验证.

证 由已知可得,对任意 $x\in[-a,a]$,有
$$f_1(-x)=-f_1(x),\quad f_2(-x)=-f_2(x),\quad g_1(-x)=g_1(x),\quad g_2(-x)=g_2(x).$$

(1) 略

(2) 由于
$$f_1(-x)\cdot g_2(-x)=(-f_1(x))\cdot(g_2(x))=-f_1(x)\cdot g_2(x),$$
$$g_1(-x)\cdot f_2(-x)=(g_1(x))\cdot(-f_2(x))=-g_1(x)\cdot f_2(x),$$
所以 $f_1(x)\cdot g_2(x)$和 $g_1(x)\cdot f_2(x)$都是奇函数. 证毕

7. 一个长为 a(单位:m),宽为 b 的长方形铁皮($a\geqslant b$),想要打造成一个无盖的长方体盛水容器,需将其四个角各剪去一个边长相等的小正方形. 试分别建立盛水容器的体积 V、表面积 S 与剪去的小正方形边长 x 之间的函数关系,并指出其定义区间.

分析 利用长方形、正方形的面积公式及长方体的体积公式和表面积公式,但要注意容器无盖,即少了一个顶面.

解 根据题意,若假设剪去的小正方形的边长为 x,则长方体的长、宽、高分别为 $a-2x,b-2x,x$. 因此
$$V=x(a-2x)(b-2x);\quad S=(a-2x)(b-2x)+2x(a-2x)+2x(b-2x).$$

它们的定义域均为 $x<b/2$.

8. 在半径为 R 的球中内接一个立方体，试建立此立方体的体积 V 与其边长之间的函数关系，并指出其定义区间.

提示 利用立方体的体积公式和对角线与边长的关系. $V=a^3=\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$.

B类题

1. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是区间 $(-1,2)$，求 $f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域.

分析 利用函数的定义及求解不等式.

解 根据题意，$f(x-1)$ 的定义域应满足 $-1<x-1<2$，即 $0<x<3$；$f(x+1)$ 的定义域应满足 $-1<x+1<2$，即 $-2<x<1$. 因此，$f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域为

$$D=\{x\mid 0<x<3 \text{ 且 } -2<x<1\},\quad \text{即}\quad D=\{x\mid 0<x<1\}.$$

2. 已知 $f(x)$ 是二次多项式，且 $f(x+2)-f(x)=4x+6$，求 $f(x)$ 的表达式.

提示 利用二次多项式的形式和待定系数法. $f(x)=x^2+x+c$，其中 c 为任意实数.

3. 已知

(1) $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2$；　　(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

分别求出 $f(x)$ 的表达式.

分析 利用配项方法找到复合函数的中间变量.

解 (1) 由于 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$，令 $u=x-\frac{1}{x}$，有 $f(u)=u^2+4$. 因此有 $f(x)=x^2+4$.

(2) 由于 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{|x|}{\sqrt{1+1/x^2}}$，令 $|u|=\frac{1}{x}$，有 $f(u)=|u|\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}$. 因此有 $f(x)=|x|\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+2mx+m+6}$，$m$ 如何取值才能使它的定义域为 $\mathbf{R}$？

分析 利用函数的定义及二次多项式的判别式.

解 若想对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 的分母 $x^2+2mx+m+6$ 恒不为零，要求它的判别式小于零，即 $\Delta=4m^2-4(m+6)=4(m^2-m-6)<0$，解不等式可得 m 的取值范围为 $-2<m<3$.

5. 设 $f(x)$ 是区间 $[-a,a]$ 上的奇函数，$g(x)$ 是区间 $[-a,a]$ 上的偶函数，试证：$f[f(x)]$ 是区间 $[-a,a]$ 上的奇函数，$g[f(x)]$ 是区间 $[-a,a]$ 上的偶函数.

提示 利用奇函数和偶函数的定义进行验证.

6. 设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上都是单调递增函数，并且满足 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. 证明：

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)].$$

分析 利用复合函数的定义和函数的单调性进行验证. 参考经典题型详解中的例 1.4.

证 由已知可得

$$f[f(x)]\leqslant g[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[g(x)]\leqslant h[h(x)].$$

证毕

7. 讨论函数 $y=\sqrt{x+4}-\sqrt{x}$ 在其定义域上是否有界？

分析 根据函数的表达式特点讨论其有界性.

