第3章 CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

第2章我们只讨论了一个随机变量的情况，但在很多实际问题中，试验结果通常需要用两个或两个以上的随机变量才能描述。例如，炮弹落点的位置需要由它的横坐标 X 和纵坐标 Y 来确定，而横坐标和纵坐标是定义在同一个样本空间的两个随机变量。再如，在制定我国的服装标准时，需同时考虑人体的上身长、臂长、胸围、下肢长、腰围、臀围等多个变量。在很多情况下，对于同一个试验结果的各个随机变量之间，一般有某种联系，因而需要把它们作为一个整体来研究。

3.1 多维随机变量及其分布函数

3.1.1 二维随机变量

定义1 设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，$X(\omega)$，$Y(\omega)$ 分别是定义在同一个样本空间上的两个随机变量，称 (X,Y) 为定义在 Ω 上的**二维随机变量**(two-dimension random variables)或**二维随机向量**。

例如，炮弹落点的位置需由它的横坐标 X 和纵坐标 Y 来确定，这里 (X,Y) 是二维随机变量。

类似地，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n **维随机变量**。

通常把二维或二维以上的随机变量称为多维随机变量。相对于多维随机变量，称随机变量 X 为一维随机变量。

3.1.2 二维随机变量的联合分布函数

类似于一维随机变量，我们讨论二维随机变量的分布函数。

定义2 设 (X,Y) 是二维随机变量，对任意实数 x,y，事件 $\{X\leqslant x\}$ 与 $\{Y\leqslant y\}$ 同时发生的概率 $P(\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\})$ 称为 (X,Y) 的**分布函数**或随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**(unity distribution function)，记为 $F(x,y)$，即

$$F(x,y)=P(\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\})=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)。\tag{3.1}$$

若将二维随机变量(X,Y)看成是平面上随机点的坐标，则分布函数$F(x,y)$在(x,y)处的函数值就是随机点(X,Y)落在点(x,y)左下方无穷矩形域内的概率(如图3-1(a)所示)。由图3-1(b)，容易算出随机点(X,Y)落在矩形区域$x_1<x\leqslant x_2,y_1<y\leqslant y_2$内的概率为

$$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)。\tag{3.2}$$

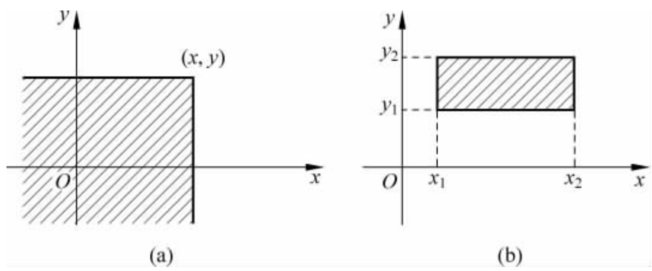

图 3-1

二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$具有如下4条性质：

(1) **单调性** $F(x,y)$是分别关于变量x和y的不减函数，即当$x_1<x_2$时，有

$$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y);\quad 当\ y_1<y_2\ 时，有\ F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2);$$

(2) **有界性** $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且

$$F(-\infty,y)=0,\quad F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0,\quad F(+\infty,+\infty)=1;$$

(3) **右连续性** $F(x,y)$关于x右连续，关于y右连续，即

$$F(x+0,y)=F(x,y),\quad F(x,y+0)=F(x,y);$$

(4) **非负性** 对于任意的实数$x_1,x_2,y_1,y_2,x_1<x_2,y_1<y_2$有

$$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geqslant 0。$$

以上性质是联合分布函数的基本性质，一个函数是随机变量联合分布函数的充分必要条件是它满足以上性质(1)～性质(4)。

3.1.3 二维随机变量的边缘分布函数

若二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，则(X,Y)中随机变量X的分布函数称为(X,Y)关于X的**边缘分布函数**，记为$F_X(x)$，即

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,Y<+\infty)=F(x,+\infty)。$$

同理，二维随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布函数，记为$F_Y(y)$，即

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X<+\infty,Y\leqslant y)=F(+\infty,y)。$$

【例1】 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

求$P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 1)$，$P(0<X\leqslant 1)$。

解 利用公式(3.2)有
$$\begin{aligned}P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 1)&=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)\\&=(1-\mathrm{e}^{-2})(1-\mathrm{e}^{-1})-0-0+0\\&=(1-\mathrm{e}^{-2})(1-\mathrm{e}^{-1})\\&\approx 0.5466。\end{aligned}$$

由边缘分布函数的定义,可得
$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$
则 $P(0<X\leqslant 1)=F_X(1)-F_X(0)=1-\mathrm{e}^{-2}\approx 0.8647$。

