第3章

Elements of Mathematics for Finance

数学基础 VI

几何学在创世之前就存在了。它是永恒的，几何学为造物主提供了创世的模型。

Geometry existed before the creation. It is co-eternal with the mind of God...Geometry provided God with a model for the Creation.

——约翰内斯·开普勒 (Johannes Kepler)

Core Functions and Syntaxes

本章核心命令代码

- cross() 计算向量叉乘。
- daspect(ratio) 设置当前坐标区数据纵横比。数据纵横比是沿 x 轴、y 轴和 z 轴数据单位的相对长度。若要在所有方向上采用相同数据单位长度，请使用 [1 1 1]。
- diff() 求解符号表达微分式。
- dot($\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$) 返回 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 标量点积。
- double() 转换为双精度浮点数，即 8 个字节（64 位）浮点值。
- fills() 填充三维多边形。
- fimplicit(f) 在默认区间 [-5 5]（对于 x 和 y）上绘制 $f(x,y)=0$ 定义隐函数。
- fimplicit3(f) 在默认区间 [-5 5]（对于 x）和 y（对于 z）上绘制 $f(x,y,z)=0$ 定义三维隐函数。
- gradient() 计算多元函数梯度。
- hessian() 计算多元函数 Hessian 矩阵。
- norm(v) 返回向量 v 的欧几里得范数。此范数也称为 2- 范数、向量模或欧几里得长度。
- norm($\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}$) 返回广义向量 $\boldsymbol{p}$- 范数。
- quiver($x,y,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$) 在 x 和 y 中每个对应元素对组所指定坐标处将向量绘制为箭头。
- quiver3($x,y,z,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$) 在 ($x,y,z$) 确定点处绘制向量，其方向由分量 ($\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$) 确定。
- solve() 求解代数式。
- subs() 将符号或者数值代入符号表达式。
- syms 创建符号变量和函数。
- view(az,el) 为当前坐标区设置照相机视线方位角和仰角。
- view(x, y, z) 函数输入为三元素数组时，其值是从图框中心点到照相机位置所形成向量的 x、y 和 z 坐标。

3.1 梯度向量

梯度 (gradient) 是优化问题中的重要概念，几乎所有优化方法都需要讨论梯度。本节首先用直观的方法介绍梯度。如图3.1所示，在坡面A点处放置一个小球，轻轻松开手的一瞬间，小球沿着坡面最陡峭方向滚下，瞬间滚动方向便是**梯度下降方向** (direction of gradient descent)。数学中，此方向的反方向即梯度方向，也称作**梯度上升方向**。

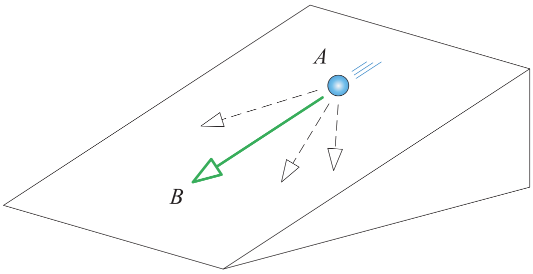


图3.1　梯度方向原理

丛书第一册第6章讲解**方向微分** (directional derivative) 时，简单聊过图3.2。曲面上，经过P点有无数条切线，l_{x1}和l_{x2}为P点处沿着x方向的微分方向，l_{y1}和l_{y2}为P点处沿着y方向的微分方向。l_{h2}为下降最快方向，l_{h1}为上升最快方向，即本节要讲的梯度方向。l_{c1}和l_{c2}方向是和等高线相切的方向，沿着这两个方向微小移动，在曲面上高度不会变化。在此基础上，本节要深入介绍梯度和一些简单应用。从书第三册第12章引入过**倒三角微分算子** (Nabla symbol) ∇，它也叫Nabla算子。本节开始用∇来表达梯度运算：

$$\operatorname{grad} f = \nabla f \tag{3.1}$$

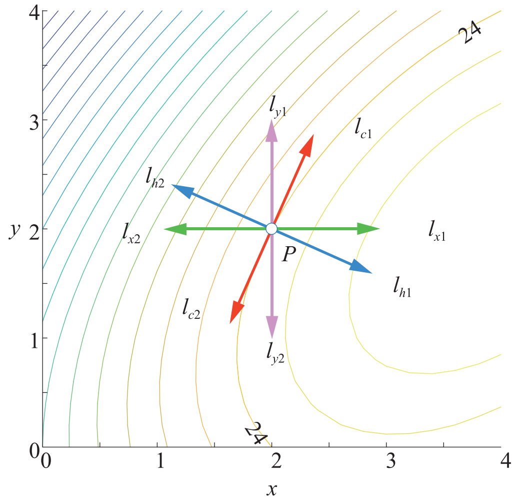


图3.2　曲面投影到x-y平面的等高线和P点的几条个性切线 (图像来自丛书第一册第6章)

这一小节，$[x_1, x_2]$ 表示 $[x, y]$，二元函数 $f(x_1, x_2)$ 写作 $f(\boldsymbol{x})$。

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) \tag{3.2}$$

x_1-x_2平面上，P (x_{P1}, x_{P2}) 点处，任意偏离P点的微小移动 (Δx_1, Δx_2) 都导致 $f(\boldsymbol{x})$ 大小发生变化，对应等高线数值变化。

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\boldsymbol{x}_Q) - f(\boldsymbol{x}_P) \\ &= f(\boldsymbol{x}_P + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_P) \\ &= f(x_{P1} + \Delta x_1, x_{P2} + \Delta x_2) - f(x_{P1}, x_{P2})\end{aligned} \tag{3.3}$$

比如，当前点位于P点，微小移动后到达Q点，如图3.3所示。

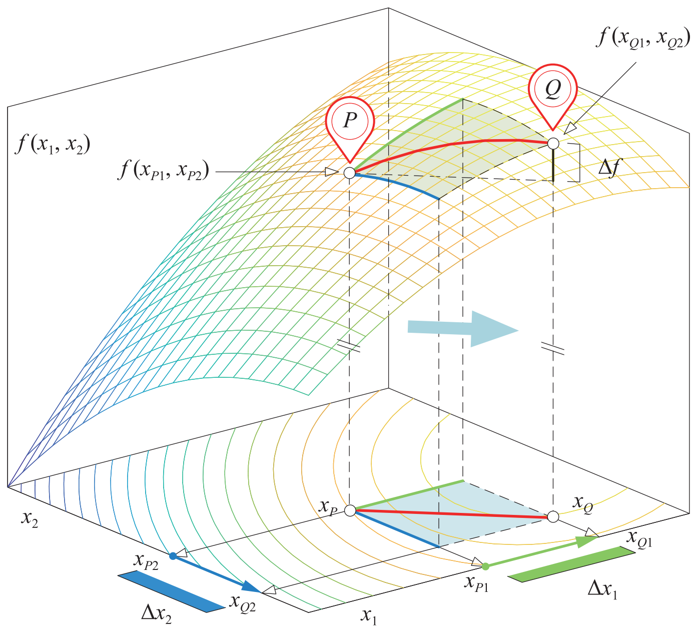


图3.3　曲面从P点移动到Q点对应位置变化

用一阶偏微分做近似求解Δf:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\boldsymbol{x}_P + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_P) \\ &\approx \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\right|_P \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\right|_P \Delta x_2\end{aligned} \tag{3.4}$$