解 不难看出，函数的定义域为 $x\geqslant 0$. 利用分子有理化方法将函数的表达式变形，可得

$$y=\sqrt{x+4}-\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $\sqrt{x+4}$ 和 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上都是单调递增的，因此，函数 $\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，并且当 $x=0$ 时函数值为 $\frac{1}{2}$，当 x 无限增大时，函数值趋于零．因此有

$$0<y=\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}\leqslant 2,$$

说明函数在其定义域上有一个下界 0 和一个上界 2，即该函数在其定义域上有界．

8．叙述无界函数的定义，并证明函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,1)$ 上是无界的．

分析 利用函数的有界性定义．证明函数在其定义域上无界的方法之一是：对于任意大的正数，通过解不等式，在函数的定义域上总可以找到一点，使得它的函数值大于这个给定的正数．

解 利用函数的有界性定义，无界函数的定义可叙述为：假设函数 $f(x)$ 的定义域为 D．对任意给定的正数 M，在函数的定义域内总存在 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$．

对任意大的正数 $M>1$，解不等式 $\frac{1}{x^2}>M$，可得 $x<\frac{1}{\sqrt{M}}$．取 $x_0=\frac{1}{\sqrt{M}+1}\in(0,1)$，便有 $|f(x_0)|>M$．结论成立． 证毕

1.2 初等函数

一、知识要点

1．基本初等函数

（1）**常值函数**：$y=C$，其中 C 为常数，例图如图 1.6 所示．

（2）**幂函数**：$y=x^{\mu}$（μ 为给定的不为零的实数）．函数的定义域和值域因 μ 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义，且图像都经过点 $(1,1)$．例图如图 1.7 所示．

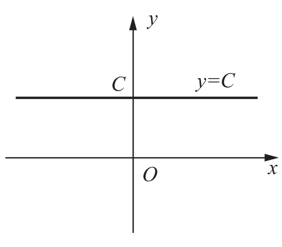


图 1.6

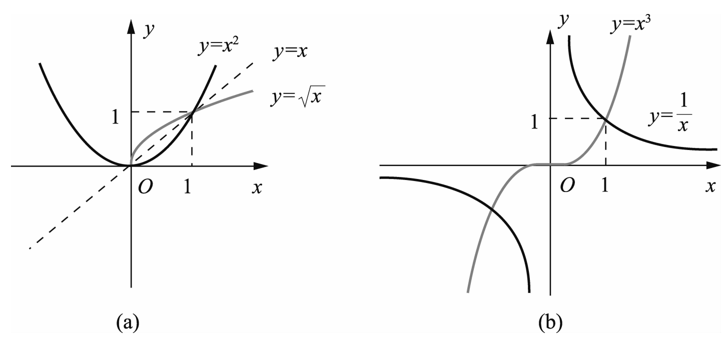


图 1.7

（3）**指数函数**：$y=a^x$（$a>0,a\neq 1$）．函数的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，值域为 $\mathbf{R}_+$．指数函数的图像均在 x 轴上方，且都经过点 $(0,1)$．当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调递增；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调递减．例图如图 1.8 所示．

（4）**对数函数**：$y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）．它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数．由直接函数与反函数的关系知，对数函数的定义域为 $D=\{x\mid x\in(0,+\infty)\}$，值域为 $\mathbf{R}$．对数函数的图像

在 y 轴的右方，且都经过点(1,0)．当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递增；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递减．例图如图 1.9 所示．

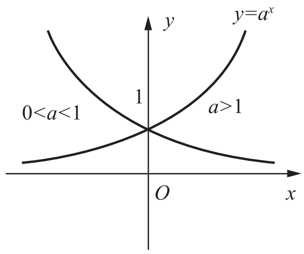


图 1.8

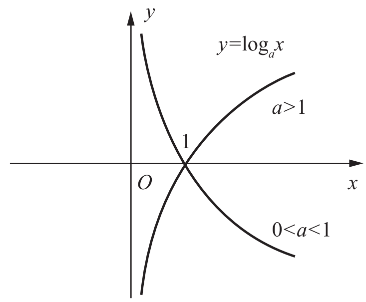


图 1.9

(5) **三角函数**：包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数．

正弦函数 $y=\sin x$ 和**余弦函数** $y=\cos x$，它们的定义域均 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，值域均为 $\mathbf{R}=\{y\mid y\in[-1,1]\}$，且都以 2π 为周期．$\sin x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数，它们的图像如图 1.10(a)所示．

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$的定义域为 $D=\left\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{ 且 } x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\text{ 为整数})\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$，它是以 π 为周期的奇函数，图像如图 1.10(b)所示．

