

上 篇

投 资 理 论

对投资中所面临的风险和可能获得的收益的量化表达,以及对投资者效用的理论分析和描述,构成了投资理论的基础背景。而资产组合理论、资本资产定价模型、套利定价理论、有效市场假说与行为金融理论,则构成了投资理论的核心内容。本篇即围绕上述投资理论的基础概念与核心内容进行分析。

投资理论的一个基本指导理念是风险与收益的最优匹配。对一个理性的投资者而言,所谓风险与收益的最优匹配,是在一定风险下追求更高的收益,或是在一定收益下追求更低的风险。对风险与收益的量化以及对投资者风险偏好的分类,是构建资产组合时首先要解决的一个基础问题。

本章分别对单一资产和组合资产的风险与收益的分类及其计量进行研究,并对投资者的风险偏好与效用进行分析,为进入资产组合理论的核心提供概念基础。

第一节 单一资产收益与风险的衡量

我们知道,一个投资组合是由不同的资产或证券构成的,而对单一资产或证券的收益和风险的衡量,则是计量投资组合的收益与风险的基础。本节将从收益的类型与测定、风险的衡量、非正态分布的风险度量、风险的分类以及风险与收益的综合五个角度,对单一资产风险与收益进行量化研究。

一、收益的类型与测定

我们可以将投资收益率分为持有期收益率、预期收益率和必要收益率三大类型。

(一) 持有期收益率

进行证券投资,收益额由当前收益与资本利得两部分构成,如图 1-1 所示。

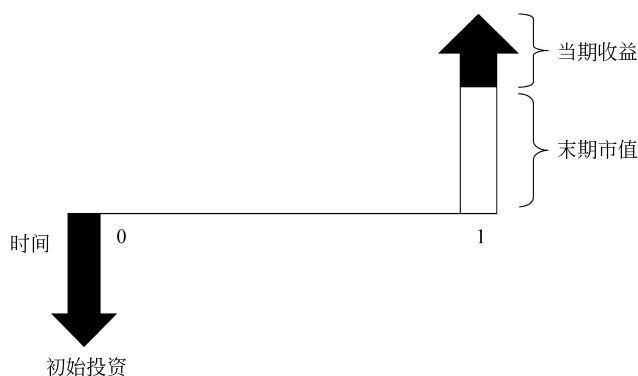


图 1-1 投资收益的构成

由图 1-1 可见,持有期收益率是指当期收益与资本利得之和占初始投资的百分比,即

$$\text{持有期收益率} = \frac{\text{当期收益} + \text{资本利得}}{\text{初始投资}} \times 100\% \quad (1-1)$$

例题 1-1 持有期收益率的计算

假定小王在去年的今天以每股 25 元的价格购买了 100 股浦发银行股票。过去一年中小王得到 20 元的红利($0.2 \text{ 元/股} \times 100 \text{ 股}$), 年底时股票价格为每股 30 元, 那么, 持有期收益率是多少?

解: (1) 计算过程如下:

小王的投资为 $25 \times 100 = 2\,500$ (元)。

年末小王的股票价值额为 3 000 元, 同时还拥有现金红利 20 元。

小王的收益额为 $20 + (3\,000 - 2\,500) = 520$ (元)。

则年持有期收益率为 $\frac{520}{2\,500} \times 100\% = 20.8\%$ 。

(2) 图形描述如图 1-2 所示。

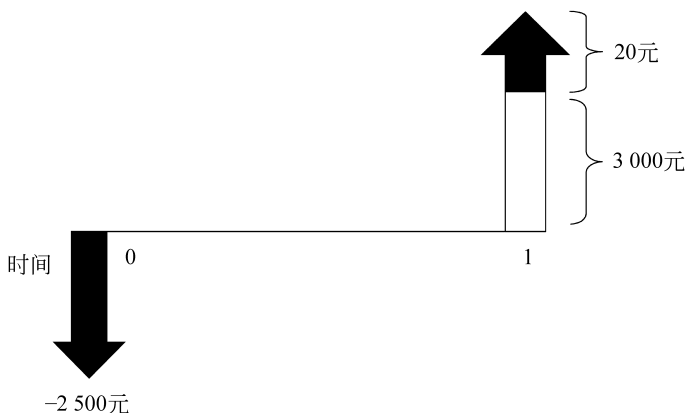


图 1-2 投资收益的图形描述

进一步, 持有期收益率从计算上可分为算术平均持有期收益率和几何平均持有期收益率。算术平均持有期收益率是指投资者在持有某种投资品 n 年内获得的收益率总和, 公式为

$$\text{算术平均持有期收益率} = (r_1 + r_2 + \cdots + r_n) / n \quad (1-2)$$

几何平均持有期收益率是指投资者在持有某种投资品 n 年内按照复利原理计算的实际获得的年平均收益率, 其中 r_i 表示第 i 年持有期收益率 ($i = 1, 2, \cdots, n$), 公式为

$$\text{几何平均持有期收益率} = \sqrt[n]{(1 + r_1) \times (1 + r_2) \times \cdots \times (1 + r_n)} - 1 \quad (1-3)$$

当各期收益出现巨大波动时, 算术平均持有期收益率会呈明显的上偏倾向。几何平均持有期收益率指标优于算术平均持有期收益率指标的地方, 是因为它引入了复利的程式, 考虑了货币的时间价值, 即通过对时间进行加权来衡量最初投资价值的复合增值率, 从而克服了算术平均持有期收益率有时会出现上偏倾向的缺点。通过下面的案例可以理解这一点。



案例 1-1 持有期收益率——算术平均与几何平均

某种股票的市场价格在第 1 年年年初时为 100 元,到了年底股票价格上涨至 200 元,但时隔 1 年,在第 2 年年末它又跌回到了 100 元。假定这期间公司没有派发过股息,计算其算术平均收益率和几何平均收益率。

第 1 年的投资收益率为 100% ($r_1 = (200 - 100) / 100 = 1 = 100\%$),第 2 年的投资收益率则为 -50% ($r_2 = (100 - 200) / 200 = -0.5 = -50\%$)。

用算术平均收益率来计算,这两年的平均收益率为 25% ,即 $r = [100\% + (-50\%)] / 2 = 25\%$ 。

采用几何平均收益率来计算, $r_c = \sqrt{(1+1)(1-0.5)} - 1 = 0$ 。这个计算结果符合实际情况,即两年来平均收益率为 0。

由以上案例可见,算术平均收益率的上偏倾向使它总是高于几何平均收益率,而且收益波动的幅度越大,这种偏差就越明显。只有在整个投资期间各期的收益率都是相同的情况下,两种平均收益率才可能是一致的。

从经济意义上来说,几何平均收益率因为从复利的角度考虑,对时间进行了加权,当收益率波幅较大时,克服了等权重计算带来的误差。而由于算术平均收益率是等权重计算的,因此波幅较大时,计算的结果也会较大。只有在整个投资期间各期的收益率都是相同的情况下,权重因素才不起作用,两种平均收益率才可能是一致的。

(二) 预期收益率

所谓预期收益率,即未来收益率的期望值。其计算公式可以表述为

$$E(r) = \sum_{i=1}^n (\text{收益率的概率}) \times (\text{可能的收益率}) \quad (1-4)$$

记作

$$E(r) = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + p_n r_n = \sum_{i=1}^n p_i r_i \quad (1-5)$$

式中, p_i 为收益率的概论; r_i 为可能的收益率。

通常,可以通过选择历史样本数据,利用收益率的算术平均值来估计预期收益。

例题 1-2 预期收益率的计算

在可供选择的投资中,假定投资收益可能会由于市场运行情况的不同出现几种结果,如在市场运行良好的环境中,该项投资在下一年的收益率可能达到 20% ;而当市场处于熊市时,投资收益将可能是 -20% ;如果市场维持正常状态运行,该收益率是 10% ,见表 1-1。

表 1-1 不同情况下的可能收益率

市场状况	概 率	收 益 率
牛市	0.15	0.20
熊市	0.15	-0.20
正常运行	0.70	0.10

根据以上数据即可算出该投资下一年的预期收益率:

$$E(r) = 0.15 \times 0.20 + 0.15 \times (-0.20) + 0.70 \times 0.10 = 0.07$$

(三) 必要收益率

所投资的证券产生的收益率必须得到补偿: ①货币纯时间价值, 即真实无风险收益率 r_f ; ②该期间的预期通货膨胀率 π^e ; ③所包含的风险, 即风险溢价 r_p 。这三种因素的总和被称为必要收益率, 用公式表示为

$$k = r_f + \pi^e + r_p \quad (1-6)$$

作为对延期消费的补偿, 这是投资者进行一项投资所能接受的最小收益率, 即必要收益率。需要注意的是, 在式(1-6)中, 无风险收益率是已知的, 预期通货膨胀率也可以从有关宏观研究报告中获取, 那么, 风险溢价是多少? 如果此数据未知, 意味着必要收益率 k 是无解的。这是一个很有趣又很实际操作的问题, 请大家思考。

(四) 收益率的正态分布

正态分布是一个“神奇”的自然现象, 很多由一连串随机事件构成的变量都会呈现出正态分布的形态, 在日常生活中频繁出现。例如, 一个国家或地区全部人口的身高、体重情况都很好地符合正态分布。如果投资者对收益的期望是理性预期, 那么实际收益率应该是服从以此期望为均值的正态分布, 即收益率的概率分布最终会形成大家熟悉的钟形形状。

图 1-3 展示的是一个均值为 10%、标准差为 20% 的正态分布。这个图形展示了在给定这些参数下各种收益水平发生的理论概率。较小的标准差意味着可能的收益表现更多地聚集在均值附近, 较大的标准差则意味着可能实现的收益水平更加分散。任何一个特定收益率实现的概率都由均值和标准差来决定, 换句话说, 一个正态分布的形态完全由其均值和标准差这两个参数来决定。

