第 3 章

矩阵的初等变换及应用

Elementary Operations on Matrices and Applications

在前两章中，我们利用行列式研究了线性方程组的解的存在唯一性(克莱姆法则)，给出了判断一个矩阵是否可逆的充分必要条件及求逆矩阵的方法(伴随矩阵法)。然而，用行列式求解线性方程组时，会遇到很多局限，如：未知量的个数和方程的个数必须相等；系数行列式不能为零；随着未知量的个数增多，行列式的阶数会相应增大，计算量会陡增，等等。此外，在利用伴随矩阵求一个矩阵的逆矩阵时，也同样会遇到行列式的计算量陡增的情况。面对这些不可避免的困难，在实际应用中通常采用矩阵的初等变换法解决此类问题。

矩阵的初等变换是矩阵理论中一种重要的运算，它可以用于简化矩阵的形式，进而解决求矩阵的秩、求矩阵的逆、求解线性方程组等众多与线性代数相关的问题。本章首先引入初等变换和初等矩阵的定义及性质；作为初等变换的应用，随后介绍如何使用初等变换简化矩阵的形式，求矩阵的逆和秩，以及如何求解线性方程组。

3.1 初等变换与初等矩阵 | *Elementary operations and elementary matrices*

3.1.1 矩阵的初等变换 | *Elementary operations on matrices*

初等代数中用消元法求解二元、三元线性方程组时，常需要对线性方程组进行同解变形，即：

(1) 交换两个方程的位置；

(2) 用一个非零数乘以某一个方程；

(3) 将某个方程乘以一个常数后加到另外一个方程上去。

引例 求解如下的线性方程组：

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 11x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1。 \end{cases} \tag{3.1}$$

解 将线性方程组(3.1)中第 1、3 个方程的位置互换，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 7x_1 + 8x_2 + 11x_3 = -3。 \end{cases} \tag{3.2}$$

将线性方程组(3.2)中第1个方程的(−5)和(−7)倍分别加到第2个方程、第3个方程上，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ \quad -9x_2-18x_3=-9, \\ \quad -6x_2-10x_3=-10。\end{cases} \tag{3.3}$$

将线性方程组(3.3)中第2个和第3个方程分别提出公因子(−9)和(−2)，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ \qquad x_2+2x_3=1, \\ \quad 3x_2+5x_3=5。\end{cases} \tag{3.4}$$

将线性方程组(3.4)中第2个方程的(−3)倍加到第3个方程上，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ \qquad x_2+2x_3=1, \\ \qquad\quad -x_3=2。\end{cases} \tag{3.5}$$

再将线性方程组(3.5)中第3个方程的2倍、3倍分别加到第2个方程、第1个方程上，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad =7, \\ \qquad x_2 \qquad =5, \\ \qquad\quad -x_3=2。\end{cases} \tag{3.6}$$

最后，将线性方程组(3.6)中第2个方程的(−2)倍加到第1个方程上，将第3个方程乘以数(−1)，得

$$\begin{cases} x_1=-3, \\ x_2=5, \\ x_3=-2。\end{cases} \tag{3.7}$$

由初等代数可知，以上各线性方程组同解，故线性方程组(3.1)的解为

$$x_1=-3, \quad x_2=5, \quad x_3=-2。$$

若利用矩阵的乘法将线性方程组用矩阵的形式表示，则上述求解过程实质就是对线性方程组的增广矩阵实施的行运算，这种行运算就是矩阵的初等行变换。下面给出初等行变换的定义。

定义 3.1 如下的三种变换称为对矩阵实施的**初等行变换**：

(1) 互换矩阵的第 i,j 行(记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)，简称为**换行**；

(2) 将矩阵的第 i 行各元素乘以非零常数 k(记作 kr_i)，简称为**数乘**；

(3) 将矩阵的第 j 行各元素乘以非零数 k 后加到第 i 行的对应元素上(记作 r_i+kr_j)，简称为**倍加**。

Definition 3.1 The following three operations are said to be **elementary row operations** performing on matrices:

(1) Interchange the i-th row and the j-th row of a matrix (written as $r_i \leftrightarrow r_j$), for short, **row-interchanging**;

(2) Multiply the i-th row of a matrix by a nonzero constant k (written as kr_i), for short, **scalar-multiplication**;

(3) Add a nonzero constant k times the j-th row of a matrix to the i-th row (written as r_i+kr_j), for short, **multiple-adding.**

若将定义 3.1 中的“行”换成“列”，即可得到**初等列变换**(**elementary column operations**)的定义(所用记号是将“r”换成“c”)。对矩阵进行的初等行变换和初等列变换，统称为**初等变换**(**elementary operations**)。

定义 3.2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$。

Definition 3.2 It is called that a matrix $\boldsymbol{A}$ is equivalent to a matrix $\boldsymbol{B}$, if the matrix $\boldsymbol{B}$ is obtained by performing a finite sequence of elementary operations on the matrix $\boldsymbol{A}$, written as $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ or $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$.