上式便是丛书之前讲过的多元函数泰勒一阶展开。曲面上点P (x_{P1}, x_{P2}) 在x_1 和 x_2 两个维度上的偏微分，分别为该点处x_1-z平面和x_2-z平面内切线的斜率，如图3.4所示。

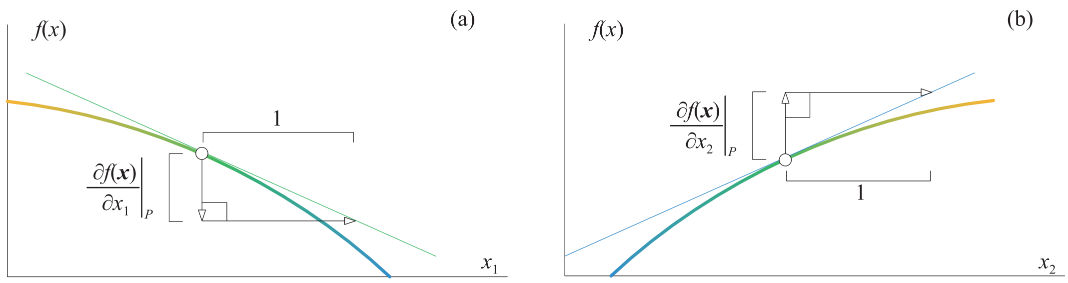


图3.4　偏微分和切线斜率关系

从几何角度来讲，P点处曲面切面替代曲面本身，估算函数值。图3.5给出这一过程。投影位移量

$(\Delta x_1, \Delta x_2)$ 一致情况下，沿着曲面，从P点运动到Q点；而沿着P点切面，移动到了R点。R点对应高度与Q点高度近似。R点和Q点的高度差是估算误差。图3.6为图3.5局部放大图，这张图更清晰地展示了估算过程。

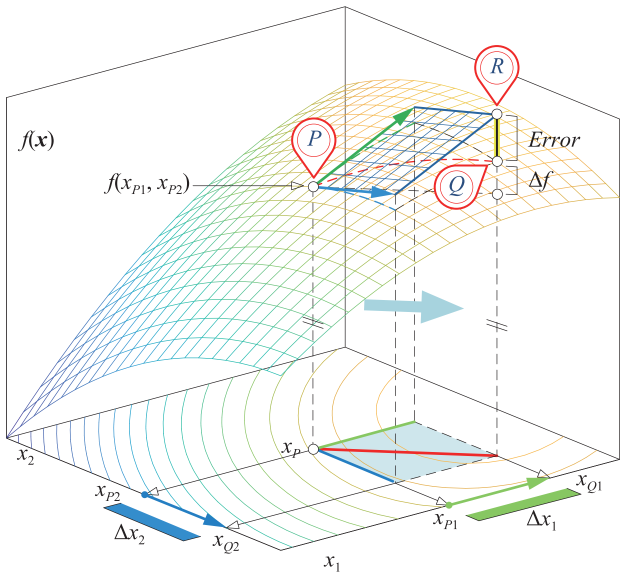


图3.5　曲面从P点线性移动到R点对应位置变化

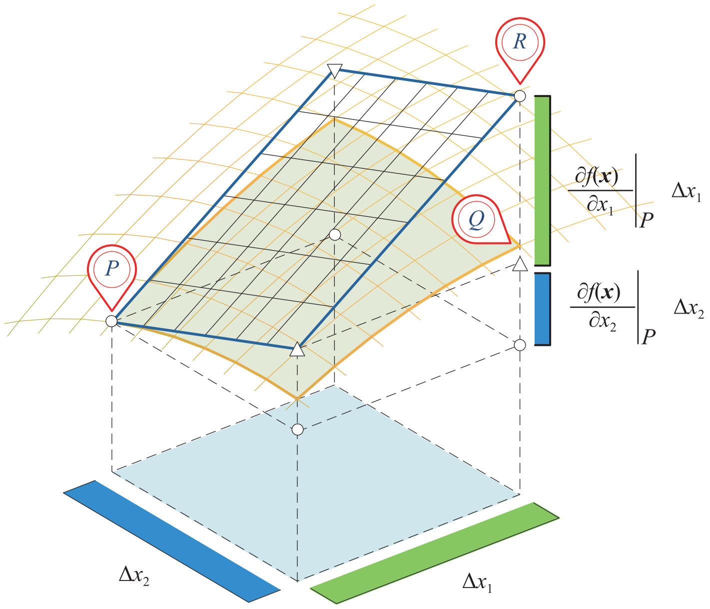


图3.6　二元函数一阶泰勒展开估算

这种估算实际上相当于两个向量内积关系，这两个向量分别如下：

$$\left(\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\right|_P, \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\right|_P \right), \quad (\Delta x_1, \Delta x_2) \tag{3.5}$$

向量$(\Delta x_1, \Delta x_2)$决定了P点方向的微分方向，如图3.7所示。

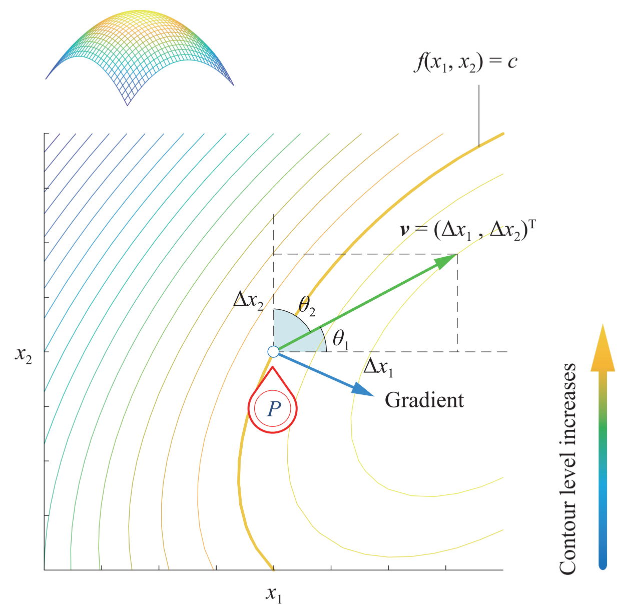


图3.7　x_1-x_2平面上方向微分

在没有特殊说明情况下，$f(x_1, x_2)$ 梯度一般表达为列向量：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

