

PID 控制基础



1.1 引言

本章将介绍 PID 控制系统的基本思想。首先介绍比例控制、积分控制和微分控制的作用,然后介绍过去几十年中出现的各种整定规则。这些整定规则主要针对一阶延迟系统,使用简单,但一般来说,不能保证控制系统获得满意的性能。本章最后将用仿真实例说明闭环系统性能。

本章适合想了解 PID 控制系统基本知识的读者。通过使用这些整定规则,无须进一步研究,就可以应用于 PID 控制系统。

1.2 PID 控制器的结构

PID 控制器有四种类型:比例(P)控制器、比例-积分(PI)控制器、比例-微分(PD)控制器、比例-积分-微分(PID)控制器。为了了解控制器的作用,本节将讨论每种控制器的结构和 PID 控制器参数。通过讨论,读者对如何在各种应用中使用这些控制器有基本了解。

1.2.1 比例控制器

最简单的控制器是比例控制器。在比例项的作用下,反馈控制信号 $u(t)$ 与反馈误差 $e(t)$ 成比例,计算公式为:

$$u(t) = K_c e(t) \quad (1.1)$$

其中, K_c 为比例增益,反馈误差为给定信号 $r(t)$ 与输出信号 $y(t)$ 之差[即 $e(t) = r(t) - y(t)$]。比例控制系统的结构框图如图 1.1 所示,其中 $R(s)$ 、 $E(s)$ 、 $U(s)$ 、 $Y(s)$ 分别为给定信号、反馈误差、控制信号、输出信号的拉普拉斯变换,简称拉氏变换, $G(s)$ 代表控制对象的传递函数。

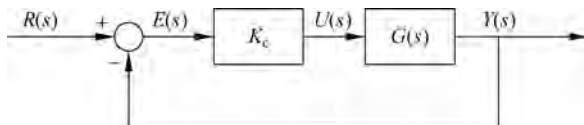


图 1.1 比例控制系统

比例控制器由于结构简单,通常用于系统已知信息少、对控制性能要求不高的场合。由于控制器只有一个待定参数,因此不需要控制对象的详细信息就可以选择 K_c 。

简单的比例控制器局限之一是不能完全消除闭环控制系统的稳态误差。下例可说明这一点。

【例 1.1】 设控制对象为一阶系统,传递函数为:

$$G(s) = \frac{0.3}{s+1} \quad (1.2)$$

对于比例控制器, $K_c > 0$ 。设给定信号为单位阶跃信号,拉氏变换为 $R(s) = 1/s$,求给定信号作用下输出的稳态值。

解 由图 1.1 可知,闭环控制系统从给定信号到控制对象输出信号的传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s)} = \frac{0.3K_c}{s+1+0.3K_c} \quad (1.3)$$

K_c 取任意正值时,闭环系统稳定,其极点由多项式方程^①的解确定:

$$s+1+0.3K_c=0 \quad (1.4)$$

极点为 $-1-0.3K_c$ 。

输出信号的拉氏变换 $Y(s)$ 为:

$$Y(s) = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s)} R(s) = \frac{0.3K_c}{s(s+1+0.3K_c)} \quad (1.5)$$

这里, $R(s) = 1/s$,对稳定的闭环系统应用终值定理:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{0.3K_c}{s(s+1+0.3K_c)} = \frac{0.3K_c}{1+0.3K_c} \quad (1.6)$$

对任意 $0 < K_c < \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \neq 1$,即稳态响应不等于期望输入。图 1.2 给出了比例控制器 K_c 分别为 8 和 80 时的阶跃响应曲线。可以看出,随着比例增益 K_c 增大,闭环系统响应速度变快,稳态值也更接近期望值 1。

