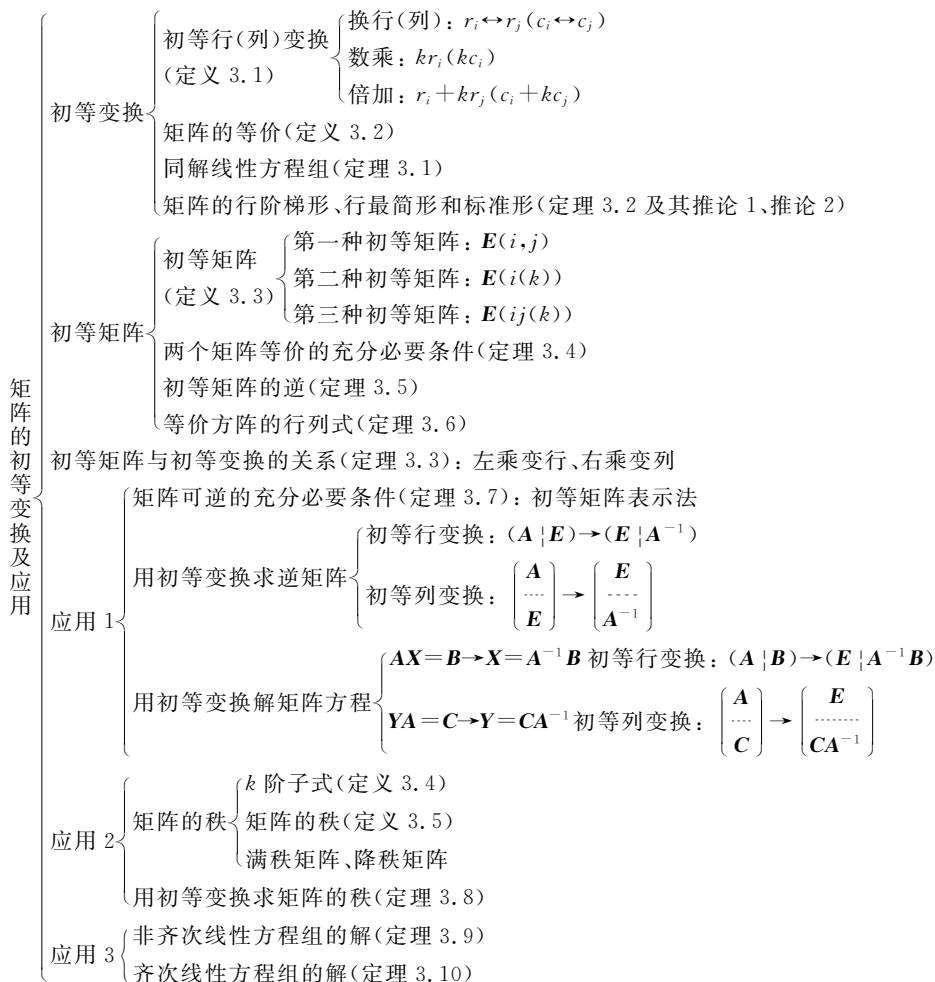


矩阵的初等变换及应用

一、基本要求

1. 掌握初等变换和初等矩阵的定义、功能、性质;了解矩阵等价的概念。
2. 熟练掌握用初等变换求矩阵的逆,求矩阵的秩,判定和求线性方程组的解。

二、知识网络图



初等变换在化简矩阵、求矩阵的逆和秩、解线性方程组等问题中起着非常重要的作用，它在线性代数中占有很重要的地位。

3.1 初等变换与初等矩阵

一、知识要点

1. 矩阵的初等变换

定义 3.1 如下的三种变换称为对矩阵实施的初等行变换：

- (1) 互换矩阵的第 i, j 两行(记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)，简称为换行；
- (2) 将矩阵的第 i 行各元素乘以非零常数 k (记作 kr_i)，简称为数乘；
- (3) 将矩阵的第 j 行各元素乘以非零数 k 后加到第 i 行的对应元素上(记作 $r_i + kr_j$)，简称为倍加。