梯度也可用行向量表达，如下：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$f(x_1, x_2)$ 某一点P处梯度为：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_P) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_P} \tag{3.8}$$

用另外一种方法解释。

x_1-x_2平面上，给定一个方向，用向量 $\boldsymbol{v}$ 表示：

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} \tag{3.9}$$

沿着$\boldsymbol{v}$方向对$f(\boldsymbol{x})$ 求解方向微分：

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = \nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{h} \tag{3.10}$$

若$\boldsymbol{v}$为单位向量，即：

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1 \tag{3.11}$$

且，令单位向量$\boldsymbol{v}$为：

$$\boldsymbol{v} = (\cos\theta_1, \cos\theta_2)^{\mathrm{T}} \tag{3.12}$$

图3.7给出了θ_1和θ_2角度定义。方向导数和偏导之间关系为：

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\cos\theta_1 + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\cos\theta_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.13}$$

三元函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 空间中，同样获得类似结论：

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\cos\theta_1 + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\cos\theta_2 + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}\cos\theta_3 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 \\ \cos\theta_3 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.14}$$

多元函数也可得出类似结论。根据梯度和向量$\boldsymbol{v}$定义，这样表达$f(\boldsymbol{x})$ 在$\boldsymbol{v}$方向微分：

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v} \tag{3.15}$$

根据向量点乘法则：

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) &= \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{x})\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cos\left(\nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\right) \\ &= \|\nabla f(\boldsymbol{x})\| \cos\left(\nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

若θ = 90°，则说明方向导数沿着等高线切向方向，函数值不会有任何变化，如图3.8 (a) 和 (b) 所示。若θ = 180°，如图3.8 (c)，则方向导数沿着梯度相反方向，这是函数值下降最快方向。

如图3.8 (d)，θ = 0°，方向导数和梯度同向，这是函数值最快上升方向。这种情况，方向导数和梯度同向，因此向量$\boldsymbol{v}$ 用 $\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)$ 表达：

$$\boldsymbol{v} = \eta \nabla f\left(\boldsymbol{x}\right), \quad \eta > 0 \tag{3.17}$$

因此，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_P + \Delta \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_P) &= f(x_{P1} + \Delta x_1, x_{P2} + \Delta x_2) \\ &\approx \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \eta \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ &= \eta \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|^2 > 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

本册优化部分还会继续深入讨论该性质。

当θ为锐角，函数变化大于0，函数值上升，如图3.8 (e)；当θ为钝角，函数变化小于0，函数值

下降，如图3.8(f)。另外，$\nabla f(\boldsymbol{x})$ 和向量$\boldsymbol{v}$的关系，和本书上一章介绍的**投影** (projection) 几乎完全一致。

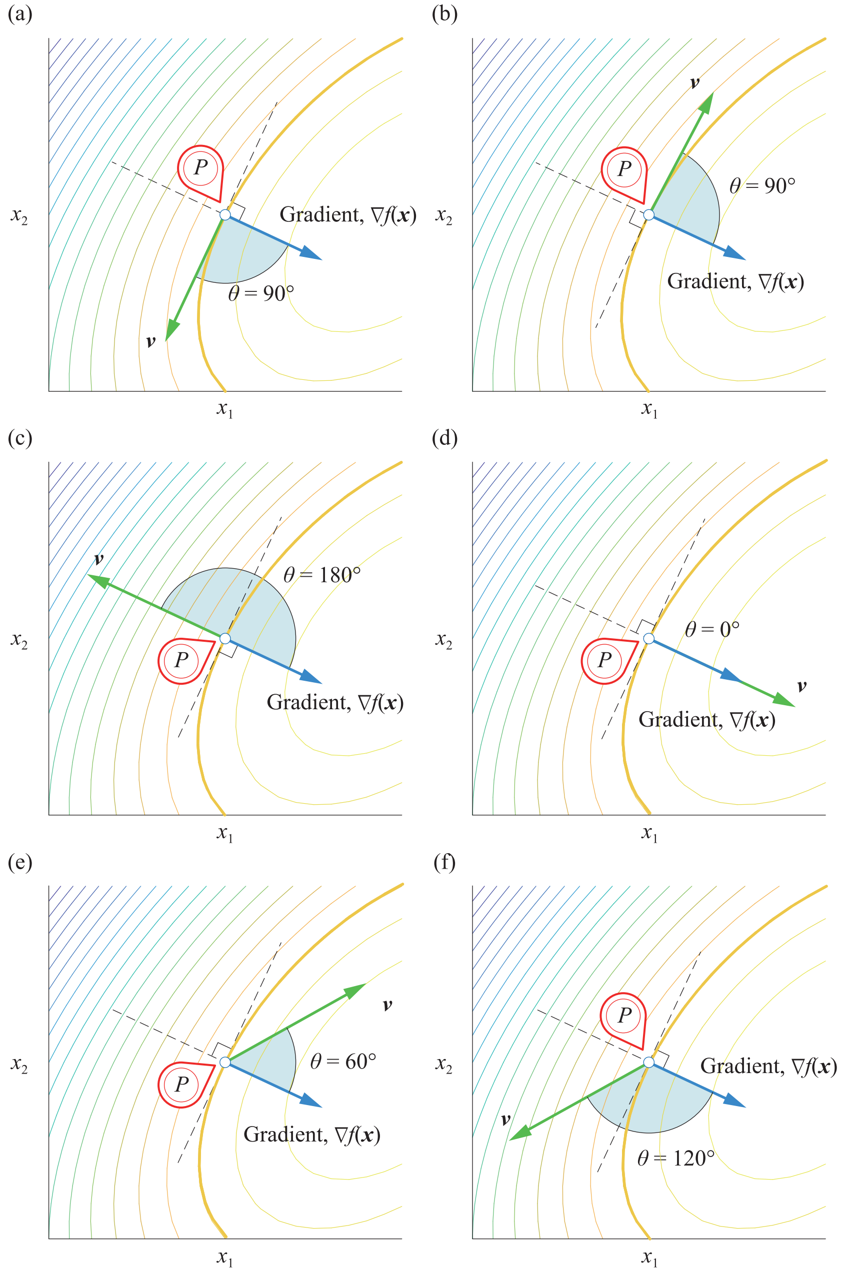


图3.8　x_1-x_2平面上六种方向微分情况

梯度向量模的大小决定了函数不同点上的最大变化率。换句话说，函数在不同点的最大变化率很可能不同。函数于该点处上升或者下降的幅度在下式限制范围之内：

$$-\left\|\nabla f(\boldsymbol{x})\right\| \leqslant \nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \left\|\nabla f(\boldsymbol{x})\right\| \cos\left(\nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\right) \leqslant \left\|\nabla f(\boldsymbol{x})\right\| \tag{3.19}$$

