

第5章

线性系统的频域分析与校正

第3、4章分别介绍了时域分析法和复域分析法(根轨迹法),本章介绍频域分析法。频域分析法是基于频率特性或频率响应对系统进行分析和设计的一种图解方法,故又称为频率响应法,也称频率法。

频率法的优点是能比较方便地由频率特性来确定系统性能;当系统传递函数难以确定时,可以通过实验法确定频率特性;在一定条件下,还能推广应用于某些非线性系统。因此,频率法在工程中得到了广泛的应用,它也是经典控制理论中的重要内容。

本章将介绍频率响应、频率特性的概念、频率特性的绘制,以及由频率特性分析系统性能、设计控制系统的方法。

5.1 频率特性的基本概念

5.1.1 频率响应

线性控制系统在输入正弦信号时,其稳态输出随频率($\omega=0 \rightarrow \infty$)变化的规律,称为该系统的频率响应。

系统传递函数可以表示为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (5-1)$$

式中, $M(s)$ 表示 $G(s)$ 的分子多项式, $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ 为系统极点。为讨论方便并且不失一般性,设所有极点都是互异的单极点。

当输入信号 $r(t) = X \sin \omega t$ 时,有

$$R(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5-2)$$

输出信号的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{M(\omega)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \\ &= \frac{C_1}{s+p_1} + \frac{C_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s+p_n} + \frac{C_a}{s+j\omega} + \frac{C_{-a}}{s-j\omega} \end{aligned} \quad (5-3)$$

式中, $C_1, C_2, \dots, C_n, C_a, C_{-a}$ 均为待定系数。对式(5-3)求拉普拉斯反变换,可得输出为

$$c(t) = C_1 e^{-p_1 t} + C_2 e^{-p_2 t} + \cdots + C_n e^{-p_n t} + C_a e^{j\omega t} + C_{-a} e^{-j\omega t} \quad (5-4)$$

假设系统稳定,当 $t \rightarrow \infty$ 时,式(5-4)右端除了最后两项外,其余各项都将衰减至0。所以 $c(t)$ 的稳态分量为

$$c_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = C_a e^{j\omega t} + C_{-a} e^{-j\omega t} \quad (5-5)$$

其中,系数 C_a 和 C_{-a} 可如下计算:

$$C_a = G(s) \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{X \cdot G(j\omega)}{2j} \quad (5-6a)$$

$$C_{-a} = G(s) \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{X \cdot G(-j\omega)}{2j} \quad (5-6b)$$



课程视频



MOOC 视频

$G(j\omega)$ 是复函数,可写为

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \quad (5-7)$$

则有

$$\begin{aligned} c_s(t) &= X \frac{|G(j\omega)|}{2j} [e^{j\omega t} e^{j\angle G(j\omega)} - e^{-j\omega t} e^{-j\angle G(j\omega)}] \\ &= X |G(j\omega)| \sin[\omega t + \angle G(j\omega)] \end{aligned} \quad (5-8)$$

式中, $|G(j\omega)|$ 是 $G(j\omega)$ 的幅值; $\angle G(j\omega)$ 是 $G(j\omega)$ 的相角。

式(5-8)表明,线性系统(或元件)在输入正弦信号 $r(t) = X \sin \omega t$ 时,其稳态输出 $c_s(t)$ 是与输入 $r(t)$ 同频率的正弦信号。输出正弦信号与输入正弦信号的幅值之比为 $G(j\omega)$ 的幅值,输出正弦信号与输入正弦信号的相角之差是 $G(j\omega)$ 的相角,它们都是频率 ω 的函数。

5.1.2 频率特性

线性定常系统的频率特性定义为系统的稳态正弦响应与输入正弦信号的复数比。用 $G(j\omega)$ 表示,即

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{X |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}}{X e^{j0}} \\ &= |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= A(\omega) \angle \varphi(\omega) \end{aligned} \quad (5-9)$$

式中, $A(\omega)$ 称为系统的幅频特性, $A(\omega) = |G(j\omega)|$; $\varphi(\omega)$ 称为系统的相频特性, $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ 。

频率特性描述了在不同频率下系统(或元件)传递正弦信号的能力。

由式(5-9)可以看出,若已知系统的传递函数 $G(s)$,只要将复变量 s 用 $j\omega$ 代替,就可求得相应的频率特性 $G(j\omega)$ 。尽管频率特性是一种稳态响应,但系统动态过程的规律也全部寓于其中。因此,与微分方程、传递函数一样,频率特性也能表征系统的运动规律,它也是描述线性控制系统的数学模型形式之一。

例 5-1 RC 电路如图 5-1 所示,求其频率特性。

解 列写电路电压平衡方程

$$u_r(t) = Ri(t) + u_c(t) = RC\dot{u}_c(t) + u_c(t)$$

对上式进行拉普拉斯变换,可以导出电路的传递函数为

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

式中, $T = RC$ 为电路的时间常数。做变量代换 $s = j\omega$,得到电路的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + jT\omega}$$

在此,有关频率特性的推导是在系统稳定的条件下给出的。若系统不稳定,输出响应最终不可能达到稳态过程 $c_s(t)$ 。但从理论上讲, $c(t)$ 中的稳态分量 $c_s(t)$ 总是可以分

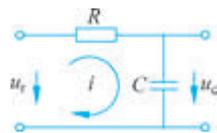


图 5-1 RC 电路

解出来的,所以频率特性的概念同样适合于不稳定系统。

除了用式(5-9)的指数型或幅角型形式描述以外,频率特性 $G(j\omega)$ 还可用实部和虚部形式来描述,即

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (5-10)$$

式中, $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 分别称为系统(或元件)的实频特性和虚频特性。由图 5-2 的几何关系知,幅频、相频特性与实频、虚频特性之间的关系为

$$P(\omega) = A(\omega) \cos\varphi(\omega) \quad (5-11)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin\varphi(\omega) \quad (5-12)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (5-13)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (5-14)$$

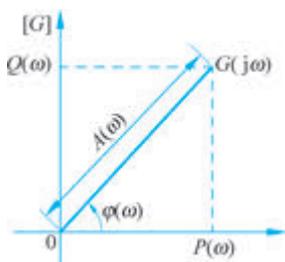


图 5-2 $G(j\omega)$ 在复平面上的表示

5.1.3 频率特性的图形表示方法

用频率法分析、设计控制系统时,常常不是从频率特性的函数表达式出发,而是将频率特性绘制成一些曲线,借助于这些曲线对系统进行图解分析。因此必须熟悉频率特性的各种图形表示方法和图解运算过程。表 5-1 中给出控制工程中常见的 4 种频率特性图示法,其中第 2、3 种图示方法在实际中应用最为广泛。

表 5-1 常见的频率特性曲线及其坐标

序号	名称	图形常用名	坐标系
1	幅频特性曲线 相频特性曲线	频率特性图	直角坐标
2	幅相频率特性曲线	极坐标图、奈奎斯特图	极坐标
3	对数幅频特性曲线 对数相频特性曲线	对数频率特性、伯德图	半对数坐标
4	对数幅相特性曲线	对数幅相图、尼柯尔斯图	对数幅相坐标

1. 频率特性曲线

频率特性曲线包括幅频特性曲线和相频特性曲线。幅频特性是频率特性幅值 $|G(j\omega)|$ 随 ω 的变化规律;相频特性描述频率特性相角 $\angle G(j\omega)$ 随 ω 的变化规律。图 5-1 中所示电路的频率特性如图 5-3 所示。

2. 幅相频率特性曲线

幅相频率特性曲线又称奈奎斯特(Nyquist)曲线(简称幅相特性或奈氏曲线),在复平面上以极坐标的形式表示。由式(5-9)可知,对于某个特定频率 ω_i 下的频率特性 $G(j\omega_i)$,可以用复平面 G 上的向量表示,向量的长度为 $A(\omega_i)$,相角为 $\varphi(\omega_i)$ 。当 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 变化时,向量 $G(j\omega)$ 的端点在复平面 G 上描绘出来的轨迹就是幅相频率特性曲线。通常把 ω 作为参变量标在曲线相应点的旁边,并用箭头表示 ω 增大时特性曲线的走向。