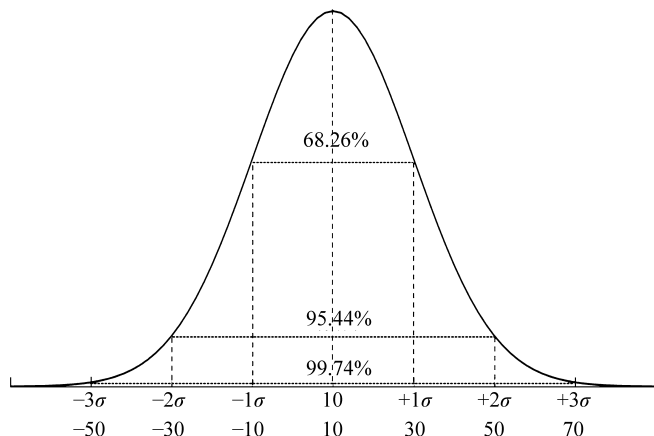


图 1-3 正态分布(均值 10%, 标准差 20%)

如果收益率的分布可以用正态分布来近似拟合的话, 投资管理将变得更加有理有据。第一, 正态分布是左右对称的, 也就是说, 均值左右程度一样的偏离其发生的概率也一样。

没有对称性的话,用收益的标准差来衡量风险显然是不合适的。第二,正态分布具有稳定性,意味着对于具有正态性的不同资产,其构成组合的收益同样服从正态分布。第三,当资产或资产组合收益分布只有两个变量时,对其未来的情境分析因为需要考虑的变量很少而会变得简单许多。第四,当构造证券组合时,必须考虑证券收益的相关性。总体来说,这种相关性是多层面的。但是如果收益是正态分布,收益之间统计相关性可以以相关系数来表达。这样我们在描述任何两个证券的相关性时只需估计一个参数。



案例 1-2 Excel 中的正态分布函数

假定标准普尔 500 的月收益率近似符合均值为 1%、标准差为 6% 的正态分布。那么在任何一个月份指数收益为负的概率是多少? 使用 Excel 建立一个函数能很快解决这个问题。在正态分布函数中观察的结果小于临界值的概率用 NORMDIST 得到。在这个例子中想得到小于零的概率,即计算 $\text{NORMDIST}(0, 1, 6, \text{TRUE}) = 0.4338$,也可以在 Excel 中建立标准正态函数来求均值低于 1/6 个标准差的概率: $\text{NORMDIST}(-1/6) = 0.4338$ 。

二、风险的衡量

如果我们面对普通股、长期债券、短期国债三种证券,仅仅从收益的角度来看,如图 1-4 所示。

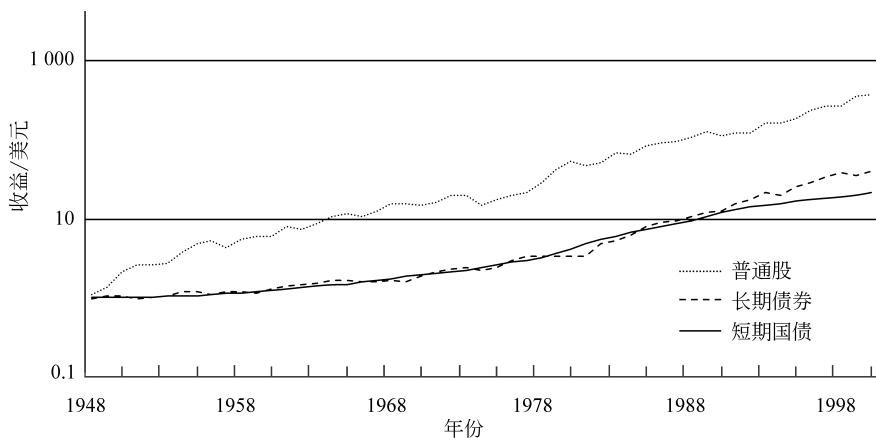


图 1-4 从收益率变化看投资

由图 1-4 可见,根据收益率的计算公式:

$$1 \times (1 + r_{1948}) \times (1 + r_{1949}) \times \cdots \times (1 + r_{2000}) = 383.82 (\text{美元})$$

即 1948 年 1 美元的股票投资到 2000 年时将变为 383.82 美元,其结果则是:将没有哪个投资者愿意持有长期债券和短期国债。

但如果我们从收益率的变化来看,情况则大不相同,如图 1-5 所示。这也就引出了另一个重要的概念——风险。

一般将投资风险定义为实际收益对预期收益的偏离,数学上可以用预期收益的方差

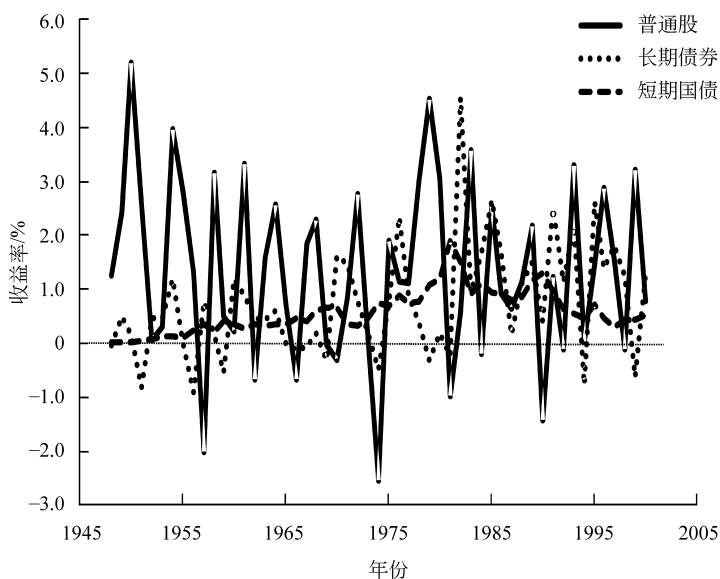


图 1-5 从收益率变化看投资

来衡量。公式为

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i [r_i - E(r_i)]^2 \quad (1-7)$$

方差的平方根为标准差,公式为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i [r_i - E(r_i)]^2} \quad (1-8)$$

标准差的统计学含义是:当资产收益服从正态分布时,2/3 的收益率在 $E(r_i) \pm \sigma_i$ 的范围内;95% 的收益率在 $E(r_i) \pm 2\sigma_i$ 的范围内。因此,其金融学的含义是:方差或标准差越大,随机变量与数学期望的偏离越大,即实际收益对预期收益的偏离越大,风险就越大。

例题 1-3 某股票预期收益率

假定投资于某股票,初始买入价格为 10 元/股,持有期 1 年,现金红利为 0.4 元/股,预期股票价格在表 1-1 所示的不同市场运行状态下有如表 1-2 中所示的三种可能。求各种可能下的收益率,并求该股票的期望收益和方差。

表 1-2 一个假设的股票投资

经济状态	繁荣	正常运行	萧条
概率	0.25	0.50	0.25
期末价/(元/股)	14	11	8

解: 设 r_1 、 r_2 、 r_3 分别为经济繁荣、正常运行和经济萧条状态下的收益率。则

$$r_1 = (14 - 10 + 0.4) / 10 = 44\%$$

$$r_2 = (11 - 10 + 0.4) / 10 = 14\%$$

$$r_3 = (8 - 10 + 0.4) / 10 = -16\%$$

根据预期收益率计算公式得

$$E(r) = (0.25 \times 44\%) + (0.5 \times 14\%) + [0.25 \times (-16\%)] = 14\%$$

再根据方差的计算公式得

$$\sigma^2 = 0.25(44\% - 14\%)^2 + 0.5(14\% - 14\%)^2 + 0.25(-16\% - 14\%)^2 = 0.045$$

三、非正态分布的风险度量^①

上述风险的表达所遵循的即收益率的正态分布。但在现实市场中,资产收益率经常偏离正态分布。此时对正态分布的偏离可以使用收益分布的高阶矩进行衡量。超额收益 R 的 n 阶中心距为 $(R - \bar{R})^n$, 一阶矩为 0, 二阶矩为方差的估计值 $\hat{\sigma}^2$ 。

对不对称性进行度量,称为偏度,计算公式如下:

$$\text{偏度} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(R_i - \bar{R})^3}{\hat{\sigma}^3} \quad (1-9)$$

偏度的立方有正有负。因此,如果分布右偏,则如图 1-6 中的曲线,偏度为正,标准差高估风险。左偏如图 1-7 中的曲线,偏度为负,标准差低估风险。

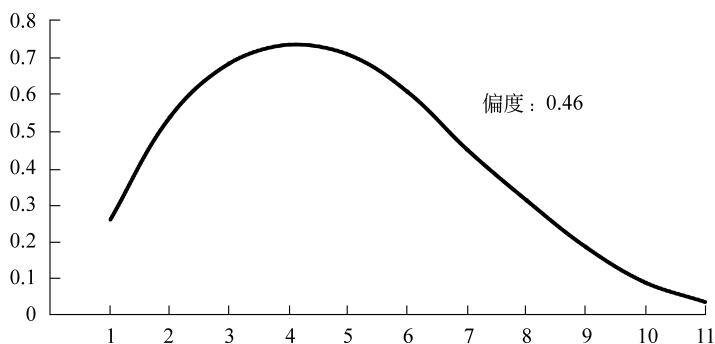


图 1-6 右偏态分布

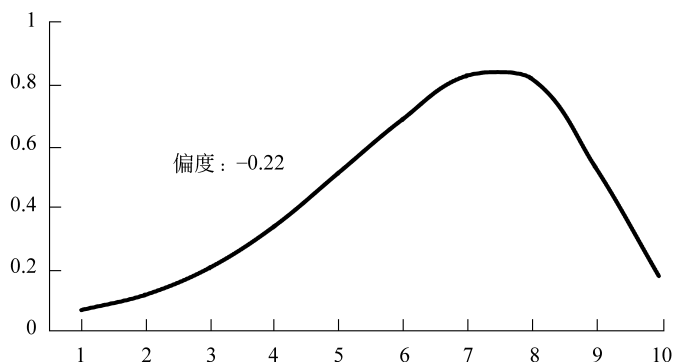


图 1-7 左偏态分布

^① 此处参考了博迪,凯恩,马库斯. 投资学[M]. 10 版. 北京:机械工业出版社,2017.