容易验证，矩阵的等价关系具有下列性质：

(1) **反身性** $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价；

(2) **对称性** 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，那么 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价；

(3) **传递性** 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价。

(1) **Reflexivity** $\boldsymbol{A}$ is equivalent to itself;

(2) **Symmetry** If $\boldsymbol{A}$ is equivalent to $\boldsymbol{B}$, then $\boldsymbol{B}$ is equivalent to $\boldsymbol{A}$;

(3) **Transitivity** If $\boldsymbol{A}$ is equivalent to $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{B}$ is equivalent to $\boldsymbol{C}$, then $\boldsymbol{A}$ is equivalent to $\boldsymbol{C}$.

利用定义 3.1 和定义 3.2，线性方程组(3.1)的求解过程可用对增广矩阵实施的初等行变换描述，具体过程如下：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}7&8&11&-3\\5&1&-3&-4\\1&2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\5&1&-3&-4\\7&8&11&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-5r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-9&-18&-9\\0&-6&-10&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3/2]{-r_2/9}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&2&1\\0&3&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&2&1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+3r_3]{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&7\\0&1&0&5\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&5\\0&0&1&-2\end{pmatrix}。$$

以上矩阵依次对应于线性方程组(3.1)～线性方程组(3.7)。

因此，初等行变换是**同解变换**，即原增广矩阵所对应的线性方程组与新增广矩阵(经过有限次初等行变换得到)所对应的线性方程组是同解的。于是有下面的结论。

定理 3.1 令 $\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 和 $\bar{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{d})$ 分别为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d}$ 的增广矩阵。若矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 经过有限次初等行变换后变为矩阵 $\bar{\boldsymbol{B}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 同解。

Theorem 3.1 Let $\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ and $\bar{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{d})$ be augmented matrices associated with the linear systems $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d}$. If the matrix $\bar{\boldsymbol{B}}$ is obtained from the matrix $\bar{\boldsymbol{A}}$ via a finite sequence of elementary row operations, then the linear systems given by $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d}$ have the same solution.

由于初等列变换会改变对应的线性方程组中未知数的位置，从而导致解的位置发生变化，所以，在实际计算时通常**只用初等行变换求解线性方程组**，很少使用初等列变换。

一般地，对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 实施有限次的初等行变换，可将其约化为如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称之为**行阶梯形矩阵**(**row echelon matrix**)。它具有如下特点：

(1) 每个阶梯只占一行；

(2) 任一非零行(即元素不全为零的行)的第一个非零元素的列标一定不小于行标，且第一个非零元素的列标都大于它上面的非零行(如果存在)的第一个非零元素的列标；

(3) 元素全为零的行(如果存在)必位于矩阵的最下面几行。

例如，下列矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

均为行阶梯形矩阵。

若对行阶梯形矩阵再实施有限次的初等行变换，可以将其进一步约化为如下的矩阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称之为**行最简形**(**row-reduced form**)。它的特点是：每一非零行的第一个非零元素全为1；且它所在的列中其余元素全为零。

例如，下列矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

均为行最简形矩阵。

对于任一给定的矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，可以经过有限次的初等行变换将其约化为行阶梯形以及行最简形。进一步地，若对行最简形矩阵再实施有限次初等列变换，则有下面的最简单形式，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称之为矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的**标准形(canonical form)**。

定理 3.2 任一矩阵可经有限次初等行变换约化为行阶梯形矩阵。

Theorem 3.2 Any matrix can be reduced to a row echelon matrix by a finite sequence of elementary row operations.

证 设有矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$。

若 $\boldsymbol{A}$ 中的所有元素 a_{ij} 都等于零，即零矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 已是行阶梯形矩阵。

若 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一元素 a_{ij} 不为零，且不为零的元素在第一列时，不妨设 $a_{11}\neq 0$(否则对 $\boldsymbol{A}$ 施以第一种初等行变换，总可将不为零的元素换到 a_{11} 的位置上)，用 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 乘以第 1 行各元素加到第 i 行($i=2,3,\cdots,m$)的对应元素上，得矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，即

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}。$$

若 $\boldsymbol{A}_1$ 中除第 1 行外其余各行元素全为零，那么 $\boldsymbol{A}_1$ 即为行阶梯形矩阵。如若不然，不妨设 $a'_{22}\neq 0$，可仿照上面的方法将 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 3 行至第 m 行的第 2 列元素化为零，即

$$\boldsymbol{A}_1\longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}。$$

按上述规律及方法继续下去，最后可将 $\boldsymbol{A}$ 约化为行阶梯形矩阵。如果 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列元素全为零，那么依次考虑它的第 2 列，等等。 证毕

同理可以证明如下结论。

推论 1 任意矩阵可经过有限次初等行变换约化为行最简形矩阵。

Corollary 1 Any matrix can be reduced to an row-reduced matrix by a finite sequence of elementary row operations.