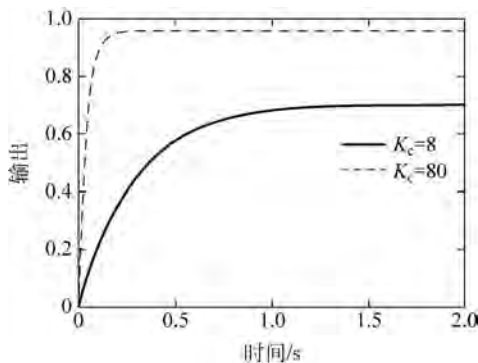


图 1.2 比例控制系统的阶跃响应(例 1.1)

1.2.2 比例-微分控制器

在许多应用中,要实现特定的控制目标,如使系统稳定或使闭环系统产生足够的阻尼,仅使用比例控制器 K_c 还不够。以双积分系统为例,其传递函数为:

^① 这个多项式方程称为闭环特征方程。

$$G(s) = \frac{K}{s^2} \quad (1.7)$$

带比例控制器 K_c 的闭环系统传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c K}{s^2 + K_c K}$$

特征方程为:

$$s^2 + K_c K = 0$$

以一对极点为特征方程的根:

$$\pm j\sqrt{K_c K} = 0$$

可见,无论 K_c 取何值,系统的根都位于复平面的虚轴,系统表现为持续振荡的模式。

现在,在控制信号中增加误差的微分项:

$$u(t) = K_c e(t) + K_c \tau_D \dot{e}(t) \quad (1.8)$$

这里, τ_D 为微分增益。

对式(1.8)进行拉氏变换,得传递函数:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c + K_c \tau_D s$$

这就是我们所说的比例-微分(PD)控制器。

PD 控制器的闭环反馈系统结构图如图 1.3 所示。对于双积分系统即式(1.7),因控制器中增加了微分项,系统的传递函数变成:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_c + K_c \tau_D s)G(s)}{1 + (K_c + K_c \tau_D s)G(s)} \quad (1.9)$$

$$= \frac{K_c K (1 + \tau_D s)}{s^2 + K_c K \tau_D s + K_c K} \quad (1.10)$$

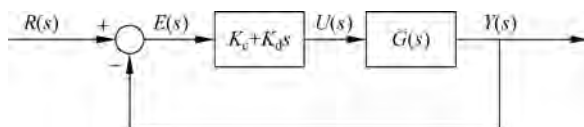


图 1.3 比例-微分控制系统($K_d = K_c \tau_D$)

特征方程为:

$$s^2 + K_c K \tau_D s + K_c K = 0$$

闭环极点由特征方程决定,为:

$$s_{1,2} = \frac{-K_c K \tau_D \pm \sqrt{(K_c K \tau_D)^2 - 4K_c K}}{2}$$

显然,可以选择 K_c 和 τ_D ,使闭环系统获得期望的性能。

值得强调的是,微分项的实现几乎无一例外地与原形式 $K_c \tau_D s$ 不同。一方面是因为微分项 $K_c \tau_D s \left(\frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right)$ 在物理上不可实现,另一方面是因为输出信号 $y(t)$ 的微分会导致测量噪声的放大。因此,对微分项作一点修改。首先,为了避免给定轨迹的阶跃变化引

起的问题,即微分反冲问题[Hägglund(2012)],仅对输出信号 $y(t)$ 进行微分操作;其次,为了避免测量噪声的放大,微分项 $K_c\tau_D s$ 总是与微分滤波器同时使用。

常用的微分滤波器是一阶滤波器,其时间常数是实际微分增益的百分比,关系为:

$$F_D(s) = \frac{1}{\beta\tau_D s + 1} \quad (1.11)$$

这里, β 通常取 0.1(即 10%);如果测量噪声严重, β 可以取大些。

加入微分滤波器 $F_D(s)$ 之后,PD 控制器的输出为:

$$u(t) = K_c(r(t) - y(t)) - K_c\tau_D \frac{dy_f(t)}{dt} \quad (1.12)$$

其中, $y_f(t)$ 为滤波器的输出响应。控制信号的拉氏变换为:

$$U(s) = K_c(R(s) - Y(s)) - \frac{K_c\tau_D s}{\beta\tau_D s + 1}Y(s) \quad (1.13)$$