图 5-4 中的实线就是图 5-1 所示电路的幅相频率特性曲线。

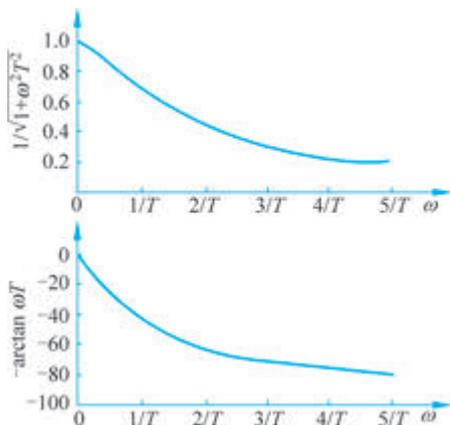


图 5-3 RC 电路的频率特性曲线

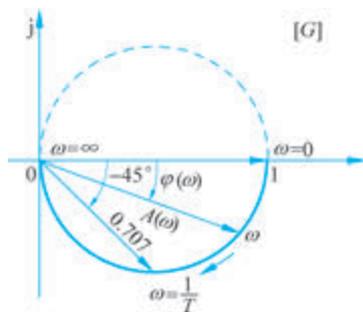


图 5-4 RC 电路的幅相频率特性

3. 对数频率特性曲线

对数频率特性曲线图又叫伯德(Bode)图。它由对数幅频特性和对数相频特性两条曲线组成,是频率法中应用最广泛的一种表示方法。伯德图是在半对数坐标纸上绘制出来的,其横坐标采用对数刻度,纵坐标采用线性的均匀刻度。

在伯德图中,对数幅频特性是 $G(j\omega)$ 的对数值 $20\lg|G(j\omega)|$ 与频率 ω 的关系曲线;对数相频特性则是 $G(j\omega)$ 的相角 $\varphi(\omega)$ 与频率 ω 的关系曲线。在绘制伯德图时,为了作图和读数方便,常将两条曲线画在一起,采用同一横坐标作为频率轴,横坐标虽采用对数刻度,但以 ω 的实际值标定,单位为 rad/s(弧度/秒)。

画对数频率特性曲线时,必须注意对数刻度的特点。尽管在频率 ω 轴上标明的数值是实际的 ω 值,但坐标上的距离却是按 ω 值的常用对数 $\lg\omega$ 来刻度的。坐标轴上任何两点 ω_1 和 ω_2 (设 $\omega_2 > \omega_1$) 之间的距离为 $\lg\omega_2 - \lg\omega_1$,而不是 $\omega_2 - \omega_1$ 。横坐标上若两对频率间距离相同,则其比值相等。

频率 ω 每变化 10 倍称为一个十倍频程,又称“旬距”,记作 dec。每个 dec 沿横坐标走过的间隔为一个单位长度,如图 5-5 所示。

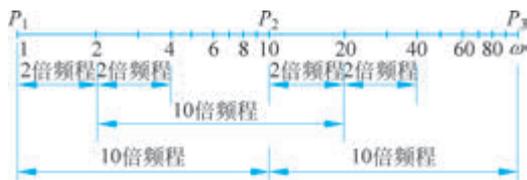


图 5-5 对数分度

对数幅频特性的纵坐标为 $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$,称为对数幅值,单位是 dB(分贝)。由于纵坐标 $L(\omega)$ 已作过对数转换,故纵坐标按分贝值是线性刻度的。 $A(\omega)$ 的幅值每增大 10 倍,对数幅值 $L(\omega)$ 就增加 20dB。

对数相频特性的纵坐标为相角 $\varphi(\omega)$, 单位是($^{\circ}$)度, 采用线性刻度。

图 5-1 所示电路的对数频率特性如图 5-6 所示。Bode 图的绘制方法将在 5.3 节介绍。

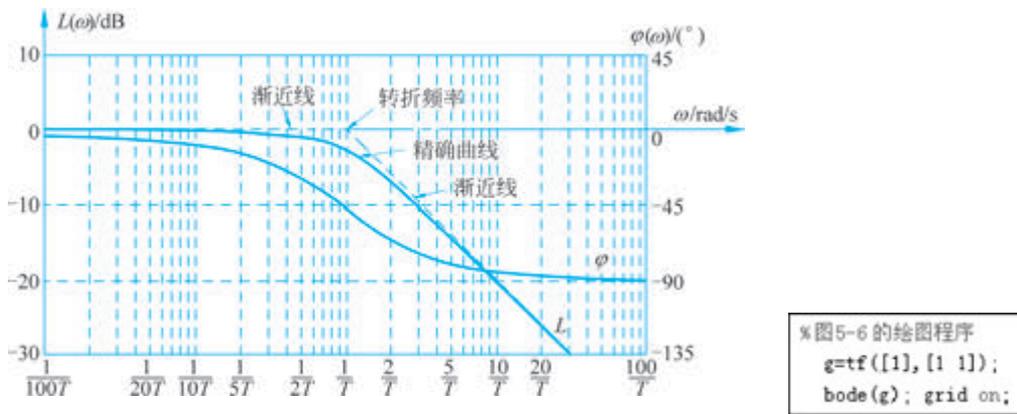


图 5-6 $\frac{1}{j\omega T + 1}$ 的对数频率特性

采用对数坐标图的优点较多, 主要表现在下述几方面。

(1) 由于横坐标采用对数刻度, 相对展宽了低频段(低频段频率特性的形状对于控制系统性能的研究具有较重要的意义), 相对压缩了高频段。因此, 可以在较宽的频段范围中研究系统的频率特性。

(2) 由于对数可将乘除运算变成加减运算。当绘制由多个环节串联而成的系统的对数幅频特性时, 只要将各环节的对数幅频特性叠加起来即可, 从而简化了作图的过程。

(3) 在对数坐标图上, 所有典型环节的对数幅频特性乃至系统的对数幅频特性均可用分段直线近似表示。这种近似具有相当的精确度。若对分段直线进行修正, 即可得到精确的特性曲线。

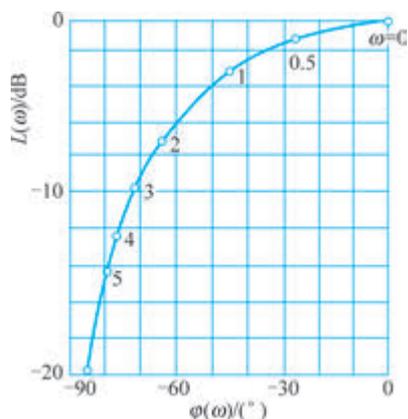
(4) 若将实验所得的频率特性数据整理并用分段直线画出对数频率特性, 很容易写出实验对象的频率特性表达式或传递函数。

4. 对数幅相特性曲线

对数幅相特性曲线又称尼柯尔斯(Nichols)曲线。绘有这一特性曲线的图形称为对数幅相图或尼柯尔斯图。

对数幅相特性曲线是由对数幅频特性和对数相频特性合并而成的曲线。对数幅相坐标的横轴为相角 $\varphi(\omega)$, 单位是($^{\circ}$), 纵轴为对数幅频值 $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$, 单位是 dB。横坐标和纵坐标均是线性刻度。图 5-1 所示电路的对数幅相特性曲线如图 5-7 所示(取 $T=1$)。

采用对数幅相特性可以利用尼柯尔斯图方便地求得系统的闭环频率特性及其有关的特性参数, 用于评估系统的性能。



```
%图5-7的绘制程序
g=tf(1,[1 1]);nichols(g);
grid on;
```

图 5-7 $1/(j\omega + 1)$ 的对数幅相特性曲线

5.2 幅相频率特性 (Nyquist 图)

开环系统的幅相特性曲线是系统频域分析的依据,掌握典型环节的幅相特性是绘制开环系统幅相特性曲线的基础。

在典型环节或开环系统的传递函数中,令 $s = j\omega$,即得到相应的频率特性。令 ω 由小到大取值,计算相应的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$,在 G 平面描点画图,就可以得到典型环节或开环系统的幅相特性曲线。

5.2.1 典型环节的幅相特性曲线

1. 比例环节

比例环节的传递函数为

$$G(s) = K \quad (5-15)$$

其频率特性为

$$\begin{cases} G(j\omega) = K + j0 = K e^{j0} \\ A(\omega) = |G(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = 0^\circ \end{cases} \quad (5-16)$$