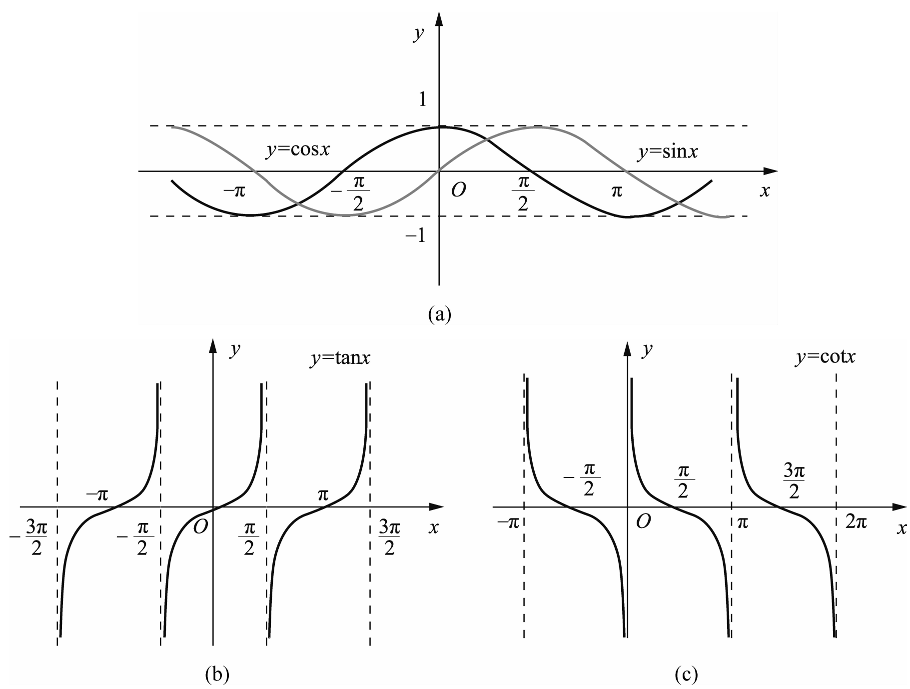


图 1.10

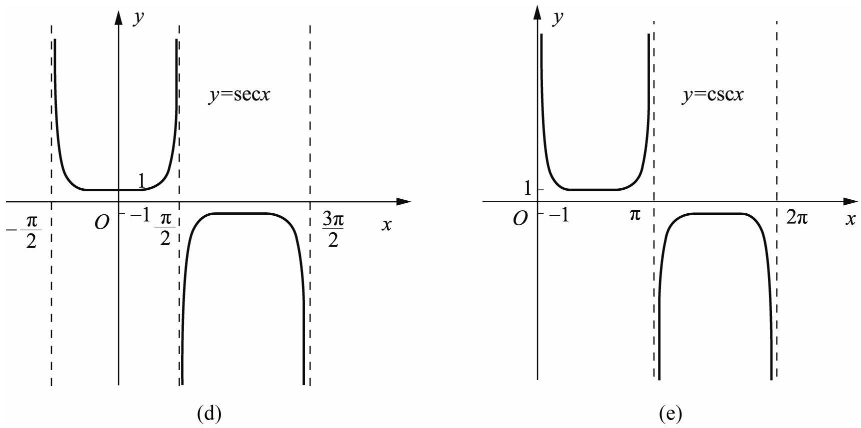


图　1.10(续)

余切函数　$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$的定义域为$D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}$，且$x\neq k\pi$($k$为整数)$\}$，值域为$\mathbf{R}$，它是以$\pi$为周期的奇函数，图像如图 1.10(c)所示.

正割函数　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$的定义域为$D=\left\{x\,|\,x\in\mathbf{R}，且\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\ 为整数)\right\}$，值域为$\mathbf{R}=\{y\,|\,y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\}$，它是以$2\pi$为周期的无界函数，如图 1.10(d)所示.

余割函数　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$的定义域为$D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}$，且$x\neq k\pi$($k$为整数)$\}$，值域为$\mathbf{R}=\{y\,|\,y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\}$，它是以$2\pi$为周期的无界函数，如图 1.10(e)所示.

(6) **反三角函数**：包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数.

反正弦函数　$y=\arcsin x$是正弦函数$y=\sin x$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数，它的定义域为$D=\{x\,|\,x\in[-1,1]\}$，值域为$R=\left\{y\,|\,y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$，如图 1.11(a)所示.

反余弦函数　$y=\arccos x$是余弦函数$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上的反函数，它的定义域为$D=\{x\,|\,x\in[-1,1]\}$，值域为$R=\{y\,|\,y\in[0,\pi]\}$，如图 1.11(b)所示.

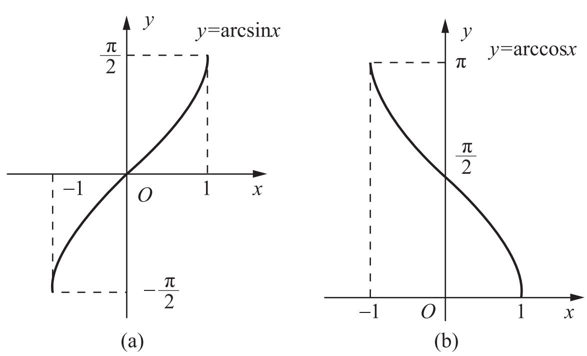


图　1.11

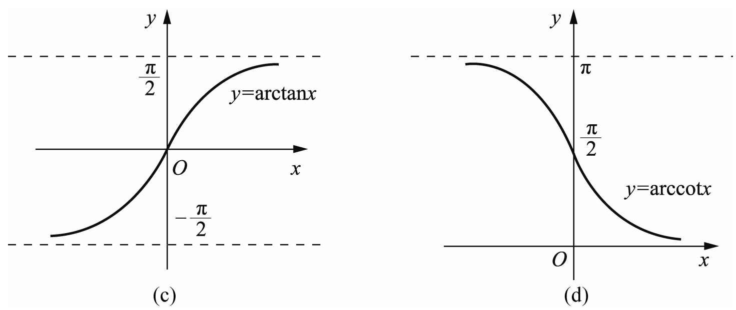


图 1.11(续)

反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数,它的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$,值域为 $R=\left\{y\mid y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\}$,如图 1.11(c)所示.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数,它的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$,值域为 $R=\{y\mid y\in(0,\pi)\}$,如图 1.11(d)所示.