另一个正态偏离的度量是考虑分布两端极端值出现的可能性,即从图像上来看是有肥尾特征的情况,分布的尾部发生的概率较正态分布预测的要高,分布中部发生的概率较正态分布的低。这种度量称为峰度,计算如下:

$$\text{峰度} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(R_i - \bar{R})^4}{\hat{\sigma}^4} - 3 \quad (1-10)$$

之所以减去3是因为正态分布的峰度为0,峰度为正说明存在肥尾现象。

极端负值可能由负偏度以及负峰度产生。注意偏度和峰度为纯数值,它们不会随着高频观测值的变化而变化。极端负收益的频繁发生会导致出现负偏和肥尾。因此,我们需要新的风险度量方法来衡量极端负收益率的发生情况,这些方法主要包括在险价值、预期损失、下偏标准差与索提诺比率、 -3σ 收益的相对频率。

(一) 在险价值

在险价值是度量一定概率下发生极端负收益所造成的损失^①。在险价值的另一个名称是分位数。一个概率分布的 q 分位数是指小于这一分位数的样本点占总体的比例为 $q\%$,因此,当 $q=50$ 时的分位数就是中位数。通常我们估计5%的VaR,它表示有95%的收益率将大于该值。因此,这一VaR实际上是5%的最坏的情况下最好的收益率。在险价值的公式为

$$\text{VaR}_p = F^{-1}(1 - P)$$

式中, $F(\cdot)$ 为分布函数; P 为置信水平。

当投资组合的收益率为正态分布时,VaR可以从分布的均值和标准差中直接推导出来。标准正态分布的5%分位数为 -1.65 ,因此相应的VaR为

$$\text{VaR}(0.05, \text{正态分布}) = \bar{R} + (-1.65)\sigma \quad (1-11)$$

我们可以将观测值从高到低排列以获取VaR的估计值,VaR就是样本分布的5%分位数。通常,受样本数量的影响,必须对分位数进行插值处理。



案例 1-3 VaR 的计算

假设样本由84个年收益率组成(1926—2009年),则5%的观测的序号为4.2。我们必须在从下往上数的第4个观测和第5个观测之间进行插值运算。假设最低的5个收益率为: -25.03% , -25.69% , -33.49% , -41.03% , -45.64% ,则相应的VaR在 -25.03% 和 -25.69% 之间,并被计算如下:

$$\text{VaR} = -25.69\% + 0.2 \times (25.69\% - 25.03\%) = -25.56\%$$

(二) 预期损失

当我们通过观测最坏的5%的情况来评估尾部风险时,VaR是所有这些情况中收益率最高(损失最小)的。一个对损失敞口头寸更加现实的观点是:关注最坏情况发生条件下的预期损失。这样的值有两个名称:预期损失和条件尾部期望,后者更强调其与左尾分布之间的密切关系。在本书中,我们使用预期损失这一名称。精确定义为:损失

^① 在险价值一般会写入银行的管理条例并由风险管理人员监控。

大于 VaR 的期望,即

$$ES_p = E[X | X > \text{VaR}_p] \quad (1-12)$$

案例 1-4 预期损失的计算

我们对案例 1-3 进行拓展,假设每一个样本点发生的概率相同。因此,我们需要求最底部的 5% 的观测值的平均值。和前面的差值过程一样,我们给最底部的 4 个值的权重为 4/4.2,第 5 个值的权重为 0.2/4.2,这样得到预期损失:

$$ES = -25.03\% \times 0.2/4.2 + (-25.69\% - 33.49\% - 41.03\% - 45.64\%) \times 1/4.2 = -35.94\%$$

显著小于 VaR 的值 -25.56%。

(三) 下偏标准差与索提诺比率

正态分布情况下用标准差作为风险的度量存在以下问题:①分布的非对称性要求我们独立地考察收益率为负的结果;②因为无风险投资工具是风险投资组合的替代投资,因此我们应该考察收益对无风险投资收益的偏离而不是对平均投资收益的偏离。

下偏标准差可以解决这两个问题。其计算方法和普通标准差的计算相似,但只使用造成损失的那些样本,即只使用相对于无风险收益率负偏(而不是相对于样本均值负偏)的那些收益率,类似求方差一样求这些偏离的平方和的平均值,然后再求其平方根就得到了下偏标准差。因此下偏标准差实际代表的是给定损失发生情况下的均方偏离。注意到这样一个值忽略了负超额收益的频率,不同的负的超额收益的分布可能产生相同的下偏标准差值。

一般使用下偏标准差来代替标准差,同样也用超额收益率对下偏标准差的比例来代替夏普指数,这一变形称为索提诺比率,计算公式如下:

$$\text{下行标准差: } DD_{EX} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [\min(R_i - R_f, 0)]^2} \quad (1-13)$$

$$\text{索提诺比率: } SOR = \frac{E(R_p) - R_f}{DD} \quad (1-14)$$

可以看出,下行偏差忽略“良好”表现,而只计算“不良”风险。表示每增加一份“不良”风险,会有多少收益的报酬。就像第五章讲的夏普指数一样,索提诺比率也是越大越好。当考虑到一个很小的下行偏差时,可能会产生一个比较大的索提诺比率。

(四) -3σ 收益的相对频率

接下来关注大幅度负收益与相同均值和标准差正态分布相比的相对发生频率。当股票价格发生大幅度变动时会产生的极端收益,这种极端的收益被称为跳跃。我们用低于均值 3 倍标准差或以上的收益发生的样本数与正态分布下 -3σ 收益发生的相对频率衡量这种跳跃。文中的系统风险和非系统风险也可以表述为系统性风险和非系统性风险,这两种表述没有区别。

这一程度对于股票价格下行风险有信息价值,实践中它在高频大样本中更有用。在均值为 0.1、标准差为 0.2 的正态分布中, -3σ 跳跃的相对频率为 0.13%,即每 1 000 个观察值中有 1.3 次。因此,在小样本中很难得到具有代表性的结果,或者很难反映真实的关

于极端变化的统计预期。

四、风险的分类

总体上,可以将风险分为非系统性风险和系统性风险。

(一) 非系统性风险

非系统性风险是由个别上市公司或其他融资主体的特有情况所造成的风险,这一风险只与该公司本身的情况有关,而与整个市场无关,也称微观风险。如果市场是有效的^①,则整个证券市场可以看作“市场组合”,该组合将弱化甚至完全消除非系统性风险,因此市场组合或整个市场的非系统性风险为0。

(二) 系统性风险

系统性风险是指由于某种全局性的因素而对所有资产收益都产生影响的风险。这种风险主要源于宏观经济因素的变化,如利率、汇率的变化所产生的风险,因此又称宏观风险。

正由于系统性风险是通过宏观经济因素变化所导致的,因此它无法通过投资组合给予消除。对于某证券所面临的系统性风险的衡量,可以用该证券的收益率与市场收益率之间的 β 系数代表该证券的系统性风险。某证券 i 的 β 系数 β_i 是指该证券的收益率和市场收益率的协方差 σ_{iM} ,再除以市场收益率的方差 σ_M^2 ,即

$$\beta_i = \sigma_{iM} / \sigma_M^2 \quad (1-15)$$

对一个证券组合的 β 系数 β_p ,它等于该组合中各证券的 β 系数的加权平均,权数为各种证券的市值占该组合总市值的比重 X_i ,即

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n X_i \beta_i \quad (1-16)$$

β 值的判断标准是:如果某证券或证券组合的 $\beta=1$,其系统性风险与市场风险一致;如果其 $\beta>1$,该证券或投资组合的风险大于市场风险;如果其 $\beta<1$,则表明其系统性风险小于市场风险;当 $\beta=0$ 时,无系统性风险。

这里我们需要注意的是, β 值等于、大于还是小于市场风险,本身无好坏之分,要依据投资策略来判断。因为一方面理论上存在承担的风险越高,可能获得的收益越高;另一方面不同投资者(或机构)对风险的偏好(目标)不一样。若投资策略是追求风险价值,则其组合的 β 值应大于1,换言之,这种情况下, $\beta<1$ 或 $\beta=1$ 即可能是无效组合。本书后面的有关章节中还会对 β 的投资管理含义进一步阐述。

五、风险与收益的综合

以上分别界定了收益与风险,进一步,将风险与收益综合到一起,即可以帮我们在投资组合构建中进行资产选择。

(一) 风险溢价与资产选择

风险溢价,是指超过无风险资产收益的预期收益,这一溢价为投资的风险提供了补

^① 关于市场有效性理论,详见第五章。

偿。其中的无风险(risk-free)资产,是指其收益确定,从而方差为零的资产。一般以货币市场基金或者短期国债作为无风险资产的代表品。

如果投资者是风险厌恶者,为了保持其效用不变,要使其承担一定的风险,必须给予其更高的预期收益^①。换言之,一个风险厌恶的投资者,其行为方式将服从均值-方差标准(mean-variance criterion),即如果投资者是风险厌恶的,则其对于证券 A 和证券 B 的选择,当且仅当 $E(r_A) \geq E(r_B)$, 且 $\sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$ 成立时,投资者应选择证券 A 而放弃证券 B。这即是根据风险与收益的关系进行资产选择的原则之一。