比例环节的幅相特性是 G 平面实轴上的一个点,如图 5-8 所示。它表明比例环节稳态正弦响应的振幅是输入信号的 K 倍,且响应与输入同相角。

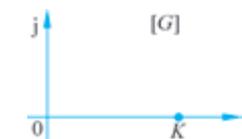


图 5-8 比例环节的幅相频率特性曲线

2. 微分环节

微分环节的传递函数为

$$G(s) = s \quad (5-17)$$

其频率特性为

$$\begin{cases} G(j\omega) = 0 + j\omega = \omega e^{j90^\circ} \\ A(\omega) = \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases} \quad (5-18)$$



课程视频



MOOC 视频

微分环节的幅值与 ω 成正比,相角恒为 90° 。当 $\omega=0 \rightarrow \infty$ 时,幅相特性从 G 平面的原点起始,一直沿虚轴趋于 $+j\infty$ 处,如图 5-9 曲线①所示。

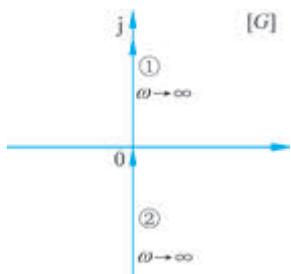


图 5-9 微、积分环节幅相特性曲线

3. 积分环节

积分环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (5-19)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = 0 + \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j90^\circ}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\omega} \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases} \quad (5-20)$$

积分环节的幅值与 ω 成反比,相角恒为 -90° 。当 $\omega=0 \rightarrow \infty$ 时,幅相特性从虚轴 $-j\infty$ 处出发,沿负虚轴逐渐趋于坐标原点,如图 5-9 曲线②所示。

4. 惯性环节

惯性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-21)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + jT\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} e^{-j\arctan T\omega}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases} \quad (5-22)$$

当 $\omega=0$ 时,幅值 $A(\omega)=1$,相角 $\varphi(\omega)=0^\circ$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\omega)=0$, $\varphi(\omega)=-90^\circ$ 。可以证明,惯性环节幅相特性曲线是一个以点 $(1/2, j0)$ 为圆心、 $1/2$ 为半径的半圆,如图 5-10 所示。证明如下:

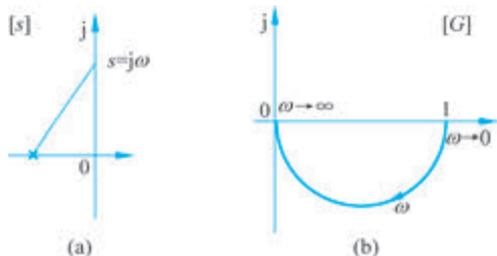


图 5-10 惯性环节的极点分布和幅相特性曲线

```

%图5-10的绘制程序
g=tf(1,[1 1]);
nyquist(g);
axis('square');
grid on;
    
```

设

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + jT\omega} = \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2} = X + jY \quad (5-23)$$

其中

$$X = \frac{1}{1 + T^2 \omega^2} \quad (5-24)$$

$$Y = \frac{-T\omega}{1 + T^2 \omega^2} = -T\omega X \quad (5-25)$$

由式(5-25),可得

$$-T\omega = \frac{Y}{X} \quad (5-26)$$

将式(5-26)代入式(5-24),整理后可得

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (5-27)$$

式(5-27)表明,惯性环节的幅相频率特性符合圆的方程,圆心在实轴上 $1/2$ 处,半径为 $1/2$ 。从式(5-25)还可以看出, X 为正值时, Y 只能取负值,这意味着曲线限于实轴的下方,只是半个圆。

例 5-2 已知某环节的幅相特性曲线如图 5-11 所示,当输入频率 $\omega=1$ 的正弦信号时,该环节稳态响应的相角滞后 30° ,试确定环节的传递函数。

解 根据幅相特性曲线的形状,可以断定该环节传递函数形式为

$$G(j\omega) = \frac{K}{Ts + 1}$$

依题意有 $A(0) = |G(j0)| = K = 10$
 $\varphi(1) = -\arctan T = -30^\circ$

因此得

$$K = 10, \quad T = \sqrt{3}/3$$

所以

$$G(s) = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}s + 1}$$

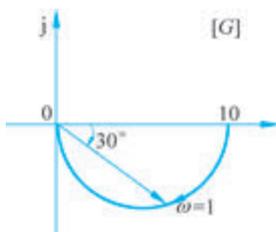


图 5-11 某环节幅相特性曲线

惯性环节是一种低通滤波器,低频信号容易通过,而高频信号通过后幅值衰减较大。

对于不稳定的惯性环节,其传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts - 1} \quad (5-28)$$

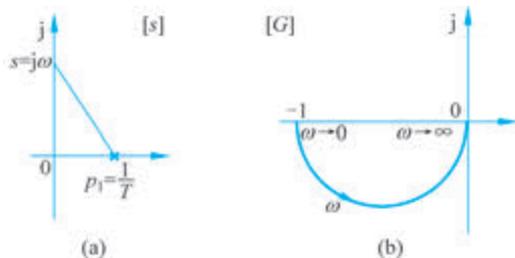
其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{-1 + jT\omega}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan T\omega \end{cases} \quad (5-29)$$

当 $\omega=0$ 时,幅值 $A(\omega)=1$,相角 $\varphi(\omega)=-180^\circ$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\omega)=0$, $\varphi(\omega)=-90^\circ$ 。

分析 s 平面复向量 $\overrightarrow{s-p_1}$ (由 $p_1=1/T$ 指向 $s=j\omega$) 随 ω 增加时其幅值和相角的变化规律, 可以确定幅相特性曲线的变化趋势, 如图 5-12 所示。



```

%图5-12的绘制程序
g=tf(1,[1 -1]);
nyquist(g);
axis('square');
grid on;
    
```

图 5-12 不稳定惯性环节的极点分布和幅相特性曲线

可见, 与稳定惯性环节的幅相特性相比, 不稳定惯性环节的幅值不变, 但相角不同, 相角变化的绝对值比相应的稳定惯性环节要大, 故称其为“非最小相角环节”。

5. 一阶复合微分环节

一阶复合微分环节的传递函数为

$$G(s) = Ts + 1 \quad (5-30)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = 1 + jT\omega = \sqrt{1 + T^2\omega^2} e^{j\arctan T\omega}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan T\omega \end{cases} \quad (5-31)$$

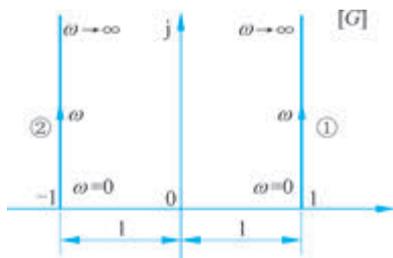


图 5-13 一阶复合微分环节的幅相频率特性曲线

一阶复合微分环节幅相特性的实部为常数 1, 虚部与 ω 成正比, 如图 5-13 曲线①所示。

不稳定一阶复合微分环节的传递函数为

$$G(s) = Ts - 1 \quad (5-32)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = -1 + jT\omega$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = 180^\circ - \arctan T\omega \end{cases} \quad (5-33)$$

其幅相特性的实部为 -1 , 虚部与 ω 成正比, 如图 5-13 曲线②所示。不稳定环节的频率特性都是非最小相角的。

6. 二阶振荡环节

二阶振荡环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2T\zeta s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 0 < \zeta < 1 \quad (5-34)$$

式中, $\omega_n=1/T$ 为环节的无阻尼自然频率; ζ 为阻尼比, $0 < \zeta < 1$ 。相应的频率特性为



课程视频

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{array} \right. \quad (5-35)$$

当 $\omega=0$ 时, $G(j0)=1\angle 0^\circ$ 。

当 $\omega=\omega_n$ 时, $G(j\omega_n)=1/(2\zeta)\angle -90^\circ$ 。

当 $\omega=\infty$ 时, $G(j\infty)=0\angle -180^\circ$ 。

分析二阶振荡环节极点分布以及当 $s=j\omega=j0\rightarrow j\infty$ 变化时, 向量 $\overrightarrow{s-p_1}, \overrightarrow{s-p_2}$ 的模和相角的变化规律, 可以绘出 $G(j\omega)$ 的幅相特性曲线。二阶振荡环节幅相特性曲线的形状与 ζ 值有关, 当 ζ 值分别取 0.4、0.6 和 0.8 时, 幅相特性曲线如图 5-14 所示。