推论 2　任一可逆矩阵可经过有限次初等行变换约化为单位矩阵。

Corollary 2　Any invertible matrix can be reduced to an identity matrix by a finite sequence of elementary row operations.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，根据行列式的性质可知，$\boldsymbol{A}$ 经过一次初等行变换得到方阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式满足 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，所以，方阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换的行最简形必为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$。　证毕

例 3.1　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 约化为行阶梯形、行最简形和标准形，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}。$$

分析　先利用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 约化为行阶梯形、行最简形，再用初等列变换将行最简形进一步化简成标准形。

解　对 $\boldsymbol{A}$ 实施初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-1&1&-3&6\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-1&1&-3&6\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4/3]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-1&1&-3&6\\0&0&0&8&-24\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+8r_3]{\substack{-r_2\\r_3\leftrightarrow r_4}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&3&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}。$$

$\boldsymbol{B}$ 为行阶梯形矩阵。继续对 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[r_1-r_2]{\substack{r_2-3r_3\\r_1-r_3}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}。$$

$\boldsymbol{C}$ 为行最简形矩阵。继续对 $\boldsymbol{C}$ 进行初等列变换，得

$$\boldsymbol{C}\xrightarrow[c_5-4c_1]{c_3+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_5+3c_4\\c_3\leftrightarrow c_4}]{\substack{c_3+c_2\\c_5-3c_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{D}。$$

显然，$\boldsymbol{D}$ 为标准形矩阵。

3.1.2　初等矩阵 | *Elementary matrices*

定义 3.3　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等

Definition 3.3　The matrix is called an

变换得到的矩阵称为初等矩阵。

elementary matrix if it is obtained by performing an elementary operation on the identity matrix $\boldsymbol{E}$.

事实上，矩阵的三种初等变换对应于三种初等矩阵。

(1) **第一种初等矩阵**：互换单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行与第 j 行(或第 i 列与第 j 列)可以得到**第一种初等矩阵(elementary matrix of the first kind)**，即

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{cl}\left(\begin{matrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&\cdots&&1&&&\\&&&&\ddots&&&&&&\\&&&\vdots&&1&&\vdots&&&\\&&&&&&\ddots&&&&\\&&&1&&\cdots&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{matrix}\right)&\begin{matrix}\\ \\ \\ 第\,i\,行\\ \\ \\ \\ 第\,j\,行\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}。$$

(2) **第二种初等矩阵**：将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(或列)乘以非零常数 k 可以得到**第二种初等矩阵(elementary matrix of the second kind)**，即

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{array}{cl}\left(\begin{matrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{matrix}\right)&\begin{matrix}\\ \\ \\ 第\,i\,行。\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

(3) **第三种初等矩阵**：将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行(或第 i 列)乘以非零常数 k 加到第 i 行(或第 j 列)的对应元素上，可以得到**第三种初等矩阵(elementary matrix of the third kind)**，即

$$\boldsymbol{E}(ij(k))=\begin{array}{cl}\left(\begin{matrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{matrix}\right)&\begin{matrix}\\ \\ 第\,i\,行\\ \\ 第\,j\,行\\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}。$$

初等变换与初等矩阵建立起对应关系后，可以得到如下关于初等矩阵的结论。

定理 3.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵。对 $\boldsymbol{A}$ 施以一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边

Theorem 3.3 Let $\boldsymbol{A}$ be an $m\times n$ matrix。Performing an elementary row opera-

乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施以一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。简称为**左乘变行，右乘变列**。

tion on $\boldsymbol{A}$ is equivalent to multiplying $\boldsymbol{A}$ on the left by the corresponding elementary matrix of order m; interestingly, performing an elementary column operation on $\boldsymbol{A}$ is equivalent to multiplying $\boldsymbol{A}$ on the right by the corresponding elementary matrix of order n. For short, premultiplying once changes a row and postmultiplying changes a column.