(二) 变异系数

上述 A、B 两个资产的状态:资产 A 的收益大于资产 B 且资产 A 的风险小于资产 B,在现实市场中实际上是不多见的。当投资者进行资产选择的时候,更多的是要面对资产 A 的收益大于资产 B,但资产 A 的风险也大于资产 B,这个时候就要用到夏普教授所发明的变异系数。

所谓变异系数,也即夏普比率,是指每获得单位收益所承担的风险。即

$$\text{变异系数} = CV = \frac{\text{标准差}}{\text{预期收益率}} = \frac{\sigma}{E(r)} \quad (1-17)$$

夏普比率的值越大,表明获得单位收益所承担的风险越大,即该资产(或证券)越没有投资价值。夏普比率是我们进行资产选择的一个重要原则或指标。

例题 1-4 用变异系数评估理财产品

假定两个银行理财产品 A、B 的收益率和方差如表 1-3 所示。

表 1-3 A、B 理财产品的收益率和方差

项 目	理财产品 A	理财产品 B
收益率	0.05	0.07
方差	0.07	0.12

通过分别计算例题 1-4 中 A、B 两个理财产品的变异系数就可以从中选择出较优理财产品:

$$CV_A = \frac{0.07}{0.05} = 1.40 \quad CV_B = \frac{0.12}{0.07} = 1.71$$

由计算结果可见,理财产品 A 的变异系数低于理财产品 B,所以投资者可以选择理财产品 A 进行理财。



案例 1-5 期望收益率和方差的实际计算

这里我们用一个现实案例来演示期望收益率和方差的计算过程。如表 1-4 所示,三种市场状态出现的概率均为 1/3,资产为股票性基金和债券型基金。

^① 详见下一节关于投资者效用的界定。

表 1-4 三种市场状态的收益率

市场状态	概率/%	收益率/%	
		股票基金	债券基金
熊市	33.3	-7	17
正常	33.3	12	7
牛市	33.3	28	-3

最终计算结果如表 1-5 所示。

表 1-5 最终计算结果

市场状态	股票基金		债券基金	
	收益率/%	差平方/%	收益率/%	差平方/%
熊市	-7	3.24	17	1.00
正常	12	0.01	7	0.00
牛市	28	2.89	-3	1.00
期望收益率/%	11.00		7.00	
方差	0.020 5		0.006 7	
标准差/%	14.3		8.2	

计算过程如下。

1. 股票型基金的期望收益率

$$E(r_s) = \frac{1}{3} \times (-7\%) + \frac{1}{3} \times (12\%) + \frac{1}{3} \times (28\%)$$

$$E(r_s) = 11\%$$

即表 1-5 中“期望收益率”一行中的数据。

2. 债券型基金的期望收益率

$$E(r_B) = \frac{1}{3} \times (17\%) + \frac{1}{3} \times (7\%) + \frac{1}{3} \times (-3\%)$$

$$E(r_B) = 7\%$$

即表 1-5 中“期望收益率”一行中的数据。

3. 差平方

表 1-5 中,差平方一列中各结果的得到如下:

$$[(-7\%) - 11\%]^2 = 3.24\%$$

$$(28\% - 11\%)^2 = 2.89\%$$

$$(12\% - 11\%)^2 = 0.01\%$$

4. 方差

表 1-5 中,股票型基金的方差由下式得到

$$3.24\% \times \frac{1}{3} + 0.01\% \times \frac{1}{3} + 2.89\% \times \frac{1}{3} = 2.05\%$$

表 1-5 中债券型基金的方差同理可得即 0.006 7。

5. 标准差

对所求得方差开根号,即得到标准差,比如股票型基金的标准差:

$$\sqrt{0.0205} = 14.3\%$$

第二节 组合资产的收益和风险衡量

第一节研究了单一资产收益与风险的衡量,当我们考虑组合投资时,构建一个投资组合的基础性问题,即是要对该组合的收益和风险做到心中有“数”。此外,组合投资相对于单一资产投资的优势所在,以及产生这一优势的条件等,都是通过对资产组合的收益和风险的分析与计量得到的。

一、组合资产的收益

对组合资产的投资决策,不仅要考虑单个资产的收益和风险,而且要考虑资产组合作为一个整体的收益和风险,还需要决定对组合中的某一单独资产的投资比例。

资产组合的预期收益 $E(r_p)$ 是资产组合中所有资产预期收益的加权平均,其中的权重 x 为各资产投资占总投资的比率。公式为

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i) \quad (1-18)$$

式中, $i=1, 2, \dots, n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。

例题 1-5 计算组合期望收益率

假设以上海证券市场的三只股票构建投资组合,其基本情况如表 1-6 所示。

表 1-6 一个假设的组合

证券名称	中国国贸	钢联股份	华夏银行	组合
证券代码	600007	600010	600015	—
组合中股份	100	200	100	400
初始买入价(每股)/元	5.98	4.29	4.36	—
总投资/元	598	858	436	1 892
占组合比例/%	0.316	0.454	0.23	1
期望收益率/元	5	7	3	5.448

表 1-6 中的“初始买入价”分别是三只股票在某一交易日的收盘价;“期望收益率”分为两部分:一部分是三只股票各自的期望收益率,分别以三只股票的样本均值计算得到;另一部分是组合的期望收益率,是本题求解的结果。

解: 根据式(1-18), 该组合期望收益率 $= 0.316 \times 5\% + 0.454 \times 7\% + 0.23 \times 3\% = 5.448\%$ 。

对例题 1-5, 我们还存在两个问题需要解决。

其一, 组合中三只股票的股份分别为 100 股、200 股和 100 股, 根据三只股票各自的单价, 从而使其各自的投资额占组合总投资额的比例分别为 31.6%、45.4% 和 23%。那么, 这一比例, 或者说三只股票各自的购买量是依据什么确定的? 对这一问题的详细解答正是第二章马科维茨资产组合理论所要研究和解决的问题。我们这里只是根据一个简单的原则: 对预期收益较高的股票给出较高的投资比例。

其二, 在表 1-6 所示的组合中, 我们选择了“中国国贸”“钢联股份”和“华夏银行”三只股票, 为什么选择这三只股票? 或者说“选股”的依据是什么? 对这一问题的回答需要用到资本资产定价模型、基本分析方法、技术分析方法等。此外, 还有一个简单而明确的原则, 即下一节要讲到的相关系数问题。

案例 1-6 实际操作中组合收益率的计算——以华富保本混合型证券投资基金(000028)为例

选取华富保本混合型证券投资基金 2014.12.31—2015.12.31 数据, 对本资产组合前十大重仓持股以及持有债券进行分析。数据引自同花顺、基金网等。

1. 股票持仓明细

表 1-7 为该基金前十大重仓股持仓明细。

表 1-7 该基金前十大重仓股持仓明细

证券代码	证券名称	占净资产比例/%	期初市值/万元	持股数/万股	分红/万元	期末市值/万元	收益率/%
600089	特变电工	2.92	579.88	46.84	84.36	551.30	9.62
601299	中国北车	2.86	568.00	80.00	13.2	1 130.8	101.41
002094	青岛金王	2.51	499.46	45.99	0	1 432.59	186.82
600280	中央商场	2.17	432.00	30	0.9	335.1	-22.23
002146	荣盛发展	2.07	412.62	26	6.5	247.78	-38.38
600535	天士力	2.07	411.00	10	4.2	409.2	0.58
600976	健民集团	1.93	382.93	13.99	2.798	473.28	24.33
600108	亚盛集团	1.88	373.60	40	0.24	293.6	-21.35
601318	中国平安	1.88	373.55	5	1.75	180	-51.35
600196	复星医药	1.80	358.70	17	5.44	399.33	12.84

表 1-7 中的中国北车于 2015 年中旬与南车合并为中国中车, 转股比例为 1:1.10。

2. 债券持仓明细

表 1-8 为该基金债券持仓明细。

表 1-8 该基金债券持仓明细

证券代码	证券名称	占净资产比例/%	期初市值/万元	期末市值/万元	票面利率/%	收益率/%
1180038	11 锡盟债	10.38	2 065.40	2 143.70	7.62	11.41
140338	14 进出 38	9.66	1 920.60	1 958.19		1.92
098082	09 华西债	6.76	1 343.66	1 351.08	6.05	6.63
125089	深机转债	2.85	567.73	987.62	0.60	73.96
110023	民生转债	1.39	276.54	246.98		-10.69

表 1-8 中的 14 进出 38 债券于 2015 年 6 月到期,为平息债券,票面利率 3.94%。深机转债为可转债,2015 年 5 月 22 日,市价 221.100 元,这里按售出计算收益,没有计算转股后持有至 2015 年末。民生转债也是可转债,2015 年 6 月 24 日,市价 119.660 元,这里按售出计算收益,没有计算转股后持有至 2015 年年末。

基于股票和债券历史数据计算股票收益率,计算公式为

$$\frac{\text{期末市值} + \text{分红} - \text{期初市值}}{\text{期初市值}}$$

由此分别计算得出各股票收益率。

计算债券收益率,计算公式为

$$\frac{\text{期末市值} + \text{利息} - \text{期初市值}}{\text{期初市值}}$$

其中平息债券无利息项,可转债按转换日价值作为期末市值。

基于以上计算结果,分别计算股票组合与债券组合对总资产组合的收益贡献:

股票组合对总资产提供的收益贡献为 5.94%;债券组合对总资产提供的收益贡献为 3.38%。

上述两项计算结果是通过将股票收益、债券收益与相应的在总资产组合中的比重相乘得到。

二、资产组合的风险

正如对资产组合收益的计算一样,资产组合的方差也不是组合中各资产方差的简单加权平均,而是资产组合的收益与其预期收益偏离数的平方,即

$$\sigma_p^2 = E[r_p - E(r_p)]^2 \quad (1-19)$$

式中, r_p 为资产组合的收益率。

如果是由两个资产构建一个投资组合,则该组合的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{1,2} \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \quad (1-20)$$