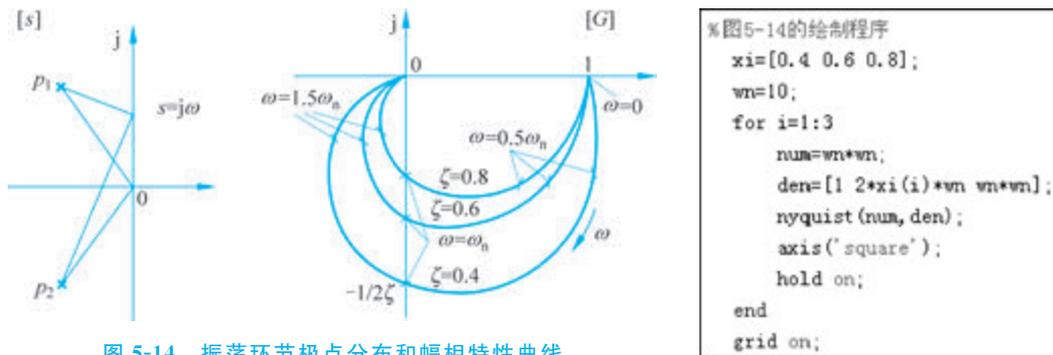


图 5-14 振荡环节极点分布和幅相特性曲线

1) 谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r

由图 5-14 可看出, 当 ζ 值较小时, 随 $\omega=0\rightarrow\infty$ 变化, $G(j\omega)$ 的幅值 $A(\omega)$ 先增加然后再逐渐衰减直至 0。 $A(\omega)$ 达到极大值时对应的幅值称为谐振峰值, 记为 M_r ; 对应的频率称为谐振频率, 记为 ω_r 。以下推导 M_r, ω_r 的计算公式。

求式(5-35)中 $A(\omega)$ 的极大值相当于求 $\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ 的极小值, 令

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right\} = 0$$

推导可得

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad 0 < \zeta < 0.707 \quad (5-36)$$

将式(5-36)代入式(5-35)的 $A(\omega)$ 式中,可得

$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5-37)$$

M_r 与 ζ 的关系如图 5-15 所示。当 $\zeta \leq 0.707$ 时,对应的振荡环节存在 ω_r 和 M_r ; 当 ζ 减小时, ω_r 增加,趋于 ω_n 值, M_r 则越来越大,趋于 ∞ ; 当 $\zeta=0$ 时, $M_r = \infty$, 这对应无阻尼系统的共振现象。

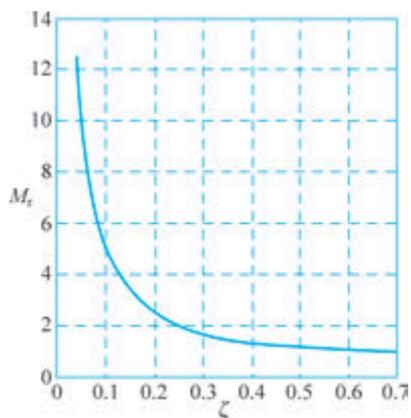


图 5-15 二阶系统 M_r 与 ζ 的关系

*图5-15的绘制程序

```
xi=0.04:0.01:0.707;
for i=1:length(xi)
    Mr(i)=1/(2*xi(i)*sqrt(1-xi(i)*xi(i)));
end
plot(xi,Mr,'b-');grid on;
xlabel('阻尼比');ylabel('Mr');
```

2) 不稳定二阶振荡环节的幅相特性

不稳定二阶振荡环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-38)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) \quad (\text{同稳定环节}) \\ \varphi(\omega) = -360^\circ + \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{array} \right. \quad (5-39)$$

不稳定二阶振荡环节是“非最小相角”环节,其相角从 -360° 连续变化到 -180° 。不稳定振荡环节的极点分布与幅相特性曲线如图 5-16 所示。

3) 由幅相特性曲线确定 $G(s)$

例 5-3 由实验得到某环节的幅相特性曲线如图 5-17 所示,试确定环节的传递函数 $G(s)$,并确定其 ω_r, M_r 。

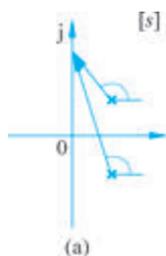


图 5-16 不稳定振荡环节的极点分布与幅相特性曲线

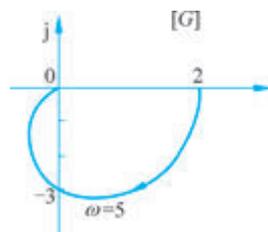
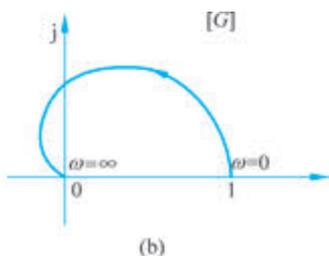


图 5-17 幅相特性曲线

解 根据幅相特性曲线的形状,可以确定 $G(s)$ 的形式为

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-40)$$

其频率特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases} \quad (5-41)$$

将图中条件 $A(0)=2$ 代入式(5-41),得 $K=2$

将 $\varphi(5)=-90^\circ$ 代入式(5-41),得 $\omega_n=5$

将 $A(\omega_n)=3$ 代入式(5-41),有 $\frac{K}{2\zeta}=3$

故得 $\zeta = \frac{K}{2 \times 3} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$

$$G(s) = \frac{2 \times 5^2}{s^2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 5s + 5^2} = \frac{50}{s^2 + 3.33s + 25}$$

由式(5-36),得 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 5 \sqrt{1-2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{7}$

由式(5-37),得 $M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{3} \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{9}{8}\sqrt{2}$

7. 二阶复合微分环节

二阶复合微分环节的传递函数为

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1 = \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \quad (5-42)$$



课程视频

频率特性为

$$G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases} \quad (5-43)$$

二阶复合微分环节的零点分布以及幅相特性曲线如图 5-18 所示。

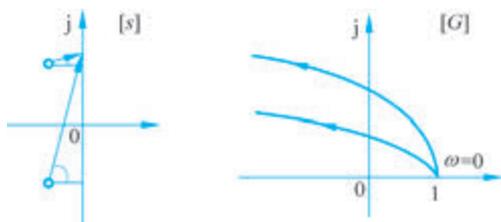


图 5-18 二阶复合微分环节的零点分布及幅相特性曲线

不稳定二阶复合微分环节的频率特性为

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \quad (5-44)$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \varphi(\omega) = 360^\circ - \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases} \quad (5-45)$$

零点分布及幅相特性曲线如图 5-19 所示。

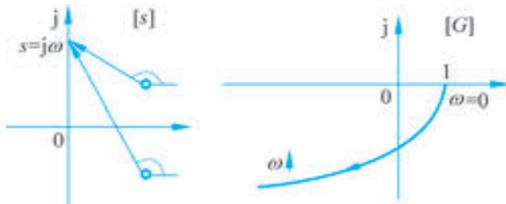


图 5-19 不稳定二阶复合微分环节的零点分布及幅相特性曲线

8. 延迟环节

延迟环节的传递函数为

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (5-46)$$

$$\begin{aligned} \text{频率特性为} \quad & G(j\omega) = e^{-j\tau\omega} \\ & \begin{cases} A(\omega) = 1 \\ \varphi(\omega) = -\tau\omega \end{cases} \end{aligned} \quad (5-47)$$

其幅相特性曲线是圆心在原点的单位圆,如图 5-20 所示, ω 值越大,其相角滞后量越大。

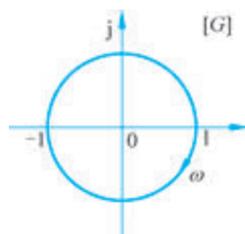


图 5-20 延迟环节幅相特性曲线

5.2.2 开环系统幅相特性曲线的绘制

设开环传递函数 $G(s)$ 由 l 个典型环节串联组成,系统频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_l(j\omega) \\ &= A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}\cdots A_l(\omega)e^{j\varphi_l(\omega)} \\ &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (5-48)$$

式中

$$\begin{cases} A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_l(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_l(\omega) \end{cases} \quad (5-49)$$