若将定义 3.1 中的“行”换成“列”，即可得到初等列变换的定义(所用记号是将“ r ”换成“ c ”)。对矩阵进行的初等行变换和初等列变换，统称为初等变换。

定义 3.2 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B ，则称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \sim B$ 或 $A \rightarrow B$ 。

矩阵的等价关系具有下列性质：

性质 1(反身性) A 与 A 等价；

性质 2(对称性) 如果 A 与 B 等价，那么 B 与 A 等价；

性质 3(传递性) 如果 A 与 B 等价， B 与 C 等价，那么 A 与 C 等价。

定理 3.1 令 $\bar{A} = (A, b)$ 和 $\bar{B} = (B, d)$ 分别是线性方程组 $Ax = b$ 和 $Bx = d$ 的增广矩阵。若矩阵 $\bar{A}$ 经过有限次初等行变换后变为矩阵 $\bar{B}$ ，则线性方程组 $Bx = d$ 与 $Ax = b$ 同解。

由于初等列变换会改变对应线性方程组中未知数的位置，从而导致解的位置发生变化，所以，在实际计算时通常只用初等行变换求解线性方程组，很少使用初等列变换。

一般地，对矩阵 $A_{m \times n}$ 实施有限次的初等行变换，可将其约化为如下形式的矩阵，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称为行阶梯形矩阵。它具有如下特点：

- (1) 每个阶梯只占一行；
- (2) 任一非零行(即元素不全为零的行)的第一个非零元素的列标一定不小于行标，且第一个非零元素的列标都大于它上面的非零行(如果存在的话)的第一个非零元素的列标；
- (3) 元素全为零的行(如果存在的话)必位于矩阵的最下面几行。

若对行阶梯形矩阵再实施有限次的初等行变换，可以将其进一步约化为如下的矩阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{nr+1} & \cdots & b_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称为行最简形。它的特点是：每一非零行的第一个非零元素全为1；且它所在的列中其余元素全为零。

对于任一给定的矩阵 $A_{m \times n}$ ，可以经过有限次的初等行变换将其约化为行阶梯形以及行最简形。进一步地，若对行最简形矩阵再实施有限次初等列变换，则有下面的最简单形式，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称为矩阵 $A_{m \times n}$ 的标准形。

定理 3.2 任一矩阵可经有限次初等行变换约化为行阶梯形矩阵。

推论 1 任一矩阵可经过有限次初等行变换约化为行最简形矩阵。

推论 2 任一可逆矩阵可经过有限次初等行变换约化为单位矩阵。

2. 初等矩阵

定义 3.3 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。矩阵的三种初等变换对应于三种初等矩阵。

(1) **第一种初等矩阵**：互换单位矩阵 E 的第 i 行与第 j 行(或第 i 列与第 j 列)可以得到第一种初等矩阵，即

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}.$$

(2) 第二种初等矩阵: 将单位矩阵 E 的第 i 行(或列)乘以非零常数 k 可以得到第二种初等矩阵, 即

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{第 } i \text{ 行。}$$

(3) 第三种初等矩阵: 将单位矩阵 E 的第 j 行(或第 i 列)乘以常数 k 加到第 i 行(或第 j 列)的对应元素上, 可以得到第三种初等矩阵, 即

$$E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}.$$

定理 3.3 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵。对 A 施以一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 施以一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。简称为左乘变行, 右乘变列。

定理 3.4 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充要条件是: 存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$ 及 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使得

$$P_l P_{l-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B.$$

对于三种初等矩阵 $E(i, j), E(i(k)), E(ij(k))$, 容易求得

$$|E(i, j)| = -1, \quad |E(i(k))| = k \neq 0, \quad |E(ij(k))| = 1.$$

初等矩阵的特性:

$$(1) (E(i, j))^{-1} = E(i, j), (E(i(k)))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), (E(ij(k)))^{-1} = E(ij(-k)).$$

$$(2) \text{ 对于方阵 } A, \text{ 若 } |A| = a, \text{ 则 } |E(i, j)A| = -a, |E(i(k))A| = ka, |E(ij(k))A| = a.$$

定理 3.5 初等矩阵均可逆, 而且初等矩阵的逆矩阵仍为同类型的初等矩阵。

定理 3.6 对于方阵 A , 若 $|A| \neq 0$, 则与 A 等价的 B 的行列式不为零, 即 $|B| \neq 0$ 。

3. 用初等变换求逆矩阵

定理 3.7 方阵 A 可逆的充分必要条件是: A 能表示成有限个初等矩阵的乘积, 即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s,$$