上式性质叫作Cauchy-Schwarz不等式。如图3.8所示，对于二元函数，x_1-x_2平面上，坐标轴刻度比

例为1:1时，任意一点函数梯度方向和函数等高线切线方向相垂直。另外，优化问题中，一般采用**归一化梯度向量** (normalized gradient vector)：

$$\nabla f(\boldsymbol{x})_n = \frac{\nabla f(\boldsymbol{x})}{\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|} \tag{3.20}$$

归一化向量模为1：

$$\|\nabla f(\boldsymbol{x})_n\| = 1 \tag{3.21}$$

函数梯度向量方向和大小随着位置变化，因此，在当前点上升或下降方向，一般不是相邻点上升或者下降最快方向。下面通过图像讲解这一点。图3.9展示了不同高度 (−2, −4, −6和 −8) 等高线上不同位置点梯度向量的大小和方向。如前文讨论内容，对于该二次曲面，越靠近极值点，梯度向量越小。但此结论不适用于锥面，锥面梯度向量的模，除极点外，完全相同。由图3.9看到，当等高线高度相同时，等高线密集处 (坡度越陡峭)，即梯度向量模较大位置。请读者注意，图3.9中四个分图中的梯度经过了同样比例缩放。以下代码获得图3.9。

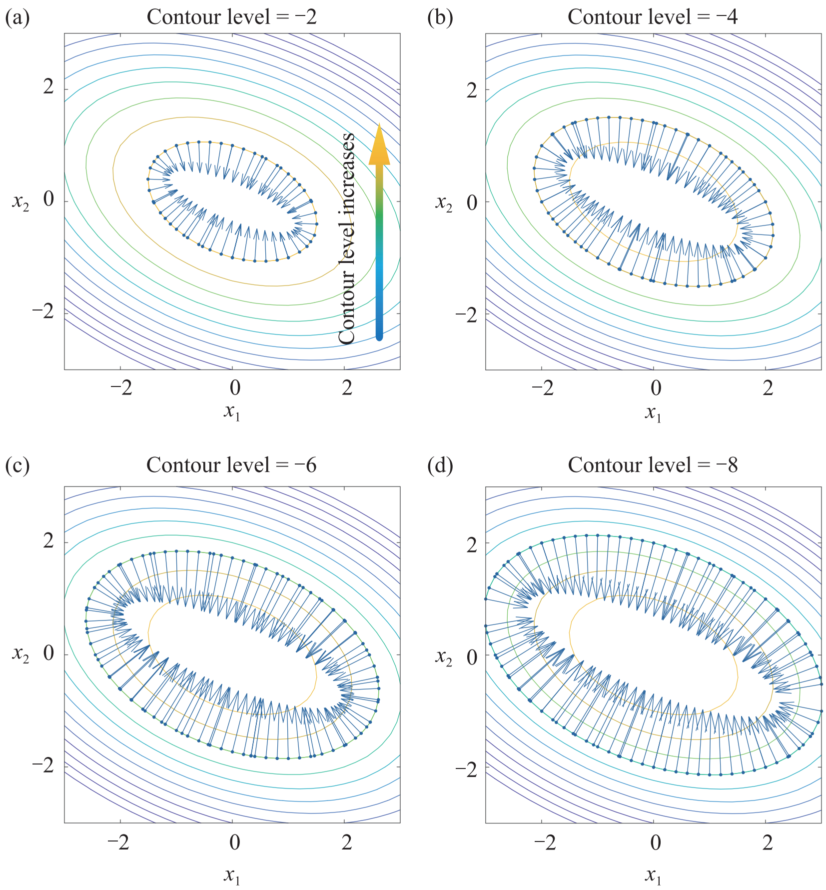


图3.9　不同高度等高线上梯度向量分布情况

```
B4_Ch3_1.m

clc; close all; clear all
```

```
syms x1 x2

f = -x1^2 - 2*x2^2 - x1*x2;
g = gradient(f, [x1, x2])

[XX1, XX2] = meshgrid(-3:0.4:3,-3:0.4:3);
[XX1_fine, XX2_fine] = meshgrid(-3:.2:3,-3:.2:3);

contour_f = subs(f, [x1 x2], {XX1_fine,XX2_fine});

figure(1)
% c_start = floor(min(double(contour_f(:))));
% c_end   = floor(max(double(contour_f(:))));
% c_levels = c_start:(c_end-c_start)/20:c_end;

c_start = -24; c_end   = 0;
c_levels = c_start:2:c_end;

ii = 1:4;

for i = ii

    subplot(2,2,i)
    plot_fig(g,XX1_fine,XX2_fine,contour_f,c_levels,i)

end

function plot_fig(g,XX1_fine,XX2_fine,contour_f,c_levels,i)
syms x1 x2
contour(XX1_fine,XX2_fine,double(contour_f),c_levels); hold on

c_level = c_levels(end-i); %  -1, -2, -3, - 4
[contour_loc,~] =
contour(XX1_fine,XX2_fine,double(contour_f),[c_level,c_level],'L
ineWidth',3);

x1_contour_c = contour_loc(1,2:end);
x2_contour_c = contour_loc(2,2:end);

dFF_dx1 = subs(g(1), [x1 x2], {x1_contour_c x2_contour_c});
dFF_dx2 = subs(g(2), [x1 x2], {x1_contour_c x2_contour_c});

scale_factor = 0.15;
h = quiver(x1_contour_c, x2_contour_c,
double(dFF_dx1)*scale_factor, double(dFF_dx2)*scale_factor);
h.AutoScale = 'off';
```

```
h.Color = [0,96,166]/255;
h.Marker = '.';
h.MarkerSize = 3;
h.MaxHeadSize = Inf;

xlabel('${x_1}$','Interpreter','latex');
ylabel('${x_2}$','Interpreter','latex');
zlabel('${f(x_1,x_2)}$','Interpreter','latex')
title(['Contour level = ',num2str(c_level)])
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman','fontsize',10)
grid off; axis equal
xlim([-3,3]); ylim([-3,3]);
caxis([-18 0])
end
```