2. 初等函数及其范例

由基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的函数复合运算得到,并且能用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**.

初等函数可分为两大类,即代数函数和初等超越函数. 进一步地,代数函数包含无理函数和有理函数(有理整函数和有理分式函数,见下面的范例);不是代数函数的初等函数称为初等超越函数,如幂函数(幂 μ 为无理数)、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等.

初等函数的范例:

多项式函数(或称有理整函数) $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, a_n\neq 0$.

有理函数 $R(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$.

双曲正弦函数 $y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. 它是奇函数,并且在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调递增.

双曲余弦函数 $y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. 它是偶函数,图像过点 $(0,1)$,并且在 $(-\infty,0]$ 上严格单调递减,在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增.

双曲正切函数 $y=\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. 它是奇函数,图像夹在两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间,并且在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调递增.

反双曲正弦函数 $\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x\in\mathbf{R}$.

反双曲余弦函数 $\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}), x\geqslant 1$.

反双曲正切函数 $\operatorname{artanh} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1)$.

二、疑难解析

1. 已知正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上存在反函数，在其他区间是否存在反函数？试举例说明.

答 只要能够保证正弦函数在某一区间严格单调，它在该区间上一定存在反函数. 例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数为 $y=\arcsin x$，称为反正弦函数的主值；由于 $y=\sin x$ 在区间 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上严格单调，因此它也存在反函数 $y=\mathrm{Arcsin}x=\arcsin x+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

2. 双曲余弦函数 $y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否存在反函数，若不存在，如何限制定义域，才能使其具有反函数？

答 双曲余弦函数是偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上严格单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增. 因此它在 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数. 易见，若将它的定义域限定在 $(-\infty,0]$（或 $[0,+\infty)$），则函数在 $(-\infty,0]$（或 $[0,+\infty)$）上严格单调，才能使其具有反函数. 例如，它在 $[0,+\infty)$ 上的反函数为 $\mathrm{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$x\geqslant 1$.

3. 初等函数可由基本初等函数经过有限次复合组成，这种说法是否正确，说明理由.

答 不正确. 正确的说法是：由基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的函数复合运算得到，并且**能用一个解析式表示**的函数，称为初等函数.

三、经典题型详解

题型1 判断初等函数的几类特性

例1.9 判断下列函数哪个是周期函数，并求出它的最小正周期：

(1) $f(x)=\sin(x^2)$； (2) $f(x)=\ln(3+\sin 2x)$.

分析 利用周期函数的定义.

解 (1) 它不是周期函数. 用反证法. 假设 $T\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期，由于对任意的 T，都有

$$f(x+T)=\sin((x+T)^2)=\sin(x^2+2xT+T^2)\neq\sin x^2,$$

所以它不是周期函数.

(2) 由于

$$f(x+\pi)=\ln(3+\sin 2(x+\pi))=\ln(3+\sin(2x+2\pi))=\ln(3+\sin 2x)=f(x),$$

所以它是周期函数，并且不难验证 π 是它的最小正周期.

例1.10 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$； (2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

分析 利用奇函数和偶函数的定义.

解 (1) 由于 $f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-f(x)$，因此它是奇函数.

（2）由于

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+(-x)^2}}\right)$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

因此它是奇函数.

例 1.11 判断下列函数在指定区间的单调性，并求出它们的反函数.

（1）$y=3+\ln(x+2), x\in[-1,5]$；　　（2）$y=2+\cos x, x\in[0,\pi]$.

分析 利用单调函数的定义，根据函数表达式的特点进行验证并求出反函数.

解 （1）因为对数函数 $\ln(x+2)$在其定义域$[-1,5]$上单调递增，故函数 $y=3+\ln(x+2)$ 在其定义域$[-1,5]$上单调递增，反函数为 $y=-2+e^{x-3}, x\in[3,3+\ln 7]$.

（2）因为三角函数 $\cos x$ 在其定义域$[0,\pi]$上单调递减，所以函数 $y=2+\cos x$ 在其定义域$[0,\pi]$上单调递减，反函数为 $y=\arccos(x-2), x\in[1,3]$.

例 1.12 讨论函数 $y=x\cos x$ 在区间$[0,+\infty)$上是否有界.

分析 利用无界函数的定义. 尝试找到一个趋于正无穷大的数列.