3.1.4 n 维随机变量的联合分布函数

与二维随机变量类似,可定义 n 维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数。

对任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则 n 个事件$\{X_1\leqslant x_1\},\{X_2\leqslant x_2\},\cdots,\{X_n\leqslant x_n\}$同时发生的概率
$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)$$
称为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数或随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数。

n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的边缘分布函数也可类似地定义。例如,其关于随机变量 X_1,(X_1,X_2),(X_1,X_2,X_3)的边缘分布函数可分别表示为
$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,+\infty,+\infty,\cdots,+\infty),$$
$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,+\infty,\cdots,+\infty),$$
$$F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=F(x_1,x_2,x_3,+\infty,\cdots,+\infty)。$$

习题 3.1

基础题

1\. 判断 $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0,y>0,\\\dfrac{1}{2}, & \text{其他}\end{cases}$ 是否可以作为二维随机变量(X,Y)的分布函数?

2\. 一电子器件包含两部分,分别以 X,Y 记这两部分的寿命(单位: h),设(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.01x}-\mathrm{e}^{-0.01y}+\mathrm{e}^{-0.01(x+y)}, & x>0,y>0,\\0, & \text{其他。}\end{cases}$

求:(1)$P(0<X\leqslant 100,0<Y\leqslant 100)$;(2)$P(0<X\leqslant 100)$。

提高题

1\. 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为
$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y),\quad -\infty<x,y<+\infty。$$

求:(1)常数 a,b,c 的值;(2)$P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 1)$;(3)$X$ 与 Y 的边缘分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$。

3.2 二维离散型随机变量

3.2.1 二维离散型随机变量的联合分布律

定义 1 若二维随机变量(X,Y)的所有可能取值是有限或可列个数对,则称(X,Y)是**二维离散型随机变量**(two-dimension discrete random variable)。

定义 2 设二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值为$(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$,则称

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots \tag{3.3}$$

为二维离散型随机变量(X,Y)的**分布律**,或随机变量 X 和 Y 的**联合分布律**。

类似于一维随机变量的分布律,(X,Y)的分布律需满足如下两个条件:

(1) **非负性** $p_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2,\cdots)$;

(2) **规范性** $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$。

另外也可用表格表示二维离散型随机变量(X,Y)的分布律:

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$

注 求二维离散型随机变量的分布律,关键是写出其所有可能的取值及取值的概率,通常写完后应验证所有概率的和是否为 1。

【例 1】 口袋中有五件产品,其中两件次品,三件正品,从袋中随机地取两次,每次取一件,取后放回。设随机变量 X,Y 分别表示第一次、第二次取到的正品数,试求(X,Y)的分布律及 $P(X+Y=1)$。

解 随机变量 X,Y 的所有可能取值均为 0,1,则

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2\times 2}{5\times 5}=\frac{4}{25},\quad P(X=0,Y=1)=\frac{2\times 3}{5\times 5}=\frac{6}{25}。$$

同理可得

$$P(X=1,Y=0)=\frac{3\times 2}{5\times 5}=\frac{6}{25},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{3\times 3}{5\times 5}=\frac{9}{25}。$$

即(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$

$$P(X+Y=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}。$$

【例 2】 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$。令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}。\end{cases}$$

试求：二维随机变量(X,Y)的分布律。

解 由于 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，所以

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned}P(X=0,Y=0)&=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}。\end{aligned}$$

所以，(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律

定义 3 设(X,Y)为离散型的二维随机变量，其分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots。$$

对 j 求和所得的分布律

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i),\quad i=1,2,\cdots \tag{3.4}$$

称为关于 X 的**边缘分布律**(marginal distribution law)。类似地,对 i 求和可得 Y 的边缘分布律,即

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=P(Y=y_j),\quad j=1,2,\cdots。 \tag{3.5}$$

边缘分布律也可以用如下的表格表示:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$	$\cdots$	1

此表中,中间部分是(X,Y)的分布律,而边缘部分是(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律,这也是"边缘分布律"这个名词的来源。

【例 3】 求本节例 2 中二维随机变量(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律。

解 由本节例 2 中的分布律,可知

$$p_{1\cdot}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},\quad p_{2\cdot}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$p_{\cdot 1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6},\quad p_{\cdot 2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}。$$

列表得:

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

或写成

X	0	1
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.2.3 二维离散型随机变量的条件分布

利用条件概率的定义，可以给出二维离散型随机变量的条件分布律。

定义 4 设(X,Y)为离散型的二维随机变量，其分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots。$$

对固定的j，若$p_{\cdot j}>0$，称

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots \tag{3.6}$$

为在$Y=y_j$的条件下，随机变量X的**条件分布律**(conditional distribution law)。对固定的i，若$p_{i\cdot}>0$，称