图 1.4 为带滤波器的 PD 控制器实现结构框图。

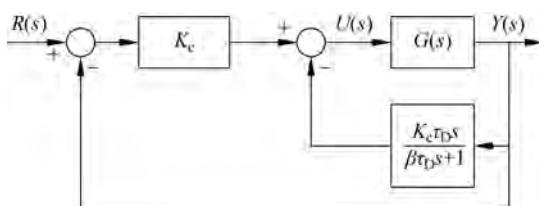


图 1.4 带滤波器的 PD 控制器实现结构框图

如果设计时未考虑微分滤波器的影响,一定程度上可能存在性能不确定性,这对许多应用来说可能并不完美。3.4.1 节将讨论带滤波器的 PD 控制器的设计。

1.2.3 比例-积分控制器

比例-积分(PI)控制器在 PID 控制器中的应用最为广泛。在积分作用下,比例控制器单独作用时存在的稳态误差可完全消除(见例 1.1)。控制器的输出 $u(t)$ 是比例和积分两项作用之和,为:

$$u(t) = K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

这里, $e(t) = r(t) - y(t)$ 为给定信号 $r(t)$ 和输出 $y(t)$ 之间的误差信号, K_c 为比例增益, τ_I 为积分时间常数。参数 τ_I 始终为正,其值与 PI 控制器中积分作用的影响成反比。 τ_I 越小,积分作用越强。

控制器输出的拉氏变换为:

$$U(s) = K_c E(s) + \frac{K_c}{\tau_I s} E(s) \quad (1.15)$$

其中, $E(s)$ 为误差信号 $e(t)$ 的拉氏变换。由此,PI 控制器的传递函数表示为:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_c(\tau_I s + 1)}{\tau_I s} \quad (1.16)$$

图 1.5 给出了 PI 控制系统的框图。

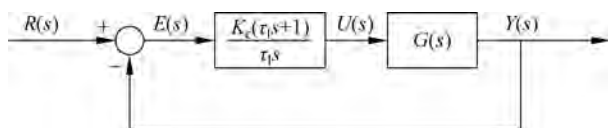


图 1.5 PI 控制系统框图

下面用例子说明带 PI 控制器的闭环控制。为比较起见,与例 1.1 使用相同的控制对象。

【例 1.2】 假设控制对象为一阶系统,传递函数为:

$$G(s) = \frac{0.3}{s+1} \quad (1.17)$$

PI 控制器的比例增益 $K_c = 8$, 积分时间常数 τ_i 分别为 3 和 0.5。分析闭环极点的位置; 求给定信号 $r(t)$ 为单位阶跃信号时, 闭环输出 $y(t)$ 的稳态值。

解 计算给定信号和输出信号之间的闭环传递函数:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (1.18)$$

将式(1.16)和式(1.17)代入上式,得:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.3K_c\tau_i s + 0.3K_c}{\tau_i s^2 + \tau_i(1 + 0.3K_c)s + 0.3K_c} \quad (1.19)$$

系统闭环特性方程为:

$$\tau_i s^2 + \tau_i(1 + 0.3K_c)s + 0.3K_c = 0 \quad (1.20)$$

闭环极点为闭环特性方程的解:

$$s_{1,2} = -\frac{1 + 0.3K_c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 0.3K_c)^2 - \frac{1.2K_c}{\tau_i}} \quad (1.21)$$

如果:

$$(1 + 0.3K_c)^2 - \frac{1.2K_c}{\tau_i} = 0$$

那么系统有两个完全相同的实极点:

$$s_{1,2} = -\frac{1 + 0.3K_c}{2}$$

如果:

$$(1 + 0.3K_c)^2 - \frac{1.2K_c}{\tau_i} > 0$$

那么系统有两个不相同的实极点:

$$s_{1,2} = -\frac{1 + 0.3K_c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 0.3K_c)^2 - \frac{1.2K_c}{\tau_i}}$$