解 由于当 $x_n=2n\pi(n=1,2,3,\cdots)$时，$\cos x_n=\cos 2n\pi=1$，且当 n 无限增大时，x_n 也无限增大，所以 $y_n=x_n\cos x_n$ 也无限增大，换句话说，函数 $y=x\cos x$ 在$[0,+\infty)$上无界.

题型 2 复合函数的分解与运算

例 1.13 指出下列初等函数是由哪些基本初等函数复合而成的？

（1）$y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$；　　（2）$y=e^{\tan x^2}$.

分析 利用基本初等函数的定义及函数的四则运算分解，要熟练使用.

解 （1）令 $u=\arcsin a^x$，则 $y=\sqrt[3]{u}$. 再令 $v=a^x$，则 $u=\arcsin v$，因此 $y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$ 是由基本初等函数 $y=\sqrt[3]{u}, u=\arcsin v, v=a^x$ 复合而成的.

（2）令 $u=\tan x^2$，则 $y=e^u$. 再令 $v=x^2$，则 $u=\tan v$，因此 $y=e^{\tan x^2}$ 是由基本初等函数 $y=e^u, u=\tan v, v=x^2$ 复合而成.

例 1.14 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求：

（1）$f[f(x)]$；　　（2）$f\{f[f(x)]\}$；　　（3）$\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$.

分析 利用复合函数的定义和递推法.

解 经过计算可得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f(f(x))}{\sqrt{1+f^2(f(x))}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

以此类推，得到 $f\{\underbrace{f[\cdots f(x)]}_{n次}\}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$.

例 1.15 已知函数 $f(x)=\sin x^2$，$f[g(x)]=2-x$，且 $g(x)\geqslant 0$. 求 $g(x)$的表达式及其定义域.

分析 利用复合函数的定义和递推法.

解 有已知条件可得 $f[g(x)]=\sin[g(x)]^2=2-x$. 于是有$[g(x)]^2=\arcsin(2-x)$，由条件 $g(x)\geqslant 0$ 可知，$g(x)=\sqrt{\arcsin(2-x)}$，定义域为 $D=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

四、课后习题选解(习题 1.2)

A类题

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\ln\ln x}$； (2) $y=\cot(x-2)$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\sqrt{2x+1}$； (4) $y=\arctan\dfrac{3+x^2}{\sqrt{3-x^2}}$.

分析 利用函数的定义.

解 利用不同函数的形式和定义进行讨论.

(1) 函数的定义要求 x 满足 $\ln x>0$，进一步地，要求 $x>1$；此外还要求 $\ln\ln x\neq 0$，知 $\ln x\neq 1$，即 $x\neq \mathrm{e}$，故 $D=\{x\mid x>1 且 x\neq \mathrm{e}\}$.

(2) 函数的定义要求 x 满足 $x-2\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R} 且 x\neq 2+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) 函数的定义要求 x 满足 $-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$ 且 $2x+1\geqslant 0$，解不等式得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，即

$$D=\left\{x\mid -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}.$$

(4) 函数的定义要求 x 满足 $3-x^2>0$，解不等式得 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$，即 $D=\{x\mid -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\}$.

2. 证明下列函数是周期函数，并求出它们的最小正周期：

(1) $f(x)=1+\cos 2x$； (2) $f(x)=3\cos x\sin x$；

(3) $f(x)=\tan(2+x)$； (4) $f(x)=\cos^2 x$.

分析 利用周期函数的定义. 三角函数 $\sin\omega x$，$\cos\omega x$ 的周期为 $T=2\pi/\omega$，$\tan\omega x$ 的周期为 $T=\pi/\omega$.

解 (1) 因为 $\omega=2$，函数 $\cos 2x$ 的周期为 π；又因为

$$f(x+\pi)=1+\cos 2(x+\pi)=1+\cos 2x=f(x),$$

所以函数 $f(x)$是周期函数，π 是它的最小正周期.

(2) 易见 $f(x)=3\cos x\sin x=\dfrac{3}{2}\sin 2x$. 由于 $\omega=2$，函数 $\sin 2x$ 的周期为 π，因此函数 $f(x)$是周期函数，π 是它的最小正周期.

(3) 由于 $f(x+\pi)=\tan(2+x+\pi)=\tan(2+x)=f(x)$，因此函数 $f(x)$是周期函数，π 是它的最小正周期.

(4) 由于 $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，因此函数 $f(x)$是周期函数，π 是它的最小正周期.

3. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=4x+\sin x$ ； (2) $f(x)=x^2+\sqrt{1-x^2}+1$；

(3) $f(x)=a^{2x-1}-a^{-2x+1}\quad(a>0)$； (4) $f(x)=\cos 2x\tan x$.

提示 利用奇函数和偶函数的定义.(1) 奇函数；(2) 偶函数；(3)非奇非偶函数；(4) 奇函数.

4. 求出下列函数在指定区间内的一个上界和一个下界：

(1) $f(x)=3+4x+2x^3$，$x\in[-5,2]$； (2) $f(x)=2\sin x+1$，$x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\dfrac{2}{1+3x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$； (4) $f(x)=2x+\arcsin x$，$x\in[0,1]$.