由 n 个资产构成的组合,计算该组合方差的一般公式为

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{cov}(x_i, x_j), \quad i \neq j \quad (1-21)$$

式中, $\text{cov}(x_i, x_j)$ 为资产 i 与资产 j 之间的协方差,对此将在下一节给予详细讨论。式(1-21)表明,资产组合的方差是资产各自方差与它们之间协方差的加权平均。

例题 1-6 计算组合方差

假设由两项资产构成投资组合, $x_1 = 0.25, \sigma_1 = 0.20, x_2 = 0.75, \sigma_2 = 0.18$, 且 $\sigma_{12} = 0.01$, 计算该组合的方差。

根据式(3-20)有

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 0.25^2 (0.20)^2 + 0.25(0.75)(0.01) + 0.75^2 (0.18)^2 + 0.75(0.25)(0.01) \\ &= 0.0245 \end{aligned}$$

对例题 1-6 做进一步的分析。由题中的已知条件可见,资产 1 的方差 $\sigma_1^2 = 0.04$, 资产 2 的方差 $\sigma_2^2 = 0.0324$; 而我们所计算的投资组合的方差 $\sigma_p^2 = 0.0245$ 。可见组合投资有利于降低投资风险。但这一结果的取得还有赖于一个前提性条件,即资产之间的相关系数。

三、协方差与相关系数

所谓协方差,即两个或更多的随机变量之间的相互依赖关系。设 x_1, x_2 为两个随机变量,其均值分别为 $E(x_1)$ 和 $E(x_2)$, 则两变量之间的协方差被定义为

$$\text{cov}(x_1, x_2) = E[(x_1 - E(x_1)) \times (x_2 - E(x_2))] \quad (1-22)$$

经过简单推导,可以得到式(1-22)的一个替代公式:

$$\text{cov}(x_1, x_2) = E(x_1 x_2) - E(x_1)E(x_2) \quad (1-23)$$

通常以 σ_{12} 表示两个资产之间的协方差。

协方差所告诉我们的信息是: 如果 $\sigma_{12} = 0$, 即两资产为不相关的随机变量; 如果 $\sigma_{12} > 0$, 则两随机变量正相关, 此时如果一个随机变量高于均值, 则另一个随机变量也高于均值; 如果 $\sigma_{12} < 0$, 则两个随机变量负相关。协方差: 资产的相关性如图 1-8 所示。

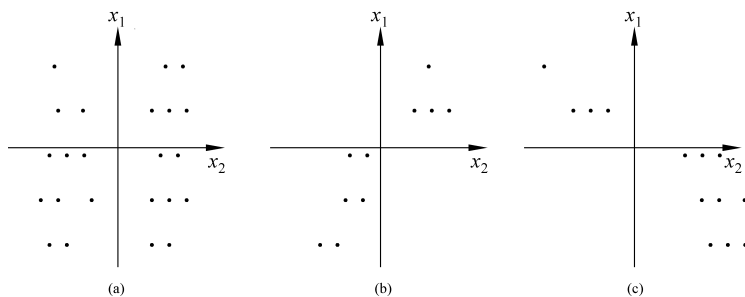


图 1-8 协方差: 资产的相关性

图 1-8 以两个随机变量 x_1 和 x_2 为例, 显示了协方差所表明的随机变量之间的相关性。其中图 1-8(a)表明的是 $\sigma_{12} = 0$; 图 1-8(b)表明的是 $\sigma_{12} > 0$; 图 1-8(c)则表明的是 $\sigma_{12} < 0$ 。

协方差的一个重要界限是,两个随机变量的协方差满足

$$|\sigma_{12}| \leq \sigma_1 \sigma_2 \quad (1-24)$$

这一不等式表明,如果 $\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2$, 表明两个随机变量完全正相关;如果 $\sigma_{12} = -\sigma_1 \sigma_2$, 表明两个随机变量完全负相关。

协方差描述了两个随机变量之间的相关状态,即是正相关、负相关,还是零相关,但它却不能说明变量之间的相关程度。相关系数反映两个随机变量的联系程度,其计算公式为

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (1-25)$$

式中, ρ_{ij} 为资产 i 与 j 的相关系数。

由协方差的计算公式可以得到,相关系数的取值为: $+1 \geq \rho_{ij} \geq -1$ 。正号表示正相关,负号表示负相关; $\rho_{ij} = 1$ 时为两个资产完全正相关, $\rho_{ij} = -1$ 时两个资产完全负相关, $\rho_{ij} = 0$ 时两个资产不相关。

不同资产之间的相关系数对资产组合的风险有重大影响。如果由两个资产构成一个资产组合,则该组合的方差可表述为

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \quad (1-26)$$

其中, ρ_{12} 为两个资产的相关系数。

由式(1-26)可见,如果两个资产的权重及其各自的方差既定不变, ρ_{12} 越大,则 σ_p^2 越大;反之则相反。这说明,资产的相关度越高,资产组合的风险越大;或者说,选择相关度小的资产组合,可降低投资风险。

例题 1-7 计算相关系数

根据例题 1-6 的数据,该组合中两资产的相关系数为

$$\rho_{12} = 0.01 / (0.2 \times 0.18) = 0.278$$

可见,虽然两资产的相关系数为正,但趋近于 0,从而才导致例题 1-6 的组合风险低于单个的资产风险这一结果。这也就回答了例题 1-5 所提出的问题:选择“中国国贸”“钢联股份”和“华夏银行”三只股票构成该例题的组合,其“选股”的依据即是较低的相关系数——越是行业跨度大的资产,其相关系数越低。



案例 1-7 资产组合的收益率和风险

在案例 1-5 的基础上,来看股票型基金和债券型基金各占 50% 的资产组合如何平衡风险与收益。基础数据如表 1-9 所示。

表 1-9 基础数据

%

市场状态	股票基金		债券基金	
	收益率	差平方	收益率	差平方
熊市	-7	17	5.0	0.160
正常	12	0.02	7	0.32
牛市	28	2.15	-3	0.19

续表

市场状态	股票基金		债券基金	
	收益率	差平方	收益率	差平方
期望收益率/%	13.33		1.33	
方差	0.007 2		0.001 7	
标准差/%	8.5		4.1	

计算过程如下。

1. 组合的收益率

资产组合的收益率由其中股票和债券两只基金的预期收益率加权而来,即

$$r_P = w_B r_B + w_S r_S$$

比如在牛市情况下(表 1-10):

表 1-10 牛市情况下基础数据

市场状态	收益率/%			
	股票基金	债券基金	投资组合	差平方
熊市	-7	17	5.0	0.160
正常	12	7	9.5	0.003
牛市	28	-3	12.5	0.123
期望收益率/%	11.00	7.00	9.00	
方差	0.020 5	0.006 7	0.001 0	
标准差/%	14.3	8.2	3.08	

表 1-10 中,牛市情况下投资组合的收益率:

$$50\% \times (28\%) + 50\% \times (-3\%) = 12.5\%$$

而资产组合的预期收益率由其中的基金的预期收益率加权而来:

$$E(r_P) = w_B E(r_B) + w_S E(r_S)$$

即:

$$50\% \times (11\%) + 50\% \times (7\%) = 9\%$$

2. 组合的风险

两种风险资产组合的收益率方差为

$$\sigma_P^2 = (w_B \sigma_B)^2 + (w_S \sigma_S)^2 + 2(w_B \sigma_B)(w_S \sigma_S) \rho_{BS}$$

其中, ρ_{BS} 是股票和债券的收益率之间的相关系数,本案例中假设等于-0.999。由最终的计算结果可以看到:就收益的排名,股票基金最高,投资组合其次,债券基金最低;就风险而言,股票基金最大,债券基金其次,而投资组合最小。综合而言可得到如下结论:资产组合的最大效用就在于,在相同收益(或收益下降不大)的情况下,承担了最低的风险。



要研究长期投资,首先来考虑一个简单的例子:假如一位投资者今天有1元钱,计划投资25年,现在有两种投资方案,一种是投资于股票组合(获得的股利进行再投资),该股票组合的月收益率为1%,25年后他将获得 $(1+0.01)^{300}=19.79$ (元),增长率为1879%。另一种投资方案是,将1元钱投资于月收益率为0.5%的无风险的25年期国债,投资的终值为 $(1+0.005)^{300}=4.46$ (元)。可以看出0.5%的月风险溢价会使股票投资的总收益比无风险国债多近6倍,这就是复利的作用。从图1-9可以看出,投资时间越长,两种投资方案的收益差值就越大。按照这种逻辑,我们应该都选择投资股票而不是国债,然而现实中不是所有人都去投资股票,也有人去投资国债,这主要是因为投资是一个收益与风险的权衡过程。一个长期收益率的投资风险较难理解,因此对它的刻画十分重要。

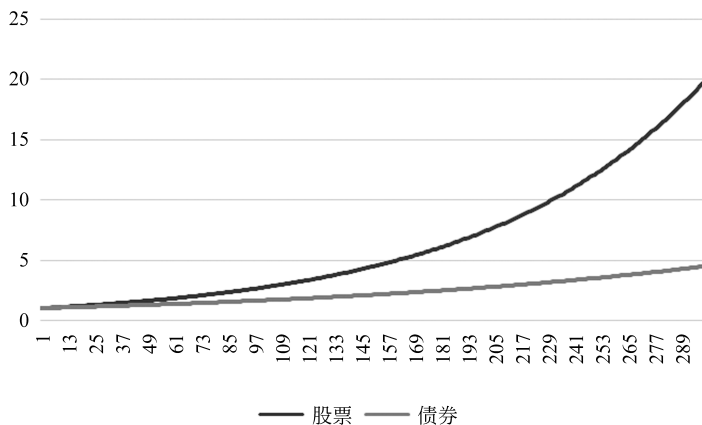
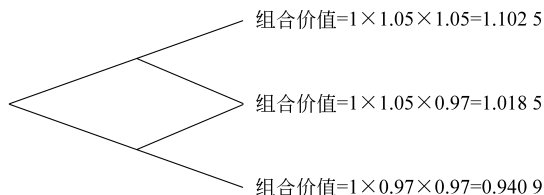


图 1-9 股票组合与国债收益率

1. 构造投资终值的概率分布

如果收益率的分布可以用正态分布拟合,那么就可以用收益率的标准差来描述长期投资的风险。因此,首先要构造出长期投资回报的概率分布,验证其是否符合正态分布。

用二叉树来构造一个股票投资终值的概率分布,在这里我们以复利计算终值。假设股票组合的月收益率50%的可能性是5%,50%的可能性是-3%。这种构造的月期望收益是1%,其风险用月收益标准差来衡量是 $\sqrt{0.5 \times (5-1)^2 + 0.5 \times (-3-1)^2} = 4\%$ 。2个月后的二叉树如下所示:



^① 此阅读资料主要取材于博迪,凯恩,马库斯. 投资学[M].10版. 北京:机械工业出版社,2017.