有了这些向量计算基础内容，下面几节讲解直线、曲线、平面和曲面法向量和切向量性质。

3.2 直线

从书第一册第5章介绍了一次函数的几种定义方式，本节将采用向量方式定义一次函数。首先用法向量方法定义平面直线。

如图3.10所示，直线法向量为$\boldsymbol{n}=[a, b]^{\mathrm{T}}$，$A$点为直线上一个定点，它的坐标为$(x_0, y_0)$。直线上任意一点$P(x, y)$和$A$构成向量$[x-x_0, y-y_0]^{\mathrm{T}}$垂直于法向量$\boldsymbol{n}$；因此，两者内积为标量0，即：

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

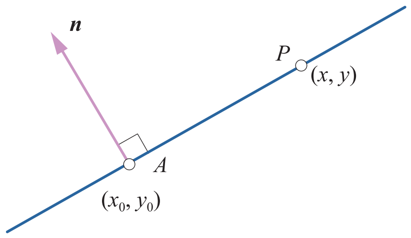


图3.10　用法向量和定点来定义平面直线

上式即直线法向量和直线上一点构造直线函数。

如图3.11所示，定点$A(x_0, y_0)$位于直线上，P点为直线上任意一点。直线切向量为$\boldsymbol{\tau}=[a, b]^{\mathrm{T}}$，平行于$A$和$P$构成的向量。

$$
\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}
\tag{3.23}
$$

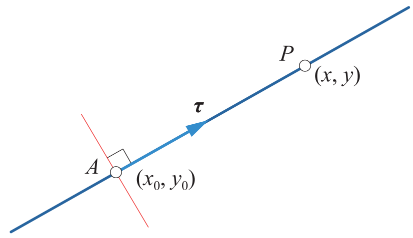
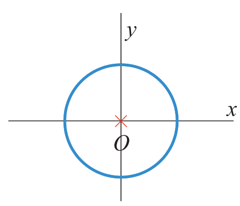
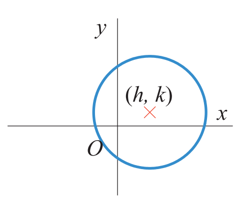
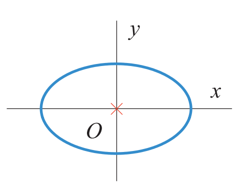
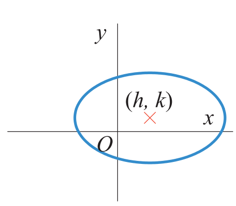


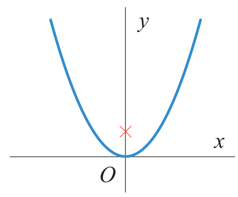
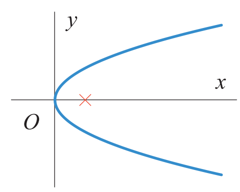
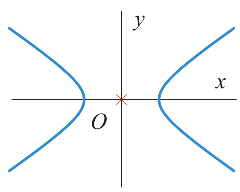
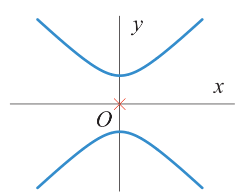
图3.11　用切向量和定点来定义平面直线

上式中，t为任意实数。上式实际上是一个**参数方程** (parametric equation)。x-y平面直角坐标系中，任意一点 (x, y) 横纵坐标都是t的函数。本册很多章节会使用参数方程绘制各种曲线，表3.1总结了常用圆锥曲线参数方程。

表3.1　常见圆锥曲线参数方程

形状	参数方程
	圆心在原点，半径为r圆形 $x = r\cos(t),\quad y = r\sin(t)$ $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad y = \dfrac{2t}{1+t^2}$
	圆心在 (h, k)，半径为r圆形 $x = h + r\cos(t),\quad y = k + r\sin(t)$
	椭圆，中心在原点，半长轴为a，半短轴为b $x = a\cos(t),\quad y = b\sin(t)$ $x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad y = b\dfrac{2t}{1+t^2}$
	椭圆，中心在 (h, k)，半长轴为a，半短轴为b $x = h + a\cos(t),\quad y = k + b\sin(t)$

续表

形状	参数方程
	抛物线，焦点位于y轴 $x=t,\quad y=at^2$
	抛物线，焦点位于x轴 $x=at^2,\quad y=t$
	双曲线，焦点位于x轴 $x=a\sec(t),\quad y=b\tan(t)$ $x=a\dfrac{1+t^2}{1-t^2},\quad y=b\dfrac{2t}{1-t^2}$
	双曲线，焦点位于y轴 $x=a\tan(t),\quad y=b\sec(t)$ $x=a\dfrac{2t}{1-t^2},\quad y=b\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

参数方程用来绘制复杂平面或者空间曲线，如下例：

$$\begin{cases} x=\cos(at)-\cos(bt)^j \\ y=\sin(ct)-\sin(dt)^k \end{cases} \tag{3.24}$$

当a、b、c、d、j和k取不同值时，上述参数方程在平面上绘制各种复杂曲线，如图3.12所示。如下代码绘制图3.12。

```
B4_Ch3_2.m

figure(1)

subplot(3,2,1)
a = 1; b = 80; c = 1; d = 80; j = 3; k = 3;
plot_curve (a, b, c, d, j, k)

subplot(3,2,2)
a = 80; b = 1; c = 1; d = 80; j = 3; k = 3;
plot_curve (a, b, c, d, j, k)
```

```
subplot(3,2,3)
a = 1; b = 80; c = 1; d = 80; j = 3; k = 4;
plot_curve (a, b, c, d, j, k)

subplot(3,2,4)
a = 80; b = 1; c = 1; d = 80; j = 3; k = 4;
plot_curve (a, b, c, d, j, k)

subplot(3,2,5)
a = 1; b = 80; c = 80; d = 80; j = 3; k = 4;
plot_curve (a, b, c, d, j, k)

subplot(3,2,6)
a = 1; b = 80; c = 80; d = 1; j = 3; k = 4;
plot_curve (a, b, c, d, j, k)


function plot_curve (a, b, c, d, j, k)

t = 0:0.001:2*pi;
x = cos(a*t) - cos(b*t).^j;
y = sin(c*t) - sin(d*t).^k;
plot(x,y)
daspect([1,1,1])
set(gca,'xtick',[])
set(gca,'ytick',[])
set(gca,'ztick',[])
axis off
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
title({['a = ',num2str(a),'; b = ',num2str(b),...
    '; c = ',num2str(c),'; d = ',num2str(d),';'],...
    ['j = ',num2str(j),'; k = ',num2str(k)]})
end
```