分析 利用有界函数的定义，根据函数表达式的特点估计函数的上下界.

解 (1) 由于函数 x 和 x^3 在区间$[-5,2]$上单调递增，所以函数 $f(x)=3+4x+2x^3$ 在区间$[-5,2]$上也单调递增；又 $f(-5)=-267$，$f(2)=27$，所以-267 和 27 分别是函数$f(x)$的一个下界和一个上界.

(2) 因为 $\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上的最小值和最大值分别为 0 和 1，所以 $f(x)=2\sin x+1$ 在区间$[0,\pi]$上的最小值和最大值分别为 1 和 3，即 1 和 3 分别是函数 $f(x)$的一个下界和一个上界；

(3) 因为 $f(x)$是偶函数，显然它在$[0,+\infty)$上单调递减. 当 $x=0$ 时，$f(0)=2$；当 x 无限增大时，函数 $f(x)$的值趋于零. 因此 0 和 2 分别是函数 $f(x)$的一个下界和一个上界；

(4) 由于函数 x 和 $\arcsin x$ 在区间$[0,1]$上都单调递增，所以函数 $f(x)=2x+\arcsin x$ 在区间$[0,1]$上也单调递增；又 $f(0)=0$，$f(1)=2+\dfrac{\pi}{2}$，所以 0 和 $2+\dfrac{\pi}{2}$分别是函数 $f(x)$的一个下界和一个上界.

5. 指出下列函数在指定区间内的单调性，并求出它们的反函数：

(1) $y=3x^2+2$，$x\in(0,4)$； (2) $y=\dfrac{2^x-3}{2^x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

提示 利用单调函数的定义，根据函数表达式的特点进行验证并求出反函数.(1)单调递增，反函数为 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}$，$x\in(2,50)$；(2)单调递增，反函数为 $y=\log_2 3-\log_2(1-x)$，$x\in(-\infty,1)$.

6. 求出下列复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域和值域：

(1) $y=f(u)=\sin u$，$u=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=f(u)=\ln u$，$u=\arccos x$.

分析 利用复合函数的定义，根据函数表达式的特点求出相应函数的定义域.

解 (1) $y=f(u)=\sin u$ 的定义域为 $D=\{u\mid-\infty<u<+\infty\}$，函数 $u=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的值域 $R(u=\varphi(x))=\{u\mid 0\leqslant u\leqslant 1\}$，满足复合函数的定义，对应的复合函数为

$$y=f[\varphi(x)]=\sin\sqrt{1-x^2},$$

容易求得定义域为 $D=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant 1\}$，值域为 $R(f)=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant\sin 1\}$.

(2) 由于 $y=f(u)=\ln u$ 的定义域为 $D=\{u\mid 0<u<+\infty\}$，函数 $u=\varphi(x)=\arccos x$ 的值域 $R(u=\varphi(x))=\{u\mid 0<u\leqslant\pi\}$，满足复合函数的定义. 对应的复合函数为

$$y=f[\varphi(x)]=\ln\arccos x,$$

定义域为 $D=\{x\mid-1\leqslant x<1\}$，值域为 $R(f)=\{y\mid-\infty<y\leqslant\ln\pi\}$.

7. 指出下列初等函数由哪些基本初等函数构成：

(1) $y=\sqrt[3]{\arcsin(x^2)}$； (2) $y=\sin^3\ln x$； (3) $y=e^{\tan(x+1)}$； (4) $y=x^3\sin\sqrt{\ln x}$.

分析 利用基本初等函数的定义及函数的四则运算求解，要熟练使用.

解 (1) $y=\sqrt[3]{u}$，$u=\arcsin v$，$v=x^2$.

(2) $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=\ln x$.

(3) $y=e^u$，$u=\tan v$，$v=x+1$.

(4) $y=uv$，$u=x^3$，$v=\sin w$，$w=\sqrt{\varphi}$，$\varphi=\ln x$.

8. 利用 $y=\sin x$ 的图像，作出下列函数的图像：

（1）$y=|\sin x|$；　（2）$y=\sin|x|$；　（3）$y=3\sin 2x$；　（4）$y=3\sin\dfrac{x}{2}$.