如果:

$$(1 + 0.3K_c)^2 - \frac{1.2K_c}{\tau_i} < 0$$

那么有两个共轭复根:

$$s_{1,2} = -\frac{1+0.3K_c}{2} \pm j \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1.2K_c}{\tau_1} - (1+0.3K_c)^2}$$

只要 $K_c > 0$ 且 $0 < \tau_1 < \infty$, 那么系统稳定。

应用终值定理, 有:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{0.3K_c \tau_1 s + 0.3K_c}{\tau_1 s^2 + \tau_1(1+0.3K_c)s + 0.3K_c} \frac{1}{s} \\ &= \frac{0.3K_c}{0.3K_c} = 1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

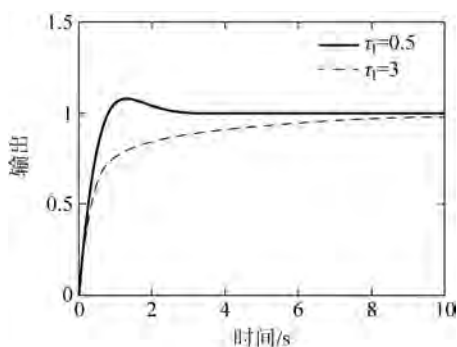


图 1.6 PI 控制系统闭环阶跃响应

其中, 稳态值等于给定信号, 且与积分时间常数 τ_1 的值无关。图 1.6 给出了闭环系统阶跃响应, 其中比例系数 $K_c = 8$, 与例 1.1 相同; 微分系数分别为 $\tau_1 = 3$ 和 $\tau_1 = 0.5$ 。可以看出, 随着微分系数减小, 闭环响应速度变快。这两种情况下的稳态响应都等于 1。

通常情况下, 在阶跃信号作用下, PI 控制系统的响应会出现超调。超调量随着快速性要求的提高而增加, 这会导致 PI 控制性能指标的冲突。一方面, 控制系统响应速度要快; 另一方面, 当给定信号阶跃变化时, 并不希望系统出现超调。

给定信号变化时的超调量问题可以通过稍微改变 PI 控制器的结构得到缓解, 即对输出信号 $y(t)$ 而不是对反馈误差 $e(t) = r(t) - y(t)$ 进行比例操作。具体地说, 控制信号 $u(t)$ 的计算关系为:

$$u(t) = -K_c y(t) + \frac{K_c}{\tau_1} \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (1.23)$$

对式(1.23)进行拉氏变换, 得到控制器输出与给定和输出之间的拉氏变换关系式:

$$U(s) = -K_c Y(s) + \frac{K_c}{\tau_1 s} (R(s) - Y(s)) \quad (1.24)$$

图 1.7 为 PI 闭环控制结构框图。这种实现形式在文献中称为 IP 控制器, 它是 PI 控制器的另一种结构。2.4 节将以两自由度控制系统为例, 研究带滤波器的 PI 控制器, 以下将以例子说明简单修改 PI 控制器的结构如何减少超调效应。

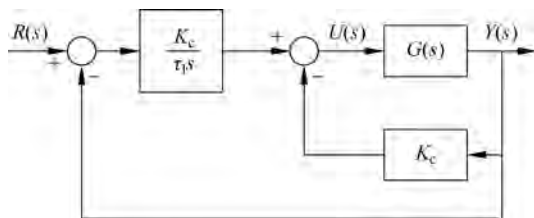


图 1.7 PI 控制器结构框图

【例 1.3】 假设控制对象的传递函数为:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} \quad (1.25)$$

PI 控制器的参数为 $K_c=0.56, \tau_I=8^2$, 分别求原 PI 控制器结构(见图 1.5)和 IP 控制器结构(见图 1.7)两种情况下给定信号 $R(s)$ 和输出信号 $Y(s)$ 之间的闭环传递函数, 并比较它们的闭环阶跃响应。

解 采用原 PI 控制器结构, 计算给定信号 $R(s)$ 与输出信号 $Y(s)$ 之间的闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (1.26)$$