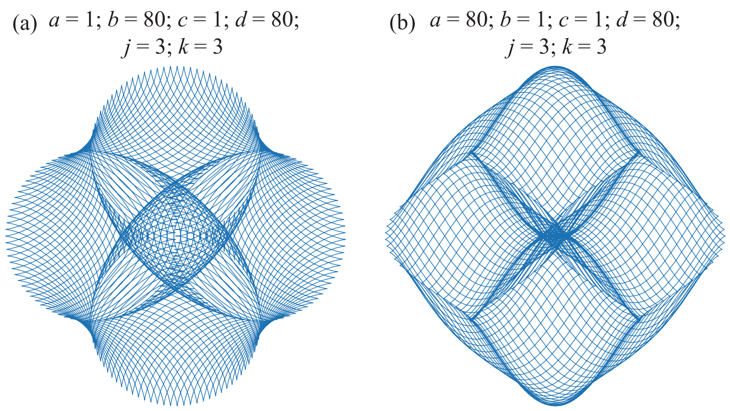


图3.12　平面参数方程绘制复杂曲线

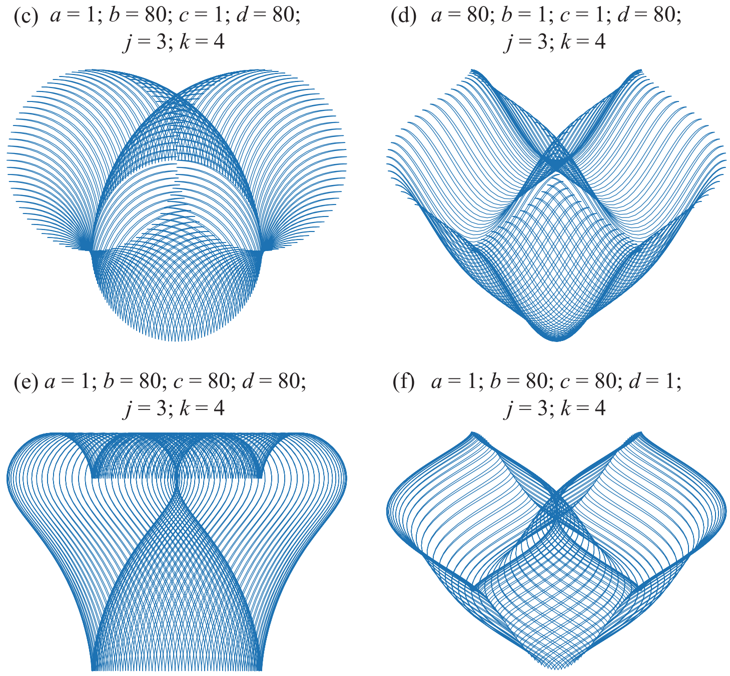


图3.12 (续)

一元一次函数 $y=f(x)=kx+c$，用其一阶导数构造函数法向量和切向量。首先，构造如下二元 $F(x,y)$ 函数：

$$F(x,y)=f(x)-y=0 \tag{3.25}$$

$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处法向量，即平面上$f(x)$ 法向量$\boldsymbol{n}$通过下式求解：

$$\boldsymbol{n}_{(x_0,y_0)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x}\\\dfrac{\partial F}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\-1\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

如图3.13(a) 所示，发现法向量$\boldsymbol{n}$和点位置无关，因此，直线上任意一点法向量均可用上式表达。另外，法向量$\boldsymbol{n}$即$F(x,y)$ 梯度向量。

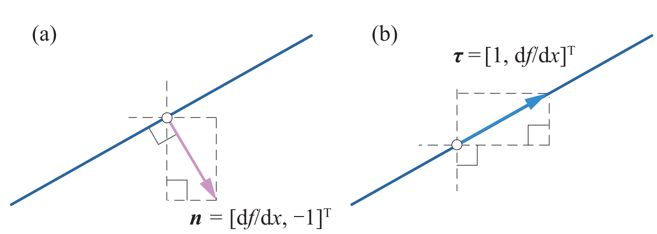


图3.13　平面直线法向量和切向量

已经知道函数$f(x)$ 一阶导数即切线斜率，因此，很容易用一阶导数$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$来表达直线切线向量：

$$\boldsymbol{\tau}_{(x_0,y_0)}=\begin{bmatrix}1\\\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

如图3.13(b) 所示，同样发现，直线切向量和直线具体点坐标无关。图3.14展示了另外一种法向量和切向量定义。图中向量方向和图3.13相反。

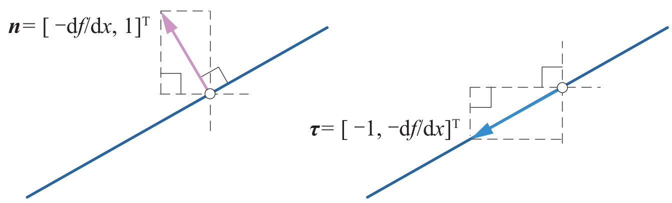


图3.14　平面直线法向量和切向量，另外一种定义

如图3.15所示，平面内任意一点$Q(x_Q, y_Q)$ 到直线$ax + by + c = 0$距离为d，d计算式如下：

$$d = \frac{\left|ax_Q + by_Q + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.28}$$

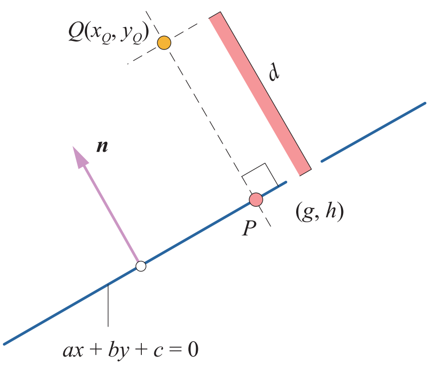


图3.15　平面任意一点到直线距离

有兴趣的读者用上一章投影内容介绍方法来推导得到上式。

过空间一点和已知直线平行直线唯一，即一点和空间向量确定一条直线。如图3.16给出空间点A坐标为 (x_0, y_0, z_0)，直线切线向量$\boldsymbol{\tau} = [m, n, p]^{\mathrm{T}}$。$P(x, y, z)$ 为直线上任意一点，向量$PA(x - x_0, y - y_0, z - z_0)^{\mathrm{T}}$ 平行于$\boldsymbol{\tau}$，由此得到下式：

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad m, n, p \neq 0 \tag{3.29}$$