$A_i(\omega)$ 、 $\varphi_i(\omega)$ ($i=1,2,\cdots,l$) 分别表示各典型环节的幅频特性和相频特性。

式(5-48)表明,只要将组成开环传递函数的各典型环节的频率特性叠加起来,即可得出开环频率特性。在实际系统分析过程中,往往只需要知道幅相特性的大致图形即可,并不需要绘出准确曲线。可以将系统在 s 平面的开环零极点分布图画出来,令 $s=j\omega$ 沿虚轴变化,当 $\omega=0\rightarrow\infty$ 时,分析各零极点指向 $s=j\omega$ 的复向量的变化趋势,就可以推断各典型环节频率特性的变化规律,从而概略画出系统的开环幅相特性曲线。

概略绘制的开环幅相特性曲线应反映开环频率特性的三个要点。

- (1) 开环幅相特性曲线的起点($\omega=0$)和终点($\omega\rightarrow\infty$)。
- (2) 开环幅相特性曲线与实轴的交点。

设 $\omega=\omega_g$ 时, $G(j\omega)$ 的虚部为

$$\text{Im}[G(j\omega_g)] = 0$$

或

$$\varphi(\omega_g) = \angle G(j\omega_g) = k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

称 ω_g 为相角交界频率,开环频率特性曲线与实轴交点的坐标值为

$$\text{Re}[G(j\omega_g)] = G(j\omega_g)$$

- (3) 开环幅相特性曲线的变化范围(象限、单调性等)。

例 5-4 单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{K}{s^v(T_1s+1)(T_2s+1)} = K \frac{1}{s^v} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}}$$

试分别概略绘出当系统型别 $v=0,1,2,3$ 时的开环幅相特性曲线。



课程视频



MOOC 视频

解 讨论 $\nu=1$ 时的情形。在 s 平面中画出 $G(s)$ 的零极点分布图,如图 5-21(a)所示。系统开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K/T_1 T_2}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{K/T_1 T_2}{j\omega\left(j\omega + \frac{1}{T_1}\right)\left(j\omega + \frac{1}{T_2}\right)}$$

在 s 平面原点存在开环极点的情况下,为避免 $\omega=0$ 时 $G(j\omega)$ 相角不确定,取 $s=j\omega=j0^+$ 作为起点进行讨论(0^+ 到 0 距离无限小,见图 5-21)。

$$\overrightarrow{s-p_1} = \overrightarrow{j0^+ - 0} = A_1 \angle \varphi_1 = 0 \angle 90^\circ$$

$$\overrightarrow{s-p_2} = \overrightarrow{j0^+ + \frac{1}{T_1}} = A_2 \angle \varphi_2 = \frac{1}{T_1} \angle 0^\circ$$

$$\overrightarrow{s-p_3} = \overrightarrow{j0^+ + \frac{1}{T_2}} = A_3 \angle \varphi_3 = \frac{1}{T_2} \angle 0^\circ$$

故得

$$G(j0^+) = \frac{K}{\prod_{i=1}^3 A_i} \angle - \sum_{i=1}^3 \varphi_i = \infty \angle -90^\circ$$

当 ω 由 0^+ 逐渐增加时, $j\omega$ 、 $j\omega + \frac{1}{T_1}$ 、 $j\omega + \frac{1}{T_2}$ 三个向量的幅值连续增加;除 $\varphi_1 = 90^\circ$ 外, φ_2 、 φ_3 均由 0 连续增加,分别趋于 90° 。

当 $s=j\omega \rightarrow j\infty$ 时

$$\overrightarrow{s-p_1} = \overrightarrow{j\infty - 0} = A_1 \angle \varphi_1 = \infty \angle 90^\circ$$

$$\overrightarrow{s-p_2} = \overrightarrow{j\infty + \frac{1}{T_1}} = A_2 \angle \varphi_2 = \infty \angle 90^\circ$$

$$\overrightarrow{s-p_3} = \overrightarrow{j\infty + \frac{1}{T_2}} = A_3 \angle \varphi_3 = \infty \angle 90^\circ$$

故得

$$G(j\infty) = \frac{K}{\prod_{i=1}^3 A_i} \angle - \sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0 \angle -270^\circ$$

由此可以概略绘出 $G(j\omega)$ 的幅相特性曲线如图 5-21(b)中曲线 G_1 所示。

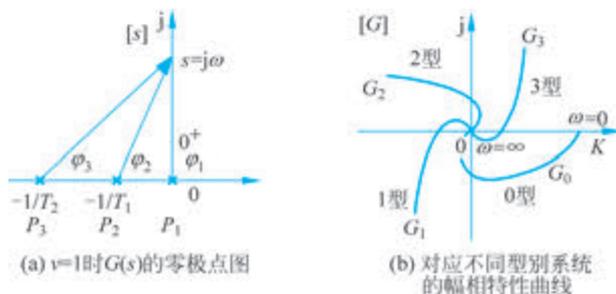


图 5-21 $\nu=1$ 时 $G(s)$ 的零极点图及 $G(j\omega)$ 的幅相特性曲线

同理,讨论 $v=0,2,3$ 时的情况,可以列表 5-2,相应概略绘出幅相特性曲线分别如图 5-21(b)中 G_0, G_2, G_3 所示。

表 5-2 例 5-4 结果列表

v	$G(j\omega)$	$G(j0^+)$	$G(j\infty)$	零极点分布
0	$G_0(j\omega) = \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$	$K \angle 0^\circ$	$0 \angle -180^\circ$	
1	$G_1(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$	$\infty \angle -90^\circ$	$0 \angle -270^\circ$	
2	$G_2(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$	$\infty \angle -180^\circ$	$0 \angle -360^\circ$	
3	$G_3(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^3(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$	$\infty \angle -270^\circ$	$0 \angle -450^\circ$	

对于开环传递函数全部由最小相角环节构成的系统,开环传递函数一般可写为

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_{n-v} s + 1)} \quad n > m$$

幅相特性曲线的起点 $G(j0^+)$ 完全由 K, v 确定,而终点 $G(j\infty)$ 则由 $n-m$ 确定。

$$G(j0^+) = \begin{cases} K \angle 0^\circ, & v = 0 \\ \infty \angle -90^\circ v, & v > 0 \end{cases}$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ(n-m)$$

而在 $\omega=0^+ \rightarrow \infty$ 过程中 $G(j\omega)$ 的变化趋势,可以根据各开环零极点指向 $s=j\omega$ 的矢量之模、相角的变化规律概略绘出。

例 5-5 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{k(1+2s)}{s^2(0.5s+1)(s+1)}$$

试概略绘出系统开环幅相特性曲线。

解 系统型别 $v=2$, 零极点分布图如图 5-22(a)所示。显然

(1) 起点 $G_k(j0^+) = \infty \angle -180^\circ$

(2) 终点 $G_k(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$

(3) 与坐标轴的交点

$$G_k(j\omega) = \frac{k}{\omega^2(1+0.25\omega^2)(1+\omega^2)} [-(1+2.5\omega^2) - j\omega(0.5-\omega^2)]$$

令虚部为 0, 可解出当 $\omega_g^2 = 0.5$ (即 $\omega_g = 0.707$) 时, 幅相曲线与实轴有一交点, 交点坐标为

$$R(\omega_g) = -2.67k$$

概略幅相特性曲线如图 5-22(b)所示。

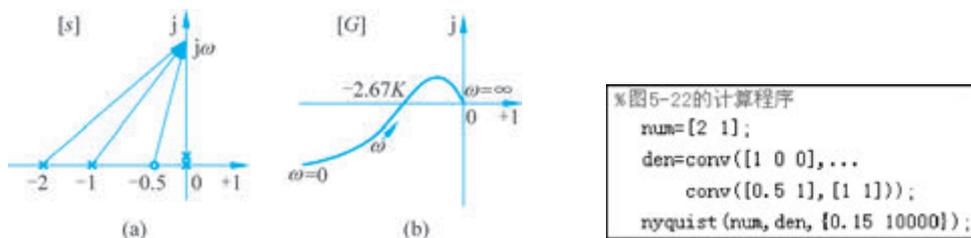


图 5-22 零极点分布图与幅相特性曲线

5.3 对数频率特性(Bode 图)

5.3.1 典型环节的 Bode 图

1. 比例环节

比例环节 $G(j\omega) = K$ 的频率特性与频率无关, 其对数幅频特性和对数相频特性分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases} \quad (5-50)$$

相应 Bode 图如图 5-23 所示。

2. 微分环节

微分环节 $G(j\omega) = s$ 的对数幅频特性与对数相频特性分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg\omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases} \quad (5-51)$$