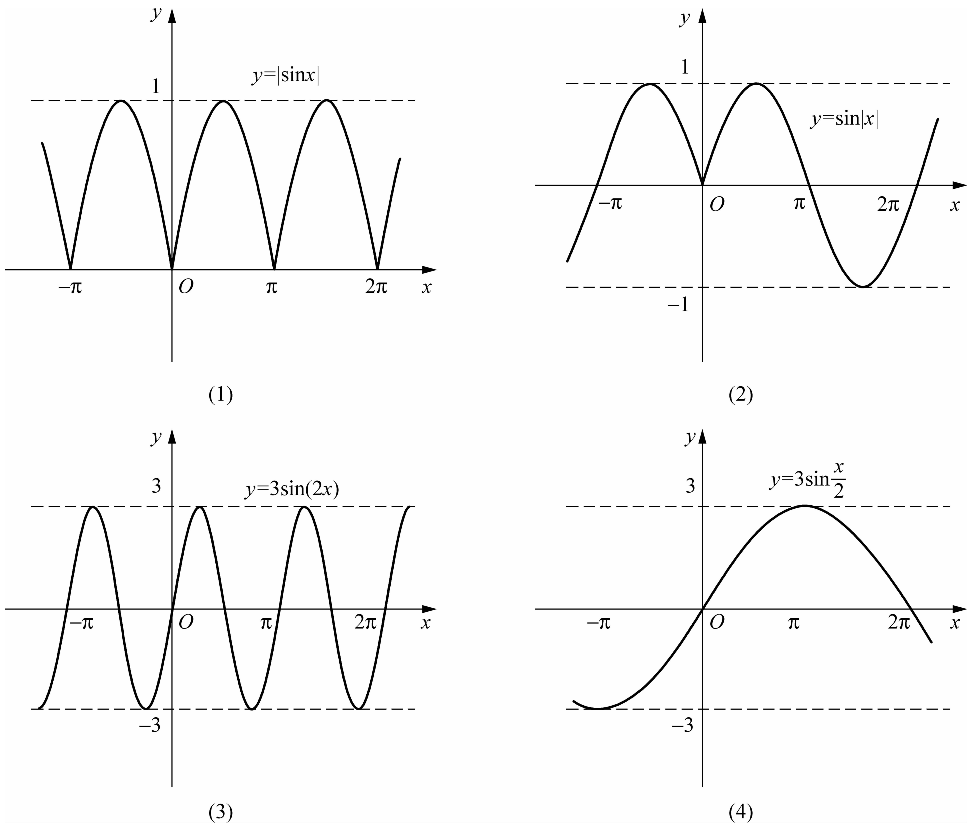


图 1.12

B 类题

1. 指出下列函数中哪些是周期函数，并求出周期函数的最小正周期：

（1）$f(x)=4\sin 3x+\cos 3x$；　（2）$f(x)=\tan 4x+3\tan\dfrac{x}{2}$.

分析 利用周期函数的定义.

解 （1）由于

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=4\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=4\sin(3x+2\pi)+\cos(3x+2\pi)=f(x),$$

所以它是周期函数，并且不难验证$\dfrac{\pi}{3}$不是它的最小正周期，所以$\dfrac{2\pi}{3}$是它的最小正周期.

（2）由于 $f(x+2\pi)=\tan 4(x+2\pi)+3\tan\dfrac{x+2\pi}{2}=\tan 4x+3\tan\dfrac{x}{2}=f(x)$. 所以它是周期函数，并且不难验证 π 不是它的最小正周期，所以 2π 是它的最小正周期.

2. 判定下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{x\cos x}{2x^2+3}$；　（2）$f(x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$.

分析 利用奇函数和偶函数的定义.

解 (1) 不难看出 $f(x)=x\cdot\dfrac{\cos x}{2x^2+3}$. 由于 x 是奇函数,$\dfrac{\cos x}{2x^2+3}$是偶函数,因此它们的乘积是奇函数.

(2) 由于 $f(-x)=\sqrt[3]{(1+(-x))^2}+\sqrt[3]{(1-(-x))^2}=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}=f(x)$,所以它是偶函数.

3. 证明函数 $y=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$在 $\mathbf{R}$ 上是有界的.

提示 $|\sin x|\leqslant 1,\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

5. 证明函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$在其定义域上的反函数就是其本身.

提示 利用反函数的定义证明.

7. 利用双曲函数的定义证明下列等式:

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$;　　(2) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$;

(3) $\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$.

提示 利用双曲函数的定义证明.

8. 把半径为 r 的铁皮,自中心处剪去中心角为 α 的扇形后,剩余铁皮围成一个无底圆锥,试建立此圆锥的体积 V 与中心角 α 之间的函数关系.

分析 利用圆锥的体积公式.

解 假设圆锥体的底面半径为 R,高为 H,则圆锥体的体积公式为 $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

如图 1.13 所示,圆锥的底面周长等于剪去中心角为 α 的扇形后剩余圆弧的周长,即 $r(2\pi-\alpha)$,所以圆锥的底面半径为 $R=r(2\pi-\alpha)/2\pi$. 根据勾股定理可以求出圆锥的高为 $H=\sqrt{r^2-R^2}=r\sqrt{1-((2\pi-\alpha)/2\pi)^2}$. 所以由圆锥体的体积公式可得

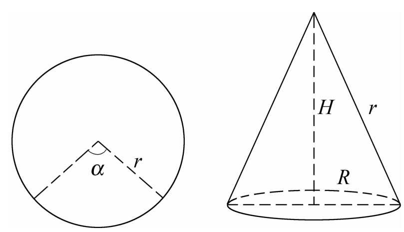


图 1.13

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{(2\pi-\alpha)^2 r^3}{12\pi}\sqrt{1-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi.$$

1.3 函数关系的几种表示方法

一、知识要点

1. 函数的分段表示

设函数 $f_1(x),f_2(x)$分别定义在数集 D_1 和 D_2 上,且 $D_1\cap D_2=\varnothing$,则函数

$$y=f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in D_1,\\ f_2(x), & x\in D_2\end{cases}$$

在数集 $D_1\cup D_2$ 上有定义.