关于定理 3.3 及初等变换和初等矩阵的几点说明。

(1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以一次**初等行(列)变换**得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的关系是等价的，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；而在 $\boldsymbol{A}$ 的左(右)边乘以相应的 m 阶**初等矩阵** $\boldsymbol{P}$(n 阶**初等矩阵** $\boldsymbol{Q}$)得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的关系可以用等号连接，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$($\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}$)。

(2) 如何理解“**左乘变行，右乘变列**”非常重要。对于第一种初等矩阵，在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左边乘(或右边乘)以初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i,j)$，表示对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行(或第 i 列与第 j 列)进行互换；对于第二种初等矩阵，在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左边乘(或右边乘)以初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i(k))$，表示对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 k；然而，**对于第三种初等矩阵，在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以 $\boldsymbol{E}(ij(k))$ 表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以常数 k 加到第 i 行的对应元素上，右边乘以 $\boldsymbol{E}(ij(k))$ 表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以常数 k 加到第 j 列的对应元素上**。这些细节经常被初学者弄混，因此，必须要记清楚这些符号的具体含义和使用规范。

例如，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以一次初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix},$$

相应地，

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix}。$$

对 $\boldsymbol{A}$ 施以一次初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+kr_3}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+ka_{31}&a_{22}+ka_{32}&a_{23}+ka_{33}&a_{24}+ka_{34}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix},$$

相应地，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(23(k))\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+ka_{31}&a_{22}+ka_{32}&a_{23}+ka_{33}&a_{24}+ka_{34}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

对 $\boldsymbol{A}$ 施以一次初等列变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+kc_4}\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{14}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+ka_{24}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}+ka_{34}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix},$$

相应地

$$\boldsymbol{AE}(41(k))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\k&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{14}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+ka_{24}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}+ka_{34}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}。$$

为了进一步加深理解，见下面的例题。

例 3.2 对于给定的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

和初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}(3(5))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}(32(3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix},$$

分别用三种初等矩阵左乘、右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$。

分析 利用初等矩阵的定义和矩阵的乘法法则计算，并比较结果。

解 分别用三种初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，可得

$$\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}。$$

上式表明，用 $\boldsymbol{E}(1,2)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行。

$$\boldsymbol{E}(3(5))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-5&5\end{pmatrix}。$$

上式表明，用 $\boldsymbol{E}(3(5))$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行乘以 5。

$$\boldsymbol{E}(32(3))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}。$$

上式表明，用 $\boldsymbol{E}(32(3))$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行乘以 3 加到第 3 行。

分别用三种初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，可得

$$\boldsymbol{AE}(1,2)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}。$$

上式表明,用 $\boldsymbol{E}(1,2)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列。

$$\boldsymbol{AE}(3(5))=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-5\\2&2&5\\0&-1&5\end{pmatrix}。$$

上式表明,用 $\boldsymbol{E}(3(5))$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 列乘以 5。

$$\boldsymbol{AE}(32(3))=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\2&5&1\\0&2&1\end{pmatrix}。$$

上式表明,用 $\boldsymbol{E}(32(3))$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 列乘以 3 加到第 2 列。

因此,根据定理 3.3 可以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的等价关系用初等矩阵的乘法表示出来。

定理 3.4 两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是:存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$ 及 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$,使得

Theorem 3.4 Two $m\times n$ matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are equivalent if and only if there exist elementary matrices of order m, given by $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$, and elementary matrices of order n, given by $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$, such that

$$\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{P}_{l-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B}。$$

对于三种初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i,j),\boldsymbol{E}(i(k)),\boldsymbol{E}(ij(k))$,容易求得,

$$|\boldsymbol{E}(i,j)|=-1,\quad |\boldsymbol{E}(i(k))|=k\neq 0,\quad |\boldsymbol{E}(ij(k))|=1。$$

因此它们都可逆。此外,不难验证:

(1) $(\boldsymbol{E}(i,j))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$,$(\boldsymbol{E}(i(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$,$(\boldsymbol{E}(ij(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}(ij(-k))$;

(2) 若 $|\boldsymbol{A}|=a$,则 $|\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}|=-a$,$|\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}|=ka$,$|\boldsymbol{E}(ij(k))\boldsymbol{A}|=a$。

基于以上的讨论,不难证明如下的定理。

定理 3.5 初等矩阵均可逆,而且初等矩阵的逆矩阵仍为同类型的初等矩阵。

Theorem 3.5 Elementary matrices are all invertible and their inverse matrices are all elementary matrices of the same types.

定理 3.6 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则与 $\boldsymbol{A}$ 等价的 $\boldsymbol{B}$ 的行列式不为零,即 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$。

Theorem 3.6 If $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, then the determinant of $\boldsymbol{B}$ equivalent to $\boldsymbol{A}$ is nonzero, i. e., $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

例 3.3 求解如下的矩阵方程:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}。$$

分析 注意到,$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是初等矩阵 $\boldsymbol{E}(1,2)$,其逆矩阵就是其本身;$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是初等矩阵 $\boldsymbol{E}(13(1))$,其逆矩阵是 $\boldsymbol{E}(13(-1))=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

解 由已知可得