对数幅频特性曲线在 $\omega = 1$ 处通过 0dB 线, 斜率为 20dB/dec; 对数相频特性曲线为 $+90^\circ$



课程视频



MOOC 视频

直线。特性曲线如图 5-24 中曲线①所示。

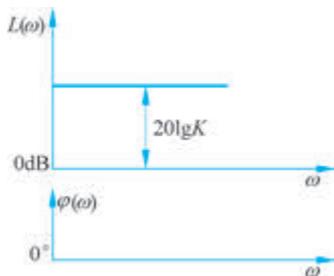


图 5-23 比例环节 Bode 图

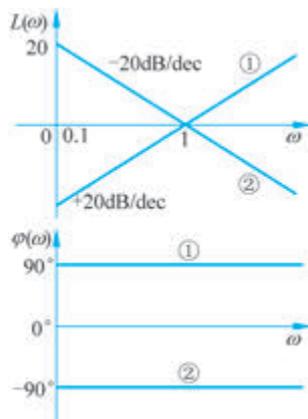


图 5-24 微分①、积分②环节 Bode 图

3. 积分环节

积分环节 $G(s) = \frac{1}{s}$ 的对数幅频特性与对数相频特性分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20\lg\omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases} \quad (5-52)$$

积分环节对数幅频特性曲线在 $\omega=1$ 处通过 0dB 线,斜率为 -20dB/dec ; 对数相频特性曲线为 -90° 直线。特性曲线如图 5-24 中曲线②所示。

积分环节与微分环节成倒数关系,所以其 Bode 图关于频率轴对称。

4. 惯性环节

惯性环节 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ 的对数幅频特性与对数相频特性表达式分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20\lg\sqrt{1+(\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\omega T \end{cases} \quad (5-53)$$

当 $\omega \ll 1/T$ 时,略去式(5-53) $L(\omega)$ 表达式根号中的 $(\omega T)^2$ 项,有

$$L(\omega) \approx -20\lg 1 = 0\text{dB}$$

表明 $L(\omega)$ 的低频渐近线是 0dB 水平线。

当 $\omega \gg 1/T$ 时,略去式(5-53) $L(\omega)$ 根号中的 1 项,则有

$$L(\omega) \approx -20\lg(\omega T)$$

表明 $L(\omega)$ 高频部分的渐近线是斜率为 -20dB/dec 的直线,两条渐近线的交点频率 $1/T$ 称为转折频率。图 5-25 中曲线①绘出惯性环节对数幅频特性的渐近线与精确曲线,以及相应的对数相频特性曲线。由图可见,最大幅值误差发生在转折频率 $1/T$ 处,误差值为 -3dB ,可用图 5-26 所示的误差曲线来进行修正。惯性环节的对数相频特性从 0° 变化到 -90° ,并且关于点 $(1/T, -45^\circ)$ 对称。这一点读者可以自己证明。

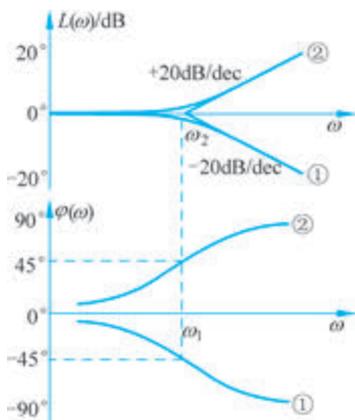


图 5-25 $(1+j\omega T)^{-1}$ 的 Bode 图

```

%图5-26的计算程序
ww1=0.1:0.01:10;
for i=1:length(ww1)
    Lw=(-20)*log10(sqrt(1+ww1(i)^2));
    if ww1(i)<=1 Lw1=0;
    else Lw1=(-20)*log10(ww1(i));
    end
    n(i)=Lw-Lw1;
end
semilogx(ww1,n,'b-');
grid on;
xlabel('\omega/\omega_1');
ylabel('误差/dB');
    
```

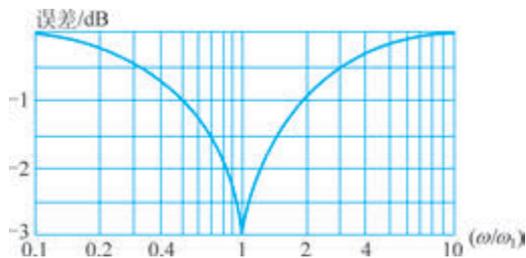


图 5-26 惯性环节对数幅频特性误差修正曲线

5. 一阶复合微分环节

一阶复合微分环节 $G(s) = sT + 1$ 的对数幅频特性与对数相频特性表达式分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg\sqrt{1 + (\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan\omega T \end{cases} \quad (5-54)$$

一阶复合微分环节的 Bode 图如图 5-25 中曲线②所示,它与惯性环节的 Bode 图关于频率轴对称。

6. 二阶振荡环节

振荡环节 $G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$ 的对数幅频特性和对数相频特性表达式分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20\lg\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \end{cases} \quad (5-55)$$

当 $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 时,略去式(5-55) $L(\omega)$ 表达式中的 $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ 和 $2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$ 项,则有

$$L(\omega) \approx -20\lg 1 = 0\text{dB}$$

表明 $L(\omega)$ 的低频段渐近线是一条 0dB 的水平线。当 $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ 时,略去式(5-55) $L(\omega)$ 表达式中的 1 和 $2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$ 项,则有

$$L(\omega) = -20\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = -40\lg\frac{\omega}{\omega_n}$$

表明 $L(\omega)$ 的高频段渐近线是一条斜率为 -40dB/dec 的直线。

显然,当 $\omega/\omega_n=1$,即 $\omega=\omega_n$ 时,是两条渐近线的相交点,所以,振荡环节的自然频率 ω_n 就是其转折频率。

振荡环节的对数幅频特性不仅与 ω/ω_n 有关,而且与阻尼比 ζ 有关,因此在转折频率附近一般不能简单地用渐近线近似代替,否则可能引起较大的误差,图 5-27 给出当 ζ 取不同值时对数幅频特性的准确曲线和渐近线,由图可见,当 $\zeta < 0.707$ 时,曲线出现谐振峰值, ζ 值越小,谐振峰值越大,它与渐近线之间的误差越大。必要时,可以用图 5-28 所示的误差修正曲线进行修正。

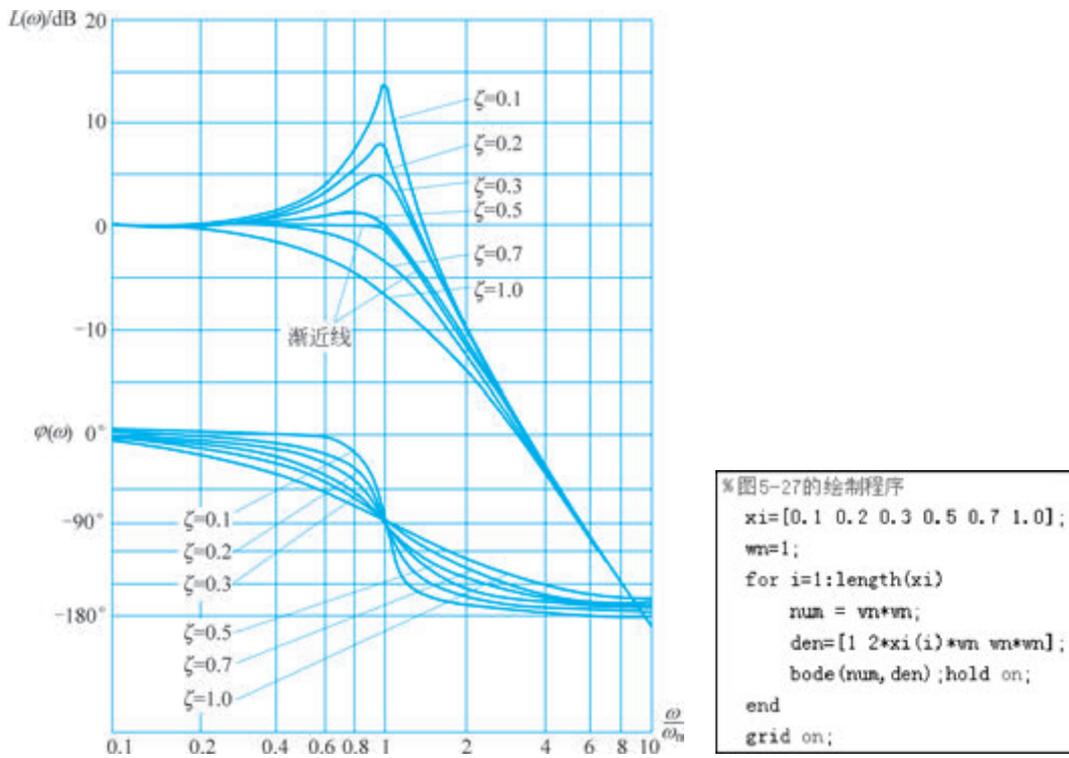


图 5-27 振荡环节的 Bode 图

由式(5-55)可知,相角 $\varphi(\omega)$ 也是 ω/ω_n 和 ζ 的函数,当 $\omega=0$ 时, $\varphi(\omega)=0$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(\omega)=-180^\circ$; 当 $\omega=\omega_n$ 时,不管 ζ 值的大小, $\varphi(\omega)$ 总是等于 -90° ,而且相频特性曲线关于 $(\omega_n, -90^\circ)$ 点对称,如图 5-27 所示。