300 个月后二叉树会产生 301 种不同的可能结果,而每种结果的概率可以通过 Excel 中的 BINOMDIST 函数来获得。由此计算得到期末终值的均值为 19.79,标准差为 17.10。

图 1-10 是投资回报的概率分布,从图中可以明显看出分布的非对称性。因此,该分布不满足正态分布,说明用标准差来度量长期投资的风险并不适用。事实上,以复利计算多期二项分布的终值时,其收敛于对数正态分布,对数正态分布描述的是变量在取对数后服从正态分布。如图 1-11 所示,当我们对投资回报取对数后,可以明显看出其概率分布具有对称性。

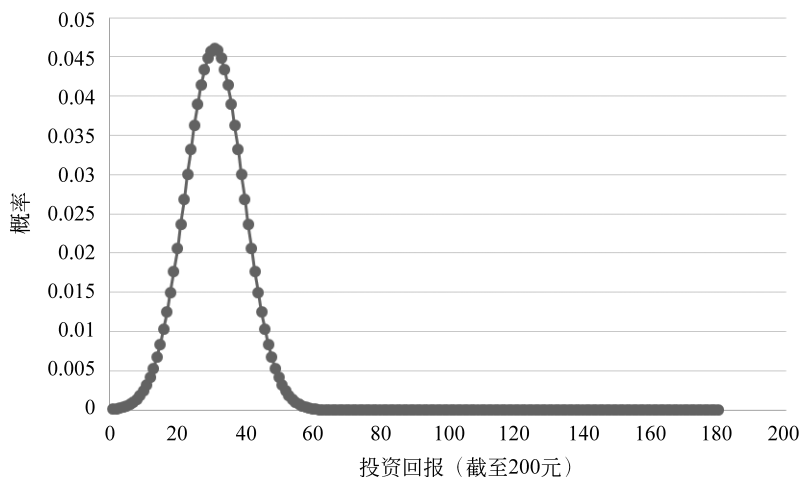


图 1-10 投资回报的概率分布

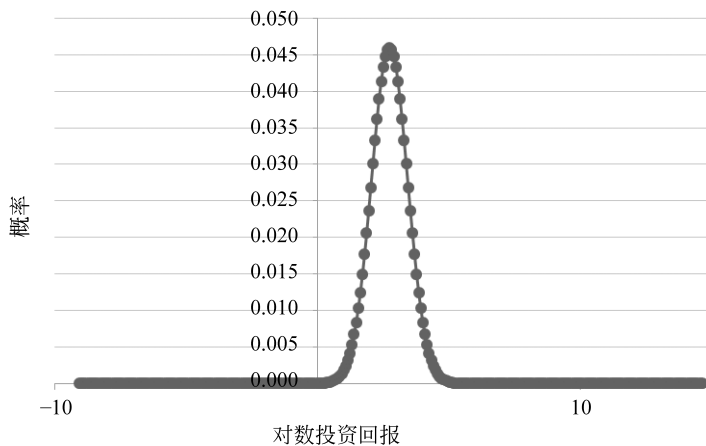


图 1-11 对数投资回报概率分布

2. 正态分布与对数分布

正态分布的一个重要特性是它的稳定性,即服从正态分布的收益加和后的结果依然服从正态分布,但是这一特性不适用于正态分布收益的乘积。例如,两个时段的实际收益率 r_1 和 r_2 均为正态分布,但是这两个时段的总收益率 $(1+r_1)(1+r_2)-1$ 不是正态分布。

因此正态分布不能用来描述按复利计算的长期收益率分布,但是对数正态分布可以。

对数正态分布是指当一个随机变量 X , 其对数 $\ln(X)$ 服从正态分布, 则该随机变量 X 服从对数正态分布。从短期来看对数正态分布, 因为与正态分布非常接近, 但长期来看, 对数正态分布向上分布的数值更多一些。如果在一个极短时段内股票价格服从正态分布, 即在一个极短时段收益呈正态分布, 那么在一个较长时段股票的复利收益以及未来的股票价格服从对数正态分布。反过来, 如果股票价格服从对数正态分布, 其连续复利收益^①服从正态分布。因此不管时间多长, 连续复利收益都服从正态分布, 如果我们采用连续复利收益率而非实际收益率, 就可以利用正态分布带来的种种简化。

下面来研究一下, 当股票价格服从对数正态分布时可以得出什么样的规律。假设股票价格服从对数正态分布, 其对数服从预期年化增长率为 g 、标准差为 δ 的正态分布。由于股票价格的分布是非对称的, 所以当收益受到随机冲击时, 股价的变化是非对称的。一个正向的向上冲击提高了股价, 则下一个冲击较上一个大。同理, 一个负向冲击降低了股价, 下一个冲击则较小。这样, 一连串的正向冲击将有一个较大的上行影响, 一连串的负向冲击将产生较大的下行影响。因此即便当预期年化增长率 $g=0$ 时, 随机冲击也会推动股价变化, 这部分变化恰好等于其方差的一半。这样连续复利收益率 m 将大于 g , 预期的年化连续复利收益率等于

$$E(r_{cc}) = m = g + \frac{1}{2} \delta^2 \quad (1-27)$$

预期期初财富 W_0 复利到期末, 终值为 $W_0 e^{g + \frac{1}{2} \delta^2} = W_0 e^m$ 。因此预期实际利率等于

$$E(r) = e^{g + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 = e^m - 1 \quad (1-28)$$

如果将年化连续复利收益率用于一项期限为 T 的投资, 不管 T 是大于或小于 1 年, 该投资的实际利率等于

$$r(T) = e^{r_{cc} T} - 1 \quad (1-29)$$

预期累计收益率 $r_{cc} T$ 与 T 成比例, 即 $E(r_{cc} T) = mT = \left(g + \frac{1}{2} \delta^2\right) T$, 则预期的期末财富为

$$E(W_r) = W_0 e^{mT} = W_0 e^{\left(g + \frac{1}{2} \delta^2\right) T} \quad (1-30)$$

累计收益率的方差与时段长度成比例, 即 $\text{Var}(r_{cc} T) = T \text{Var}(r_{cc})$, 其标准差与时段长度呈平方根的关系, 即

$$\delta(r_{cc} T) = \sqrt{T \text{Var}(r_{cc})} = \delta \sqrt{T} \quad (1-31)$$

式(1-31)提供了降低长期投资风险的途径, 因为预期收益与时段长度成比例增长, 而标准差增长的速度较慢, 因此长期风险投资的预期收益相对于标准差增长得更快。那么预期损失是否也会随着期限的增加而下降, 这一问题我们在下面进行探究。

3. 短期和长期收益损失风险

通过一个例子来探究这个问题。假设股票的预期月收益率为 1%, 那么其连续复利

① 连续复利收益公式 $r_{cc} = \ln(1+r)$, r 为实际收益率。

收益率等于 $\ln(1.01)=0.009\ 95$ (即每月 0.995%)。假设无风险月度收益率为 0.5%,那么其连续复利收益率 $\ln(1.005)=0.498\ 8\%$ 。股票的实际收益率标准差为 4.54%,则在连续复利下月度标准差^①为 4.492 8%。因此连续复利的风险溢价为 $0.995-0.498\ 8=0.496\ 2\%$,标准差等于 4.492 8%,夏普比率等于 $0.496\ 3/4.492\ 8=0.11$ 。换句话说,当股票的收益较均值低 0.11 倍的标准差时,股票组合的绩效低于无风险资产。满足正态分布时,我们发现股票组合的绩效低于无风险资产的概率为 45.6%(在 Excel 的 NORMSDIST 公式输入 -0.11 可得)。这是投资者的后悔概率,这种情况下,投资者宁愿投资于短期国库券而非股票。

如果投资期为 300 个月,累计超额收益高达 $0.496\ 3\% \times 300=148.9\%$,标准差为 $4.492 \times \sqrt{300}=77.82$,意味着夏普比率高达 1.91。在 NORMSDIST 公式中输入 -1.91,你会发现 300 个月期间投资者的收益损失概率^②仅为 0.029。

然而损失的概率并不是一种完善的投资风险度量方法。这个概率不考虑潜在损失的大小,而一些可能损失虽然发生概率小,却意味着完全破产。25 年投资的最大损失要比 1 个月投资的最大损失大得多。