将对象传递函数式(1.25)和 PI 控制器传递函数式(1.16)代入, 得闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c(\tau_I s + 1)}{\tau_I s^2(s+1)^3 + K_c(\tau_I s + 1)} \quad (1.27)$$

采用 IP 结构的 PI 控制器, 控制信号的拉氏变换 $U(s)$ 由式(1.24)定义。将控制信号代入输出的拉氏变换 $Y(s)$ 为:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} U(s) \quad (1.28)$$

重新整理简化, 得到闭环传递函数:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c}{\tau_I s^2(s+1)^3 + K_c(\tau_I s + 1)} \quad (1.29)$$

比较原 PI 控制器结构的闭环传递函数式(1.27)和 IP 结构的闭环传递函数式(1.29), 我们注意到, 两个传递函数具有相同的分母, 不同的是原结构的传递函数在 $-1/\tau_I$ 处有一个零点。这个零点使得原结构闭环阶跃响应可能出现超调。

实际上, 两种结构的闭环阶跃响应在图 1.8 中进行了仿真和比较, 图 1.8 表明原始 PI 闭环控制系统具有较大的超调; 相比之下, PI 闭环控制系统减少了这种超调, 超调量减小的代价是降低了响应速度。

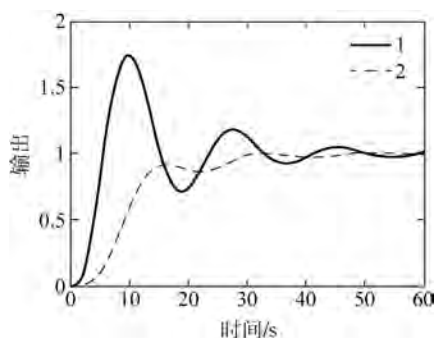


图 1.8 PI 控制系统的闭环阶跃响应(例 1.3)

其中, 1 线表示原始结构的响应; 2 线表示 IP 结构的响应

用 PI 控制结构得到的闭环传递函数也可以理解为一个带滤波器 $H(s) = \frac{1}{\tau_I s + 1}$ 的两自由度控制系统, 这个主题将在 2.4.2 节中进一步讨论。

还有另一种形式的PI控制器,它可能对基于模型的控制器设计(见第3章)更为方便,描述如下:

$$C(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s_c} \quad (1.30)$$

当 K_c 和 τ_I 参数选择为:

$$K_c = c_1; \quad \tau_I = \frac{c_1}{c_0} \quad (1.31)$$

这种形式的PI控制器与原PI控制器结构相同。

1.2.4 PID 控制器

PID 控制器由三项组成:比例(P)项、积分(I)项、微分(D)项。理想情况下,PID 控制器的输出 $u(t)$ 是三项的总和:

$$u(t) = K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \quad (1.32)$$

其中, $e(t) = r(t) - y(t)$ 为给定信号 $r(t)$ 和输出 $y(t)$ 之间的反馈误差信号, τ_D 为微分控制增益。PID 控制器的传递函数为:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (1.33)$$

如果设计合理,则 τ_I 为正。如果 τ_I 为负,则应忽略微分控制项,而选择使用PI控制器。与1.2.2节所述的比例微分控制器类似,对于大多数应用,微分控制仅在输出上应用微分滤波器。因此,控制信号 $U(s)$ 用以下形式表示:

$$U(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) (R(s) - Y(s)) - \frac{K_c \tau_D s}{\beta \tau_D s + 1} Y(s) \quad (1.34)$$

图1.9给出了PID控制器的结构框图。

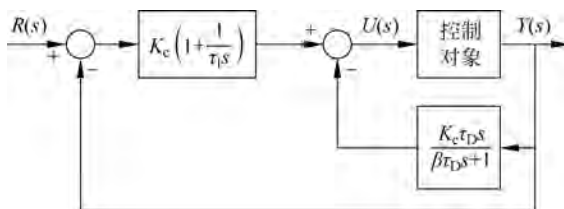


图 1.9 PID 控制器结构框图

为了减少给定信号阶跃变化时输出响应的超调量,PID 控制器中比例项也可以仅作用在对象的输出上。这种情况下,控制信号为:

$$u(t) = -K_c y(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau - K_c \tau_D \frac{dy_f(t)}{dt} \quad (1.35)$$