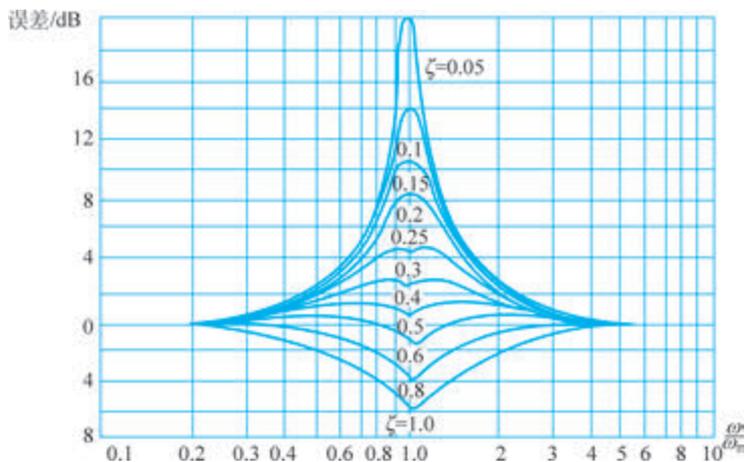


图 5-28 振荡环节的误差修正曲线

```

%图5-28的绘制程序
xi=[0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.4 0.5 0.6 0.8 1.0];
wn=0.1:0.01:10;
for i=1:length(xi)
    for k=1:length(wn)
        Lw=-20*log10(sqrt((1-wn(k)^2)^2+(2*xi(i)*wn(k))^2));
        if wn(k)<=1 Lw1=0;
        else Lw1=-40*log10(wn(k));
        end
        m(k)=Lw-Lw1;
    end
    semilogx(wn,m,'b-');hold on;
end
grid on;
    
```

7. 二阶复合微分环节

二阶复合微分环节 $G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1$ 的对数幅频特性和对数相频特性表达式分别为

式分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \end{cases} \quad (5-56)$$

二阶复合微分环节与振荡环节成倒数关系, 两者的 Bode 图关于频率轴对称。

8. 延迟环节

延迟环节 $G(s) = e^{-\tau s}$ 的对数幅频特性和对数相频特性表达式分别为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 0 \\ \varphi(\omega) = -\tau\omega \end{cases} \quad (5-57)$$

这表明,延迟环节的对数幅频特性曲线与 0dB 线重合,对数相频特性值与 ω 成正比,当 $\omega \rightarrow \infty$ 时,相角滞后量 $\rightarrow \infty$ 。延迟环节的 Bode 图如图 5-29 所示。

5.3.2 开环系统 Bode 图的绘制

将开环传递函数 $G(s)$ 表示成式(5-48)形式的典型环节组合形式,有

$$\left\{ \begin{aligned} L(\omega) &= 20\lg A(\omega) = 20\lg[A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_l(\omega)] \\ &= 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega) + \cdots + 20\lg A_l(\omega) \\ &= L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_l(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_l(\omega) \end{aligned} \right.$$

(5-58)

式中, $L_i(\omega)$ 和 $\varphi_i(\omega)$ 分别表示各典型环节的对数幅频特性和对数相频特性。

式(5-58)表明,只要能作出 $G(j\omega)$ 所包含的各典型环节的对数幅频特性和对数相频特性曲线,将它们进行代数相加,就可以求得开环系统的 Bode 图。实际上,在熟悉了对数幅频特性的性质后,可以采用更为简捷的办法直接画出开环系统的 Bode 图,具体步骤如下。

(1) 将开环传递函数写成尾 1 型标准形式:

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^p \left(\frac{s}{z_i} + 1\right)^{\frac{(m-p)/2}{}} \prod_{h=1}^{(m-p)/2} \left[\left(\frac{s}{\omega_{zh}}\right)^2 + 2\zeta_{zh} \frac{s}{\omega_{zh}} + 1\right]}{s^v \prod_{j=1}^q \left(\frac{s}{p_j} + 1\right)^{\frac{(n-q-v)/2}{}} \prod_{k=1}^{(n-q-v)/2} \left[\left(\frac{s}{\omega_{pk}}\right)^2 + 2\zeta_{pk} \frac{s}{\omega_{pk}} + 1\right]}$$

确定系统开环增益 K 和型别 v ,把各典型环节的转折频率由小到大依次标在频率轴上。

(2) 绘制开环对数幅频特性低频段的渐近线。由于低频段渐近线的频率特性为 $K/(j\omega)^v$,所以它就是过点 $(1, 20\lg K)$ 、斜率为 $-20v$ dB/dec 的直线。

(3) 在低频段渐近线的基础上,沿频率增大的方向每遇到一个转折频率就改变一次斜率,其规律是遇到惯性环节的转折频率,斜率变化 -20 dB/dec; 遇到一阶复合微分环节的转折频率,斜率变化 20 dB/dec; 遇到二阶复合微分环节的转折频率,斜率变化 40 dB/dec; 遇到振荡环节的转折频率,斜率变化 -40 dB/dec; 直到所有转折全部进行完毕。最右端转折频率之后的渐近线斜率应该是 $-20(n-m)$ dB/dec,其中, n 、 m 分别为 $G(s)$ 分母、分子的阶数。

(4) 如果需要,可按照各典型环节的误差曲线在相应转折频率附近进行修正,以得到较准确的对数幅频特性曲线。

(5) 绘制对数相频特性曲线。分别绘出各典型环节的对数相频特性曲线,再沿频率增大的方向逐点叠加,最后将相加点连接成光滑曲线。

下面举例说明开环对数频率特性的绘制过程。

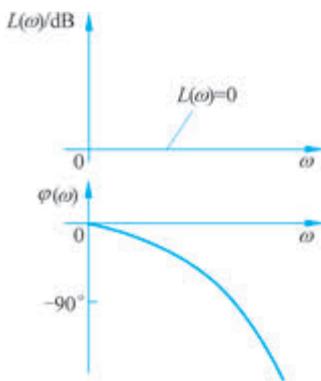


图 5-29 延迟环节的 Bode 图



课程视频



MOOC 视频

例 5-6 已知开环传递函数

$$G(s) = \frac{64(s+2)}{s(s+0.5)(s^2+3.2s+64)}$$

试绘制开环系统的 Bode 图。

解 (1) 将 $G(s)$ 化为尾 1 型标准形式:

$$G(s) = \frac{4\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.5} + 1\right)\left(\frac{s^2}{8^2} + 0.4 \times \frac{s}{8} + 1\right)}$$

可以看出,此开环传递函数由比例环节、积分环节、惯性环节、一阶微分环节和振荡环节共 5 个环节组成。顺序标出转折频率:

惯性环节转折频率 $\omega_1 = 1/T_1 = 0.5;$

一阶复合微分环节转折频率 $\omega_2 = 1/T_2 = 2;$

振荡环节转折频率 $\omega_3 = 1/T_3 = 8。$

开环增益 $K=4$, 系统型别 $v=1$ 。

(2) 低频段渐近线由 $\frac{K}{s} = \frac{4}{s}$ 决定, 过点 $(\omega=1, 20\lg 4)$ 作一条斜率为 -20dB/dec 的直线, 此即低频段的渐近线(如图 5-30 中虚线所示)。