重要的分段函数:

(1) 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

该函数的图像如图 1.14 所示.

(2)"整数部分"函数

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

该函数表示 y 是不超过 x 的最大整数. 它的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\mathbf{Z}$,函数图像如图 1.15 所示. 显然,$[2.5]=2$,$[3]=3$,$[0]=0$,$[-\pi]=-4$.

(3)"非负小数部分"函数 $y=\{x\}=x-[x]$,定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$,值域为 $R(f)=\{y\mid 0\leqslant y<1\}$. 该函数的图像如后面的图 1.22 所示.

(4)符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

该函数的图像如图 1.16 所示.

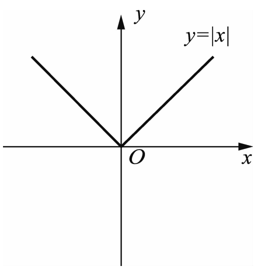


图 1.14

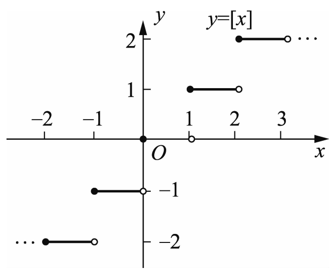


图 1.15

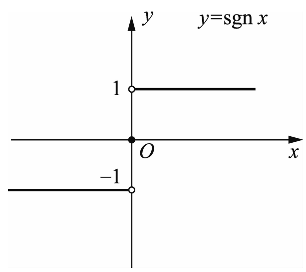


图 1.16

(5)狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

容易验证:狄利克雷函数是周期函数,但它没有最小正周期,并且任何有理数都是它的周期,而任何无理数不是它的周期;它是有界函数;它是偶函数;它在任何实数区间都不是单调函数. 狄利克雷函数的**重要应用**在于澄清某些似是而非的命题,或说明某些命题或定理中的条件是不能变更的,我们将在后面的章节中给出具体应用.

2. 函数的隐式表示

与函数的显式表示相对应,所谓的函数的隐式表示是指通过方程 $F(x,y)=0$ 来确定自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系.

3. 函数的参数表示

如果参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in[a,b]$$

可以确定变量 x,y 之间的函数关系,则称此关系为由参数方程所确定的函数,这种方法称为**函数的参数表示**.

重要的参数方程:

（1）椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad a,b>0, t\in[0,2\pi].$$

函数图像如图 1.17 所示.

（2）星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

函数图像如图 1.18 所示.

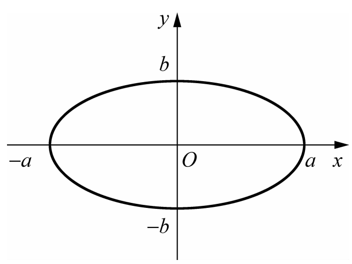


图　1.17

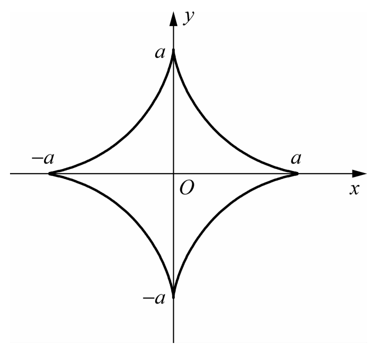


图　1.18

（3）旋轮线或摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad t\in[0,+\infty).$$

函数图像如图 1.19 所示.

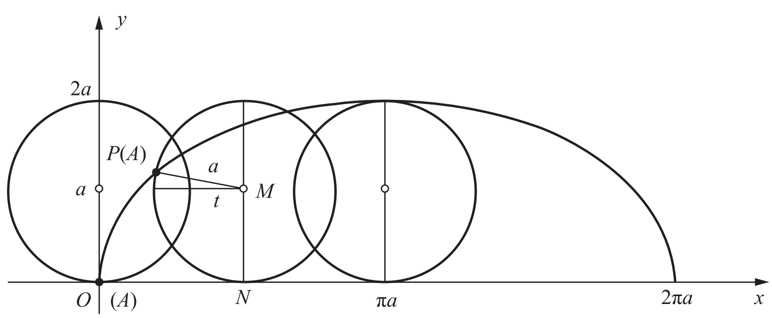


图　1.19

二、疑难解析

1. 所有的分段函数都不是初等函数，这种说法是否正确，说明理由.

答　不正确. 虽然符号函数、“整数部分”函数、狄利克雷函数等都不是初等函数，但并不是所有的分段函数都不是初等函数，例如

$$y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$