其中 $P_1, P_2, \dots, P_s$ 均为初等矩阵。

若矩阵 A 经过一系列初等行变换变为单位矩阵 E , 则单位矩阵 E 经过同样的初等行变换变为 A^{-1} , 其过程可表示为

$$(A | E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E | A^{-1}),$$

这一过程实际上就是将矩阵 $(A | E)$ 通过一系列的初等行变换约化为行最简形矩阵。

类似地, 若对 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 有

$$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

用初等变换求逆矩阵的几点说明。

(1) 对矩阵 $(A | E)$ 只能实施初等行变换, 且在进行初等行变换时, 必须将右边单位矩阵 E 所在的块同时进行。

(2) 在求一个矩阵的逆矩阵时, 也可使用初等列变换求逆矩阵, 但是对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix}$ 只能实施初等列变换, 且在进行初等列变换时, 必须将下边单位矩阵 E 所在的块同时进行。

用初等变换求逆矩阵的方法也可用于解某些特殊的矩阵方程。

设有矩阵方程 $AX=B$ 。若 A 可逆, 则 $X=A^{-1}B$ 。对矩阵 $(A | B)$ 实施初等行变换, 当把 A 变换为单位矩阵 E 时, B 就约化为 $A^{-1}B$, 即

$$(A | B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E | A^{-1}B).$$

同理, 在求解矩阵方程 $YA=C$ 时, 若 A 可逆, 则 $Y=CA^{-1}$ 。可以对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ C \end{pmatrix}$ 实施初等列变换, 使得

$$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ CA^{-1} \end{pmatrix}.$$

二、疑难解析

1. 举例说明: 用消元法求解线性方程组与用增广矩阵方法求解线性方程组的对应关系。

$$\text{线性方程组} \quad \begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 11x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

互换方程组中第一、三个方程的位置

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 7x_1 + 8x_2 + 11x_3 = -3. \end{cases}$$

增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 11 & -3 \\ 5 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$r_1 \leftrightarrow r_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & -4 \\ 7 & 8 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

将第一个方程的 -5 倍加到第二个方程上,

$$r_2 - 5r_1$$

-7 倍加到第三个方程上

$$r_3 - 7r_1$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -9x_2 - 18x_3 = -9, \\ -6x_2 - 10x_3 = -10. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & -9 \\ 0 & -6 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

将第二个和三个方程分别提出公因子 -9 和 -2

$$r_2/(-9), r_3/(-2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

将第二个方程的 -3 倍加到第三个方程上

$$r_3 - 3r_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

将第三个方程的 2 倍加到第二个方程上,

$$r_2 + 2r_3$$

3 倍加到第一个方程上

$$r_1 + 3r_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7, \\ x_2 = 5, \\ -x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

将第二个方程的 -2 倍加到第一个方程上,

$$r_1 - 2r_2$$

将第三个方程乘以数 -1

$$-r_3$$

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

由于以上各线性方程组同解,故此线性方程组的解为 由定理 3.9 知

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -2.$$

2. 在对矩阵实施初等变换时,与初等矩阵有何关系? 如何理解“左乘变行,右乘变列”?

答 (1) 对矩阵 A 施以一次初等行(列)变换得到矩阵 B , B 和 A 的关系是等价的,即 $A \sim B$;而在 A 的左(右)边乘以相应的 m 阶初等矩阵 P (n 阶初等矩阵 Q) 得到矩阵 B , 则 B 和 A 的关系可以用等号连接,即 $B = PA$ ($B = AQ$).