相应地,控制信号的拉氏变换为:

$$\begin{aligned} U(s) &= -K_c Y(s) + \frac{K_c}{\tau_I s} \left(R(s) - Y(s) - \frac{K_c \tau_D s}{\beta \tau_D s + 1} Y(s) \right) \\ &= \frac{K_c}{\tau_I s} \left(R(s) - Y(s) - \frac{K_c (\tau_D (\beta + 1) s + 1)}{\beta \tau_D s + 1} Y(s) \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

图 1.10 给出了另一种 PID 控制器(称为 IPD 控制器)的结构框图。

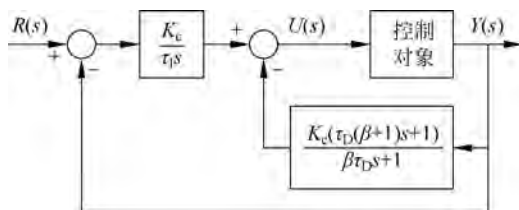


图 1.10 IPD 控制器结构框图

下面用例子说明微分项在闭环控制中的作用。首先在例 1.3 中 PI 控制器的基础上引入一个微分项。

【例 1.4】 设被控对象传递函数为：

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} \quad (1.37)$$

控制器的 PI 部分参数 $K_c = 0.56$, $\tau_I = 8$, 分别选择 $\tau_D = 0.1$ 和 $\tau_D = 1$, 求出如图 1.9 所示 PID 控制系统的闭环传递函数, 并对其性能进行仿真; 求出如图 1.10 所示 IPD 控制系统的闭环传递函数, 并对其阶跃响应进行仿真。

解 控制信号的拉氏变换如式(1.34)所示, 将 $U(s)$ 代入下式:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} U(s) \quad (1.38)$$

整理, 得:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c(\tau_I s + 1)(\beta \tau_D s + 1)}{\tau_I s^2(s+1)^3(\beta \tau_D s + 1) + K_c(\tau_I s + 1)(\beta \tau_D s + 1) + K_c \tau_I \tau_D s^2} \quad (1.39)$$

闭环传递函数有两个零点, 由积分控制产生的 $-\frac{1}{\tau_I}$ 和由微分控制产生的 $-\frac{1}{\beta \tau_D}$ 。图 1.11(a) 分别给出了 $\tau_D = 0.1$ 和 $\tau_D = 1$ 的闭环阶跃响应。随着 τ_D 的增大, 响应的振荡减弱, 但是超调还是比较大。

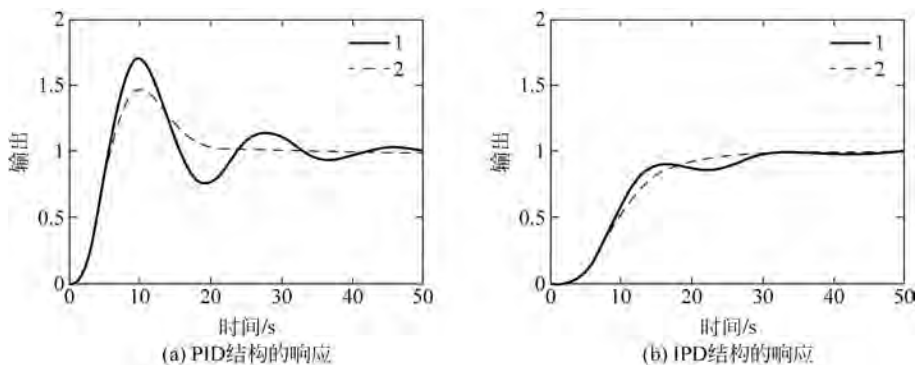


图 1.11 PID 控制系统的阶跃响应(例 1.4)