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots \tag{3.7}$$

为在$X=x_i$的条件下，随机变量Y的**条件分布律**。

由分布律的性质，易知条件分布律有如下的性质：

(1) $P(X=x_i|Y=y_j)\geqslant 0, P(Y=y_j|X=x_i)\geqslant 0$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(X=x_i\mid Y=y_j)=1,\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(Y=y_j\mid X=x_i)=1$。

【例 4】 设随机变量X与Y的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

求在$Y=1$的条件下，X的条件分布律。

解 由题设可知$P(Y=1)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$，

$$P(X=3\mid Y=1)=\frac{P(X=3,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{1/10}{3/10}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=4\mid Y=1)=\frac{P(X=4,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{1/5}{3/10}=\frac{2}{3},$$

即在 $Y=1$ 的条件下，X 的条件分布律为

X	3	4
$P(X=k\mid Y=1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

3.2.4 二维离散型随机变量的相互独立性

第1章中我们定义了两个事件的独立性，即如果有 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A，B 相互独立。现在把此概念推广到两个离散型随机变量上。

设有二维离散型随机变量 (X,Y)，如果记 $A=\{X=x_i\}$，$B=\{Y=y_j\}$，则由 $P(AB)=P(A)P(B)$ 得 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$。由此可给出如下的定义。

定义5 设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，其分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots。$$

若对 (X,Y) 的所有可能取值 (x_i,y_j)，有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots,\tag{3.8}$$

则称随机变量 X 和 Y **相互独立**。

类似地，如果记 $A=\{X\leqslant x\}$，$B=\{Y\leqslant y\}$，可给出如下的定义。

定义6 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数，若对所有的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\tag{3.9}$$

则称随机变量 X 和 Y **相互独立**。

【例5】 判断本节例4中随机变量 X 与 Y 的独立性。

解 由已知可得，X 和 Y 的边缘分布律如下：

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

因为

$$P(X=3,Y=2)=\frac{1}{5},\quad P(X=3)P(Y=2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50},$$

所以 $P(X=3,Y=2)\neq P(X=3)P(Y=2)$，即 X 与 Y 不相互独立。

【例 6】 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

且 X 与 Y 相互独立，求 α,β。

解 由已知可求，X 和 Y 的边缘分布律如下：

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	1

因为 X 与 Y 相互独立，故

$$\begin{cases} P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2), \\ P(X=1,Y=3)=P(X=1)P(Y=3), \end{cases}$$

即$\begin{cases} \frac{1}{9}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\alpha\right), \\ \frac{1}{18}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{18}+\beta\right), \end{cases}$由此解得 $\alpha=\frac{2}{9},\beta=\frac{1}{9}$。

习题 3.2

基础题

1. 一口袋中有三个球，其中两个红球，一个白球，取两次，每次取一个，考虑两种情况：(1)放回抽样；(2)不放回抽样。我们定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases} 1, & \text{若第一次取出的是红球,} \\ 0, & \text{若第一次取出的是白球,} \end{cases} \quad Y=\begin{cases} 1, & \text{若第二次取出的是红球,} \\ 0, & \text{若第二次取出的是白球。} \end{cases}$$

试分别就(1)、(2)两种情况，写出(X,Y)的分布律。

2. 设(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.56	0.24
1	0.14	0.06

求 $P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right)$，$P(X\geqslant1)$，$P\left(X<\frac{1}{2}\right)$。

3. 设随机变量(X,Y)只能取下列数组中的值：$(0,0)$，$(-1,1)$，$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，$(2,0)$，且取这些值的概率依次为$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{5}{12}$。求：(1)此二维随机变量的分布律；(2)$X$ 和 Y 的边缘分布律；(3)判断 X 和 Y 是否相互独立？并说明理由。

4. 甲乙两人独立地各进行两次射击，已知甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，求(X,Y)的分布律。

5. 设随机变量 X 和 Y 有如下的分布律

Y	0	1
P	0.5	0.5

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

且 $P(XY=0)=1$。

(1) 求 X 和 Y 的联合分布律；

(2) 判断 X 和 Y 是否相互独立？为什么？

(3) $X=1$ 条件下，求 Y 的条件分布律和 $Y=0$ 条件下，求 X 的条件分布律。

提高题

1. 设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，试求(X,Y)的分布律及 $P(X=Y)$。

2. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	2
0	$\frac{1}{3}$	a
2	b	$\frac{1}{6}$

已知事件$\{X=0\}$与事件$\{X+Y=2\}$相互独立，求 a,b 的值。

3. 随机变量 Y 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k,\\ 1, & Y>k\end{cases}\quad(k=1,2),$$

求(X_1,X_2)的分布律及边缘分布律。

4. 已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$