(2) 如何理解“左乘变行,右乘变列”非常重要。对于第一种初等矩阵,在矩阵 A 左边乘(或右边乘)以初等矩阵 $E(i, j)$, 表示对矩阵 A 的第 i 行与第 j 行(或第 i 列与第 j 列)进行互换;对于第二种初等矩阵,在矩阵 A 左边乘(或右边乘)以初等矩阵 $E(i(k))$, 表示对矩阵 A 的第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 k ;然而,对于第三种初等矩阵,在矩阵 A 左边乘以 $E(ij(k))$ 表示将矩阵 A 的第 j 行乘以常数 k 加到第 i 行的对应元素上,右边乘以 $E(ij(k))$ 表示将矩阵 A 的第 i 列乘以常数 k 加到第 j 列的对应元素上。这些细节经常被初学者弄混,因此,必须要记清楚这些符号的具体含义和使用规范。

例如,对矩阵 A 施以一次初等行变换

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + kr_3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} & a_{24} + ka_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

相应地

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(23(k))\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} & a_{24} + ka_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对 $\mathbf{A}$ 施以一次初等列变换

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + kc_4} \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + ka_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + ka_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

相应地

$$\mathbf{A}\mathbf{E}(41(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + ka_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + ka_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

3. 举例说明: 对一个矩阵只实施初等行变换, 一般情况下得不到矩阵标准形。

答 对一个可逆矩阵, 只需对其实施初等行变换, 便可以约化为对应的标准形。然而, 对于一般形式的矩阵, 若只实施初等行变换, 一般情况下只能得到对应的行最简形, 得不到矩阵标准形。例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

三、经典题型详解

题型 1 利用初等行变换将矩阵约化为行阶梯形、行最简形和标准形

例 3.1 将矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

约化为行阶梯形、行最简形和标准形。

解 对 $\mathbf{A}$ 实施初等行变换, 得

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - 3r_2 \\ r_4 + 2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. (\text{行阶梯形})
 \end{aligned}$$

B 为行阶梯形矩阵。继续对 B 进行初等行变换, 得

$$B \xrightarrow{\substack{r_3 \times \frac{1}{11} \\ r_2 \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 6r_3 \\ r_1 - 3r_3 \\ r_1 - 2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{11} & \frac{28}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C. (\text{行最简形})$$

C 为行最简形矩阵。继续对 C 进行初等列变换, 不难得到

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

显然, D 为标准形矩阵。

类似地, 可以求下列矩阵的行阶梯形、行最简形和标准形:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

题型 2 利用初等矩阵进行变换

例 3.2 设有如下的初等矩阵:

$$E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(2(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(3(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

分别用三种初等矩阵左乘、右乘矩阵 A , 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。

分析 利用初等矩阵的定义和矩阵的乘法法则计算, 并比较结果。

解 分别用三种初等矩阵左乘矩阵 A , 可得

$$E(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

上式表明,用 $E(1,2)$ 左乘 A 相当于交换矩阵 A 的第 1 行与第 2 行。

$$E(2(3))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

上式表明,用 $E(2(3))$ 左乘 A 相当于将矩阵 A 的第 2 行乘以 3。

$$E(32(2))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

上式表明,用 $E(32(2))$ 左乘 A 相当于将矩阵 A 的第 2 行乘以 2 加到第 3 行。

分别用三种初等矩阵右乘矩阵 A , 可得

$$AE(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

上式表明,用 $E(1,2)$ 右乘 A 相当于交换矩阵 A 的第 1 列与第 2 列。

$$AE(2(3)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

上式表明,用 $E(2(3))$ 右乘 A 相当于将矩阵 A 的第 2 列乘以 3。

$$AE(32(2)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

上式表明,用 $E(32(2))$ 右乘 A 相当于将矩阵 A 的第 3 列乘以 2 加到第 2 列。

类似地,对于给定的初等矩阵

$$E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(2(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(32(-2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

和矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 分别用三种初等矩阵左乘、右乘矩阵 A 。

例 3.3 计算: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{15}.$

分析 注意到, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 都是初等矩阵, 先利用初等矩阵的性质计算各

自的幂, 然后再计算 A 。

解 根据初等矩阵的性质, 不难求得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 23 & 34 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 45 & 34 & 23 \end{pmatrix}.$$

类似地,可以计算下列问题:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^8; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^3.$$

题型3 用初等变换求逆矩阵、解矩阵方程

例3.4 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵,其中

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

分析 先将矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 组成一个新的矩阵 $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$,然后对其实施初等行变换将其约化为 $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$ 。

解 对 $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ 实施初等行变换,得

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{E}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 + 3r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_1 + r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(2) 对 $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ 实施初等行变换,得

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$