其中, 1 线代表 $\tau_D = 0.1$; 2 线代表 $\tau_D = 1$ ($K_c = 0.56$, $\tau_I = 8$)

采用如图 1.10 所示的 PID 结构,将式(1.36)控制器输出的拉氏变换代入控制对象的输出[即式(1.38)],求出闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c(\beta\tau_D s + 1)}{\tau_I s^2 (s + 1)^3 (\beta\tau_D s + 1) + K_c(\tau_I s + 1)(\beta\tau_D s + 1) + K_c \tau_I \tau_D s^2} \quad (1.40)$$

这种实现下闭环传递函数的分母与前面相同,但仅有一个由微分控制产生的零点。图 1.11(b)给出了 IPD 结构控制系统的阶跃响应。与前一种情形相比,闭环响应的超调消除了,但是响应速度变慢了。

1.2.5 商用 PID 控制器结构

PID 控制器设计常用以下结构确定参数 K_c 、 τ_I 、 τ_D ,控制器的传递函数 $C(s)$ 为:

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (1.41)$$

本节已说明,实现控制系统有一些不同的 PID 控制器形式,在控制器参数相同的情况下,不同形式控制系统的性能不同。

为了使用户有更多弹性,ABB 公司、西门子公司、美国国家仪器公司等制造商通常采用以下商用 PID 控制器[见 Alfaro 和 Vilanova(2016)],其控制信号的拉氏变换为:

$$U(s) = K_c \left(\gamma_1 R(s) - Y(s) + \frac{1}{\tau_I s} (R(s) - Y(s)) - \frac{\tau_D s}{\beta\tau_D s + 1} (\gamma_2 R(s) - Y(s)) \right) \quad (1.42)$$

这里,系数 $0 \leq \gamma_1 \leq 1$ 、 $0 \leq \gamma_2 \leq 1$ 为给定输入信号的权重,与前面一样,参数 $0 \leq \beta \leq 1$ 决定了合适的微分滤波器作用。有几种常见的参数 γ_1 、 γ_2 、 β 的特殊组合如下:

(1) 当 $\gamma_1 = 1$ 、 $\gamma_2 = 0$ 、 $0 \leq \beta \leq 1$ 时,PID 控制器与如图 1.9 所示的情况相同,其中带滤波器的微分控制仅在输出端实现。

(2) 当 $\gamma_1 = 0$ 、 $\gamma_2 = 0$ 时,PID 控制器变成如图 1.10 所示的 IPD 控制器,其中比例控制和微分控制仅在输出上实现。

(3) 当 $\gamma_1 = 1$ 、 $\gamma_2 = 1$ 、 $0 \leq \beta \leq 1$ 时,PID 控制器的实现对反馈误差进行比例控制、积分控制和带滤波器的微分控制。

(4) 当 $\gamma_1 = 1$ 、 $\gamma_2 = 1$ 、 $\beta = 0$ 时,PID 控制器在实现时将不使用微分滤波器,这将严重放大测量噪声。

值得强调的是,参数 γ_1 和 γ_2 仅影响对给定信号的闭环响应,而不影响闭环系统稳定性。已经检查了 γ_1 和 γ_2 为 0 或 1 的情况,还可以将结果扩展到参数为 0~1 的情况,并得出折中的结果。在了解它们的作用后,可以根据实际情况选择合适的系数。

1.2.6 进一步思考

- (1) PID 控制器用参数 K_c 、 τ_I 、 τ_D 来表示, K_c 、 τ_I 、 τ_D 可能是什么符号?
- (2) 当 K_c 值增大时,比例控制的作用是减小还是增加? 当 τ_I 增大时,积分控制的作用是变小还是增强? 当 τ_D 增大时,微分控制的作用是变小还是增强?
- (3) 积分器在 PID 控制器中的作用是什么?
- (4) 能否只对输出实施积分控制? 如果不能,请解释原因。