一个更好地度量长期投资风险的方法是用可以抵御损失的保险的市场价格。这种保险的保费必须考虑到损失的可能性和损失的大小。尽管一个投资组合的保险兑现赔偿的概率很低,但是可能损失的金额和时机会使这样的保险需要较高的保费。现实中,与期限越长损失风险越小的结论相反,在市场上期限越长的保险保费更高,这是因为长期的最大损失要远比短期的最大损失大得多。

第三节 效用价值与投资者的风险偏好

在对 β 值的研究中曾提到,不同投资者有不同的风险偏好。原则上,可以依据投资者对风险的态度,将投资者分为风险厌恶(risk averse)型、风险中性(risk-neutral)和风险偏好(risk lover)型三种类型。本节从效用价值和确定性等价的概念入手,对投资者的风险偏好进行研究。

一、效用价值与确定性等价利率

衡量一项投资或投资组合的效用,即是观察其风险与收益的匹配状态:在风险一定的情况下,预期的收益越高,该投资或资产组合的效用价值越大;而其收益波动性越强的投资或资产组合,效用值就越低。

给定预期收益为 $E(r)$,收益波动性(方差)为 σ^2 ,则资产组合的效用价值为

$$U = E(r) - 0.005A\sigma^2 \quad (1-32)$$

式中, U 为效用价值; A 为投资者的风险厌恶指数;系数 0.005 是一个按比例计算的方法,这使得我们可以将预期收益和标准差表述为百分比而不是表示为小数。公式表明,高预

① 当实际收益率 r 呈对数正态分布时, $\text{Var}(r) = e^{2m}(e^{\sigma^2} - 1)$ 。

② 股票投资组合收益率低于无风险资产,这种情况有时被称为收益损失。

期收益会提高效用,而高波动性(风险)将降低效用。

可以将效用价值与无风险投资的报酬率进行比较,以确定风险投资与安全投资之间的选择,即将风险投资的效用看作投资者的确定性等价的收益率。一个资产组合的确定性等价的利率(certainty equivalent rate)是为使无风险投资与风险投资具有相同吸引力而确定的无风险投资的报酬率。

例题 1-8 效用函数的计算

如果某股票的期望收益率为 7%,方差 σ^2 为 78.69%,假定无风险利率为 4%。如果某投资者 A 的风险厌恶指数为 8,而另一投资者 B 的风险厌恶指数为 6。请问这两个投资者该如何进行投资(资产)选择?

解: 根据式(1-32)给出的投资者效用价值公式,对投资者 A 来说,如果他投资者于例题中所给的股票,则其效用值为

$$U_A = 7 - (0.005 \times 8 \times 78.69) = 3.85$$

可见,对该股票的投资收益低于无风险报酬率,即投资者 A 应放弃股票投资而选择对无风险资产的投资。

对投资者 B 来说,其投资于股票的效用值为

$$U_B = 7 - (0.005 \times 6 \times 78.69) = 4.64$$

即收益高于无风险报酬率,投资者 B 就会选择投资于股票。

二、投资者的风险偏好类型

由式(1-32)可见,方差(即风险)与效用价值负相关,即风险越大,投资组合给投资者的效用越低;式(1-32)还表明,风险减少效用的程度取决于投资者的风险厌恶指数 A。

一个风险厌恶型的投资者,其为补偿所承担的风险,会按一定比例降低投资组合的预期收益,从而将降低组合的效用价值。换言之,对风险厌恶的投资者来说,为了保持其效用不变,要使其承担一定的风险,必须给予其更高的预期收益。也就是说,风险厌恶型的投资者,其风险与收益是正相关的。从确定性等价利率的角度看,如果风险溢价等于 0,即风险投资的收益率减去无风险投资的收益率等于 0,则风险厌恶型投资者的确定性等价报酬率将低于无风险投资报酬率。

一个风险中性的投资者只按预期收益率来衡量组合的效用,即风险(方差)因素与其投资组合所带来的效用无关。换言之,对风险中性的投资者来说,资产组合的确定性等价报酬率就是预期收益率。

风险偏好型在其效用中加入了风险的“乐趣”,即风险的增加提高了投资组合的效用。换言之,风险爱好者的预期收益与风险之间是负相关的:即便预期收益有所下降,他也愿意承担更大的风险。从另一角度来看,即便风险溢价等于 0,风险爱好者的确定性等价报酬率也高于无风险投资报酬率。



阅读资料1-2

Kelly 准则

考虑一个单期投资计划,该计划只有两种可能的回报:正的超额收益 b ,概率为 p ;负的超额回报 $-a$,概率为 $q=1-p$ 。投资者计划的投资金额是 y ,剩余资金投资于无风险资产,其总收益是 $1+r+by$,概率为 p ,或者 $1+r-ay$,概率为 q 。Kelly 准则使用的是对数效用函数,因此期望效用为

$$E[U(y)] = p \ln(1+r+by) + q \ln(1+r-ay)$$

对该效用函数求最大化问题便是 Kelly 准则。得到风险资产所占的比例:

$$y = (1+r) \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b} \right)$$

根据该准则,当 p 和 b 值较大时投资者应该更多地投资于该计划,当 q 和 a 值较大时,投资者投资得更少。因为当回报和损失相等时,即 $a=b$, $y=(1+r)(p-q)/a$,回报或损失较大时,投资的比例越低。无风险利率越高,投资比例越高。

三、风险厌恶型投资者的无差异曲线

一般而言,假定一个理性的投资者是风险厌恶型。为了描述风险厌恶型投资者的效用最大化,可给出风险厌恶型投资者的无差异曲线,这也是马科维茨组合理论确定最优资产组合的工具之一。

(一) 投资者无差异曲线

在投资组合理论中,效用函数代表着投资者偏好。投资者的目标是投资效用最大化,而投资效用则如式(1-32)所示,取决于投资的预期收益率和风险。该效用函数可以通过在预期收益率-风险平面上以无差异曲线族表现出来。

资本市场的无差异曲线表示在一定的风险和收益水平下(即在同一曲线上),投资者对不同资产组合的满足程度是无区别的,即同等效用水平曲线,如图 1-12 所示。图中,纵轴 $E(r)$ 表示预期收益,横轴 σ 为风险水平。

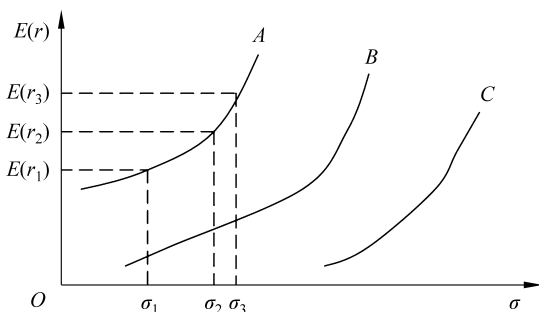


图 1-12 风险厌恶型投资者的无差异曲线

(二) 风险厌恶型投资者无差异曲线的特点

风险厌恶型投资者无差异曲线具有以下特点。

(1) 斜率为正,即为了保证效用相同,如果投资者承担的风险增加,则其所要求的收益率也会增加。对于不同的投资者其无差异曲线斜率越陡峭,表示其越厌恶风险,即在一定风险水平上,为了让其承担等量的额外风险,必须给予其更高的额外补偿;相反,无差异曲线越平坦表示其风险厌恶的程度越小。

(2) 下凸^①。这意味着随着风险的增加要使投资者再多承担一定的风险,其期望收益率的补偿越来越高。如图 1-12 所示,在风险程度较低时,当风险上升($\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$),投资者要求的收益补偿为 $E(r_2) - E(r_1)$;而当风险进一步增加,虽然是较小的增加($\sigma_2 \rightarrow \sigma_3$),收益的增加都要大幅上升为 $E(r_3) - E(r_2)$ 。这说明风险厌恶型投资者的无差异曲线不仅是非线性的,而且该曲线越来越陡峭。这一现象实际上是边际效用递减规律在投资上的表现。

(3) 不同的无差异曲线代表着不同的效用水平。越靠左上方,无差异曲线代表的效用水平越高,如图 1-12 中的 A 曲线。这是由于给定某一风险水平,越靠上方的曲线其对应的期望收益率越高,因此其效用水平也越高;同样,给定某一期望收益率水平,越靠左边的曲线对应的风险越小,其对应的效用水平也就越高。此外,在同一无差异曲线图(即对同一个投资者来说)中,任两条无差异曲线都不会相交。



案例 1-8 无差异曲线的数字计算

为了理解如何构造无差异曲线,考虑风险厌恶指数 $A=4$ 的一个投资者,他目前全部投资于无风险组合,收益率 $r_f=5\%$ 。因为这个组合的方差为零,效用价值的公式表明它的效用为 $U=0.05$ 。当投资者投资于 $\sigma=1\%$ 的风险组合时,为了获得相同的效用,其期望收益必须上升,以弥补更高的 σ 值:

$$U = E(r) - 1/2 \times A \sigma^2 \quad (1-33)$$

$$E(r) - 1/2 \times 4 \times 0.01^2 = 0.05$$

这说明必要的期望收益为

$$E(r) = 0.05 + 1/2 \times A \sigma^2 = 0.05 + 1/2 \times 4 \times 0.01^2 = 0.0502$$

对于不同的 σ 重复这样的计算,可以得到保证效用函数为 0.05 所需的 $E(r)$ 。这个过程将得到效用水平为 0.05 时所有期望收益和风险的组合,把这些组合描点在图上便得到无差异曲线。

可以使用 Excel 表格来生成投资者的无差异曲线。表 1-11 包含了效用值分别为 0.05 和 0.09 对于风险厌恶指数分别为 $A=2$ 和 $A=4$ 的两个投资者的风险和收益的组合。