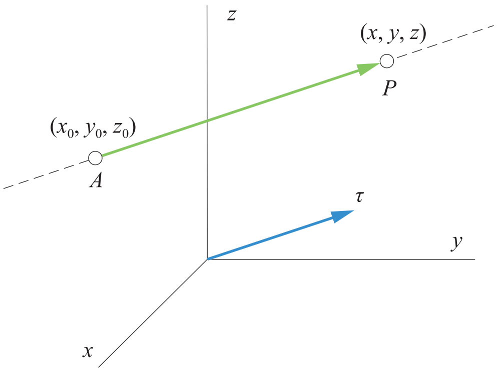


图3.16　空间直线定义

上式类似丛书第一册第5章中介绍空间直线定义方法。明显区别是，这里明确了直线方向向量和直线本身关系。引入比例系数t，可构造如下方程：

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \tag{3.30}$$

上式，适用于m、n或p为0情况。比例系数t便是空间直线参数方程变量。

3.3 曲线

对于普通一元函数光滑 $y = f(x)$，在点$P(x_0, y_0)$ 处，利用$f(x)$ 一阶导数，得到P点处切线斜率。$f(x)$ 在P点切线方程如下：

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3.31}$$

如图3.17所示，很容易地得到$f(x)$ 在P点 (x_0, y_0) 切向量：

$$\boldsymbol{\tau}_{(x_0,y_0)} = \left(1, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \tag{3.32}$$

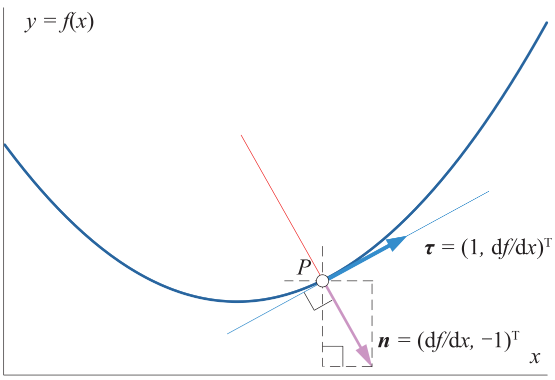


图3.17　函数$f(x)$ 上P点切向量和法向量

和平面直线不同，切向量随着P点位置变化而变化。和上一节平面直线一样，同样构造如下二元$F(x, y)$ 函数：

$$F(x, y) = f(x) - y = 0 \tag{3.33}$$

P点 (x_0, y_0) 法向量：

$$\boldsymbol{n}_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, -1\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \tag{3.34}$$

同样，法向量随着P点位置变化而变化。以如下函数为例，用diff() 和quiver() 函数计算一阶导数，并绘制函数法向量和切向量：

$$f(x)=\cos(2x)x \tag{3.35}$$

$f(x)$ 一阶导数如下：

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\cos(2x)-2x\sin(2x) \tag{3.36}$$

P点 (x_0, y_0) 法向量表达式如下：

$$\boldsymbol{n}_{(x_0,y_0)}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=\left(\cos(2x)-2x\sin(2x),-1\right)^{\mathrm{T}}\Big|_{(x_0,y_0)} \tag{3.37}$$

P点 (x_0, y_0) 切向量表达式如下：

$$\boldsymbol{\tau}_{(x_0,y_0)}=\left(1,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=\left(1,\cos(2x)-2x\sin(2x)\right)^{\mathrm{T}}\Big|_{(x_0,y_0)} \tag{3.38}$$

丛书第一册第6章中，绘制过函数切线和法线位置图。当时采用gradient()、surfnorm() 和quiver() 等函数。本节采向量解析式和quiver()函数绘制切向量和法向量。图3.18展示x在 [−5, 5] 范围变化时，不同位置法向量和切向量大小和方向。

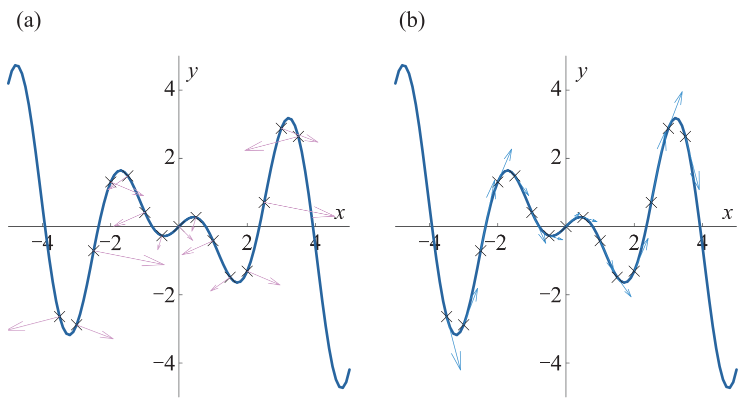


图3.18　函数$f(x)$ 不同点法向量和切向量

以下代码绘制图3.18。

B4_Ch3_3.m

```
clc; close all; clear all
syms f(x)
f(x) = cos(2*x)*x;
df = diff(f,x)

x_fine = -5:0.1:5; x_coarse = -3.5:0.5:3.5;
```

```
f_x_fine = double(subs(f,[x],{x_fine}));
f_x_coarse = double(subs(f,[x],{x_coarse}));
df_x_coarse = double(subs(df,[x],{x_coarse}));

figure(1)
subplot(1,2,1)
plot(x_fine,f_x_fine,'color',[0,96,166]/255); hold on
plot(x_coarse,f_x_coarse,'xk')
quiver(x_coarse,f_x_coarse,...
    df_x_coarse,-1 + 0*df_x_coarse,...
    'color',[255,153,255]/255)
decor

subplot(1,2,2)
plot(x_fine,f_x_fine,'color',[0,96,166]/255); hold on
plot(x_coarse,f_x_coarse,'xk')
quiver(x_coarse,f_x_coarse,...
    1 + 0*df_x_coarse, df_x_coarse,...
    'color',[0,153,255]/255)
decor

function decor()

daspect([1,1,1]); xlim([-5,5]); ylim([-5,5]);
ax = gca; box off; grid off
ax.XAxisLocation = 'origin'; ax.YAxisLocation = 'origin';
yticks([-4:2:4]); xticks([-4:2:4]); xlabel('x'); ylabel('y')

end
```

还有一类重要函数，叫作**隐函数** (implicit function)。通俗地说，因变量隐含在隐函数方程中。比如下式，圆心位于原点单位圆方程：

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.39}$$

上式中，x为自变量，y为因变量；发现x和y并非一一映射关系。本书第1章符号数学运算部分讨论过fimplicit() 和fimplicit3() 函数绘制隐函数平面图形和空间图像。本节下面内容介绍隐函数法向量和法向量。以单位圆方程为例，先构造 $F(x, y)$ 函数，如下：