图 1-13 描绘了与 $A=2$ 和 $A=4$ 对应的期望收益率和标准差组合,截距分别为 0.05 和 0.09,对应曲线的效用水平。

^① 如果无差异曲线凸向原点,即风险与收益反相关,表明投资者为风险偏好型;风险中性投资者的无差异曲线则为水平线。

表 1-11 无差异曲线的数字计算

σ	$A=2$		$A=4$	
	$U=0.05$	$U=0.09$	$U=0.05$	$U=0.09$
0.00	0.050 0	0.090 0	0.050	0.090
0.05	0.052 5	0.092 5	0.055	0.095
0.10	0.060 0	0.100 0	0.070	0.110
0.15	0.072 5	0.112 5	0.095	0.135
0.20	0.090 0	0.130 0	0.130	0.170
0.25	0.112 5	0.152 5	0.175	0.215
0.30	0.140 0	0.180 0	0.230	0.270
0.35	0.172 5	0.212 5	0.295	0.335
0.40	0.210 0	0.250 0	0.370	0.410
0.45	0.252 5	0.292 5	0.455	0.495
0.50	0.300 0	0.340 0	0.550	0.590

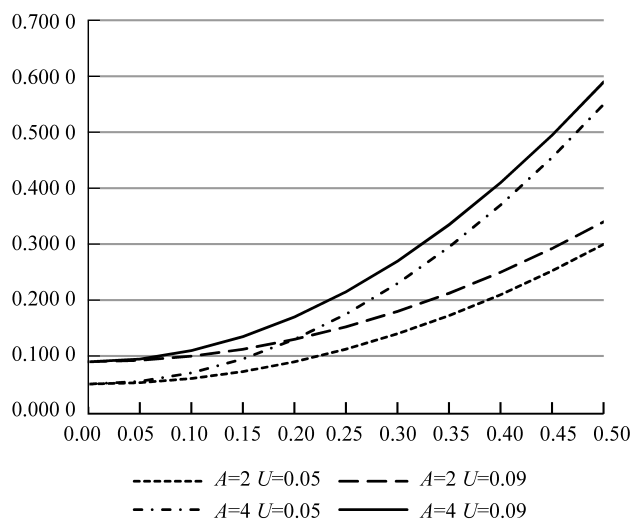


图 1-13 效用曲线

上述结果的计算过程如下:

$$\text{必要的期望收益 } E(r) = 0.05 + 1/2 \times A \times \sigma^2 = 0.05 + 1/2 \times 2 \times 0.01^2 = 0.050\ 1$$

$$\text{必要的期望收益 } E(r) = 0.05 + 1/2 \times A \times \sigma^2 = 0.05 + 1/2 \times 4 \times 0.01^2 = 0.050\ 2$$

$$\text{必要的期望收益 } E(r) = 0.09 + 1/2 \times A \times \sigma^2 = 0.09 + 1/2 \times 2 \times 0.01^2 = 0.090\ 1$$

$$\text{必要的期望收益 } E(r) = 0.09 + 1/2 \times A \times \sigma^2 = 0.09 + 1/2 \times 4 \times 0.01^2 = 0.090\ 2$$

假定任何投资者都愿意投资于更高的无差异曲线上的组合, 获得更高的效用。更高的无差异曲线上的投资组合在给定风险水平上能够提供更高的期望的收益。例如, $A=2$

的两条无差异曲线形状相同,但是对于任意水平的风险,效用为 0.09 的那条曲线比效用为 0.05 的那条曲线的期望收益高 4%。

表 1-11 中的第 4 列和第 5 列对风险厌恶指数更高($A=4$)的投资者重复了上述分析。图 1-13 反映出更高风险厌恶程度投资者的无差异曲线比低风险厌恶程度投资者的曲线更陡峭。更陡峭的曲线意味着投资者需要更多的期望收益来补偿同样的组合风险。

更高的无差异曲线意味着对应更高的效用水平,因此投资者更愿意在更高的无差异曲线上寻找投资机会,但这要受到可行集和资本配置线的制约^①。



本章小结

投资学的一个基本指导理念是风险与收益的最优匹配。当风险与收益达到最优匹配状态时,一项投资或投资组合给投资者的效用就越高。在风险一定的情况下,预期的收益越高,该投资或资产组合的效用价值越大;而收益波动性越强的投资或资产组合,其效用价值越低。给定预期收益为 $E(r)$, 收益波动性为 σ^2 , 则资产组合的效用价值为

$$U = E(r) - 0.005A\sigma^2$$

上式表明,高预期收益会提高效用,而高波动性(风险)将降低效用。上式还表明,风险减少效用的程度取决于投资者的风险厌恶指数 A 。一个风险厌恶型的投资者,其为补偿所承担的风险,会按一定比例降低投资组合的预期收益,这将降低组合的效用价值。也就是说,风险厌恶型的投资者,其风险与收益是正相关的。

风险厌恶型投资者的无差异曲线,是马科维茨组合理论确定最优资产组合的工具之一。资本市场的无差异曲线表示在一定的风险和收益水平下(即在同一曲线上),投资者对不同资产组合的满足程度是无区别的,即同等效用水平曲线。

进一步,需要对影响投资者效用的风险与收益两个因素给予明确的量化。对单一资产或证券的收益和风险的衡量,是计量投资组合的收益与风险的基础。就收益方面而言,对资产收益的估计可用数学期望方法进行,即对每一收益率的估计都给出其实现的概率,再对各收益率及其概率加权平均。

就风险而言,一般将投资风险定义为实际收益对预期收益的偏离,数学上可用预期收益的方差来衡量。方差或标准差越大,随机变量与数学期望的偏离越大,风险就越大。

在实际投资中,大多数投资者都会考虑组合投资。对组合资产的投资决策,不仅要考虑单个资产的收益和风险,还要考虑资产组合作为一个整体的收益和风险。

资产组合的预期收益 $E(r_p)$ 是资产组合中所有资产预期收益的加权平均,其中的权重 x 为各资产投资占总投资的比率。

正如对资产组合收益的计算一样,资产组合的方差也不是组合中各资产方差的简单加权平均,而是资产组合的收益与其预期收益偏离数的平方。

协方差的一个重要界限,是两个随机变量的协方差满足

$$|\sigma_{12}| \leq \sigma_1 \sigma_2$$

^① 详见下一章。

这一不等式表明,如果 $\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2$, 表明两个随机变量完全正相关; 如果 $\sigma_{12} = -\sigma_1 \sigma_2$, 表明两个随机变量完全负相关。

相关系数反映两个随机变量的联系程度,其取值为 $+1 \geq \rho_{ij} \geq -1$ 。正号表示正相关,负号表示负相关;当 $\rho_{ij} = 1$ 时为两个资产完全正相关,当 $\rho_{ij} = -1$ 时为完全负相关,当 $\rho_{ij} = 0$ 时两个资产不相关。不同资产之间的相关系数对资产组合的风险有重大影响,即资产的相关度越高,资产组合的风险越大。或者说,选择相关度小的资产组合,可降低投资风险。

投资组合所面对的风险还可进一步分为系统性风险和非系统性风险两类。非系统性风险是由个别上市公司或其他融资主体的特有情况所造成的风险,这一风险只与该公司本身的情况有关,而与整个市场无关,也称为微观风险。

而所谓系统性风险,就是指由于某种全局性的因素而对所有资产收益都产生影响的。这种风险主要源于宏观经济因素的变化,因此又称为宏观风险。

对于某证券所面临的系统性风险的衡量,可以用该证券的收益率与市场收益率之间的 β 系数来进行。某证券的 β 系数 β_i 是指该证券的收益率和市场收益率的协方差 σ_{iM} ,再除以市场收益率的方差。

对一个证券组合的 β 系数 β_p ,它等于该组合中各证券的 β 系数的加权平均,权数为各种证券的市值占该组合总市值的比重 X_i 。

β 值的判断标准是,如果某证券或证券组合的 $\beta = 1$,其系统性风险与市场风险一致;如果其 $\beta > 1$,该证券或投资组合的风险大于市场风险;如果其 $\beta < 1$,则表明其系统性风险小于市场风险;当 $\beta = 0$ 时,无系统性风险。

练 习 题

一、名词解释

1. 持有期收益率
2. 几何平均持有期收益率
3. 必要收益率
4. 风险溢价
5. 非系统性风险
6. 系统性风险
7. 厌恶型投资者

二、简答题

1. 简述风险与收益的最优匹配。
2. 如何判断系统性风险?
3. 简述风险厌恶型投资者效用曲线的特点。

三、计算题

1. 假定投资于某股票,初始价格为 100 元/股,持有期为 1 年,现金红利为 4 元/股,预期该股票价格在不同市场状态下有表 1-12 所示的三种可能,求各种可能下的收益率,并

求该股票的期望收益和方差。

表 1-12 三 种 可 能

市场状态	牛市	正常运行	熊市
概率	0.25	0.50	0.25
期末价/(元/每股)	15	12	7

2. 假设由两项资产构成投资组合, $x_1=0.40, \sigma_1=0.30, x_2=0.60, \sigma_2=0.20$, 且 $\sigma_{12}=0.01$, 计算该组合的方差及两资产的相关系数, 并对计算结果进行简要分析。

3. 假设小王以 3 只股票构建投资组合, 其基本情况如表 1-13 所示。计算该组合的期望收益率。

表 1-13 3 只股票的基本情况

组合中的证券	股票 A	股票 B	股票 C	组合
组合中股份	1 000	2 000	1 000	4 000
初始买入价(每股)/元	7.23	6.55	6.67	—
期望收益率/%	6	8	7	?

4. 假设有 A、B、C 三种证券可供选择, 它们的期望收益率分别为 12.5%、25%、10.8%, 标准差分别为 6.31%、19.52%、5.05%, 问这三种证券进行投资选择的次序。

四、分析题

什么是系统性风险? 如何衡量系统性风险? 其判断标准是什么? 在依据其标准进行判断时有什么注意事项?

即 测 即 练