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3.40}$$

x-y平面，圆上任意一点P点 (x_0, y_0) 法向量表达式如下：

$$\boldsymbol{n}_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = (2x, 2y)^{\mathrm{T}}\Big|_{(x_0,y_0)} \tag{3.41}$$

P点 (x_0, y_0) 切向量表达式如下：

$$\boldsymbol{\tau}_{(x_0,y_0)} = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = (-2y, 2x)^{\mathrm{T}}\Big|_{(x_0,y_0)} \tag{3.42}$$

图3.19展示单位圆上不同位置切向量和法向量，可由以下代码获得。下列代码使用for循环，请读者尝试用向量运算代替for循环。

B4_Ch3_4.m

```
clc; close all; clear all
syms x y
f = x^2 + y^2 - 1;
g = gradient(f, [x, y])

[XX1, XX2] = meshgrid(-3:0.2:3,-3:0.2:3); % 0.4

[XX1_fine, XX2_fine] = meshgrid(-3:.2:3,-3:.2:3);

figure(1)
hold on

thetas = pi/12:pi/6:2*pi;

for ii = 1:length(thetas)
    theta = thetas(ii);
    x0 = cos(theta);
    y0 = sin(theta);
    plot(x0,y0,'xk')
    dFF_dx = subs(g(1), [x y], {x0,y0});
    dFF_dy = subs(g(2), [x y], {x0,y0});

    h1 = quiver(x0,y0,dFF_dx,dFF_dy,...
        'color',[255,153,255]/255)
    h1.AutoScaleFactor = 0.4;
    h2 = quiver(x0,y0,-dFF_dy,dFF_dx,...
        'color',[0,153,255]/255)
    h2.AutoScaleFactor = 0.4;
end

fimplicit(f, [-2 2 -2 2],'color',[0,96,166]/255,'LineWidth',1); hold on
daspect([1,1,1])
xlim([-2.1,2.1]); ylim([-2.1,2.1]);
ax = gca; box off; grid off
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
yticks([-2:1:2]); xticks([-2:1:2])
xlabel('x'); ylabel('y')
```

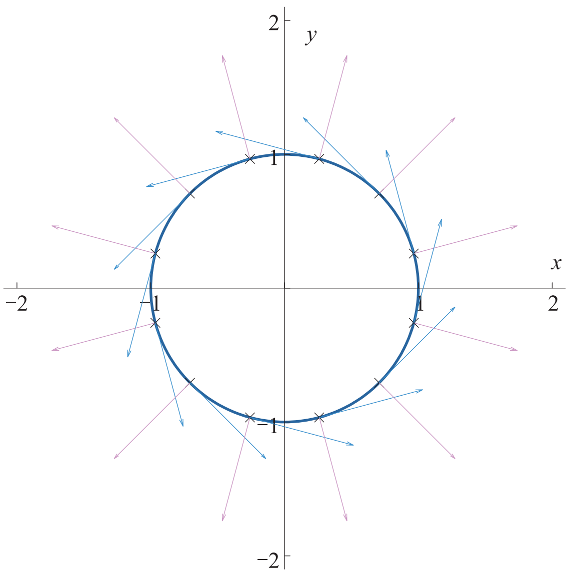


图3.19　单位圆不同点法向量和切向量

3.4 空间平面

过空间一点，与已知直线相垂直平面唯一，即平面上一点和平面法向量确定一个平面。

平面法向量为$\boldsymbol{n}$ = $[m, n, p]^{\mathrm{T}}$，定点A坐标为（x_0, y_0, z_0），平面任意点P坐标为（x, y, z）。如图3.20所示，向量PA垂直于$\boldsymbol{n}$，得到如下平面解析式：

$$\begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{3.43}$$

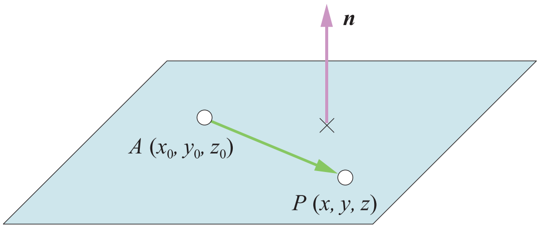


图3.20　空间平面定义

上式整理如下：

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0 \tag{3.44}$$

已知空间平面解析式如下：

$$ax+by+cz+d=0 \tag{3.45}$$

它的任意一点法向量求解用本章前文方法，首先定义一个函数$F(x, y, z)$ 如下：

$$F(x,y,z)=ax+by+cz+d=0 \tag{3.46}$$

A点 (x_0, y_0, z_0) 法向量通过下式求得：

$$\boldsymbol{n}=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.47}$$

从上式看到，平面各个点处法向量完全一致，和曲面上点具体位置无关。相信有些读者已经发现，上式$\boldsymbol{n}$法向量定义和在上一章中介绍梯度几乎一致：

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.48}$$

读者可能会发现，定义平面时通常采用的都是$z = f(x, y)$ 形式，即x和y为自变量，$z = f(x, y)$ 为因变量。假设 $c = -1$，对平面方程式做一个整理，得到下式：

$$\begin{aligned}&ax+by-z+d=0\\&\Rightarrow f(x,y)=z=ax+by+d\end{aligned} \tag{3.49}$$

$f(x, y)$ 在某一点处梯度通过下式表达：

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.50}$$

以上向量相当于空间法向量$\boldsymbol{n}$在平面投影，如图3.21所示。在本章末会结合曲面继续讨论这一话题。

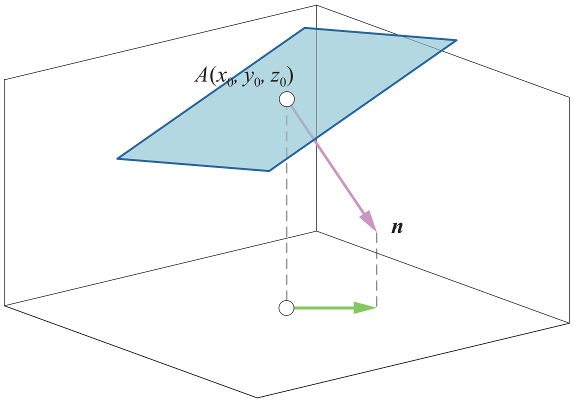


图3.21　空间法向量和平面投影

从书第一册第5章中，展示过四个空间平面。这里，用以上方法求解并绘制法向量，如图3.22所示，发现平面上任意一点法向量平行。从梯度角度来看，这些梯度向量大小相等，方向相同。