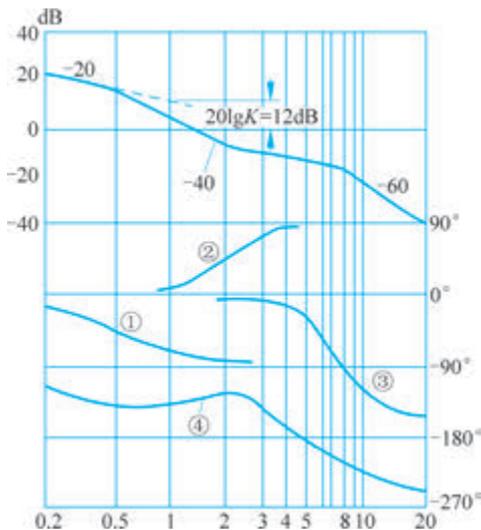


图 5-30 例 5-5 图

(3) 在 $\omega_1 = 0.5$ 处, 惯性环节将渐近线斜率由 -20dB/dec 变为 -40dB/dec 。

在 $\omega_2 = 2$ 处, 由于一阶复合微分环节的作用使渐近线斜率增加 20dB/dec , 即由 -40dB/dec 变为 -20dB/dec 。

在 $\omega_3 = 8$ 处, 振荡环节使渐近线斜率由 -20dB/dec 改变为 $-20(n-m) = -60\text{dB/dec}$ 。由此绘制出渐近对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 。

(4) 若有必要,可利用误差曲线对 $L(\omega)$ 进行修正。

(5) 绘制对数相频特性曲线。比例环节相角恒为零,积分环节相角恒为 -90° ,惯性环节、一阶复合微分和振荡环节的对数相频特性分别如图 5-30 中曲线①、②、③所示。将上述典型环节对数相频特性进行叠加,得到系统开环对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 如图 5-30 中曲线④所示。当然,也可以按 $\varphi(\omega)$ 表达式选点计算,再描点绘出 $\varphi(\omega)$ 曲线。

5.3.3 由对数幅频特性曲线确定开环传递函数

根据给定的对数幅频特性曲线确定相应的传递函数,是由传递函数绘制对数幅频特性曲线的反问题,这在系统频域分析和校正中经常遇到。下面举例说明怎样由 $L(\omega)$ 确定 $G(j\omega)$ 。

例 5-7 最小相角系统的开环对数幅频特性曲线如图 5-31 所示,试确定开环传递函数。

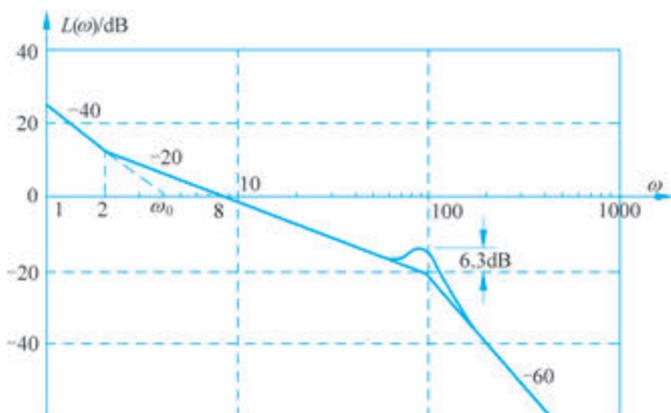


图 5-31 系统开环对数幅频特性曲线

解 根据 $L(\omega)$ 曲线,可以写出

$$G(j\omega) = \frac{K \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{s^2 \left[\left(\frac{s}{100} \right)^2 + 2\zeta \frac{s}{100} + 1 \right]}$$

式中, K 和 ζ 待定。对于二阶振荡环节中的阻尼比 ζ , 根据 $L(\omega)$, 有

$$20 \lg M_r = 6.3 \text{ dB}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = 10^{\frac{6.3}{20}} = 2.0655$$

解出

$$\zeta = 0.25$$

对于开环增益 K , 有不同的解法。

解法 1: 将 $L(\omega)$ 曲线第一个转折频率 $\omega = 2$ 左边的线段延长至频率轴, 与 0 dB 线交点处的频率设为 ω_0 , 则 $K = \omega_0^2$ 。利用对数频率特性曲线横坐标等距等比的特点, 可以写

$$\text{出 } \frac{8}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{2}, \text{ 所以有 } K = \omega_0^2 = 16.$$



课程视频



课程视频

解法 2: 设系统截止频率为 ω_c^* , 则有

$$|G(j\omega_c^*)| = \frac{K \left| \frac{j\omega_c^*}{2} + 1 \right|}{\omega_c^{*2} \left| \left[1 - \left(\frac{\omega_c^*}{100} \right)^2 \right] + j2\zeta \frac{\omega_c^*}{100} \right|} = 1$$

图 5.31 中给出渐近对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 与 0dB 线交点频率 $\omega_c = 8 \approx \omega_c^*$, 注意 $\omega_c = 8$ 与其他转折频率的大小关系, 同时考虑绘制渐近对数幅频特性曲线时的近似条件, 略去上式各环节取模运算中实部、虚部中较小者, 有

$$|G(j\omega_c)| = \frac{K \times \frac{\omega_c}{2}}{\omega_c^2 \times 1} = \frac{K}{2 \times \omega_c} \Big|_{\omega_c=8} = \frac{K}{16} = 1$$

可得 $K = 16$ 。

最后给出

$$G(s) = \frac{16 \cdot \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{s^2 \left[\left(\frac{s}{100} \right)^2 + 0.5 \frac{s}{100} + 1 \right]} = \frac{80000(s+2)}{s^2(s^2 + 50s + 10000)}$$

由开环对数幅频特性曲线确定传递函数时, 如何根据具体情况求开环增益, 往往有多种方法, 需要灵活掌握。



课程视频

5.3.4 最小相角系统和非最小相角系统

极点或零点在右半 s 平面的典型环节称为“非最小相角”环节。

如果系统开环传递函数中有在右半 s 平面的极点或零点, 或者包含延迟环节 $e^{-\tau s}$, 则称此系统为“非最小相角系统”, 否则称为“最小相角系统”。在系统的开环频率特性中, 最小相角系统相角变化量的绝对值相对最小, 而且其对数幅频特性与对数相频特性之间存在唯一的对应关系, 可以相互确定, 而非最小相角系统不具备这种性质。在系统分析中应当注意区分和正确处理非最小相角系统。

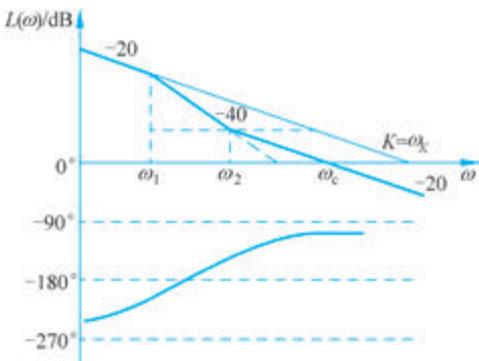


图 5-32 对数频率特性曲线

例 5-8 已知某系统的开环对数频率特性曲线如图 5-32 所示, 试确定其开环传递函数。

解 根据对数幅频特性曲线, 可以写出开环传递函数的表达式:

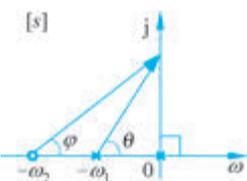
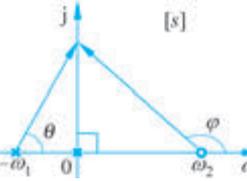
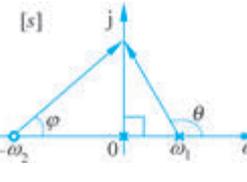
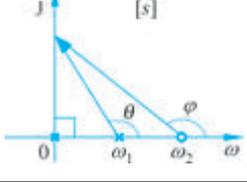
$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{\omega_2} \pm 1 \right)}{s \left(\frac{s}{\omega_1} \pm 1 \right)}$$

根据对数频率特性的坐标特点, 有 $\frac{\omega_K}{\omega_c} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, 可以确定开环增益

$$K = \omega_K = \frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1}$$

根据相频特性的变化趋势($-270^\circ \rightarrow -90^\circ$),可以判定该系统为非最小相角系统。 $G(s)$ 中至少有一个在右半 s 平面的零点或极点。将系统可能的开环零极点分布全部画出来,列在表 5-3 中。

表 5-3 例 5-8 用表

序号	零极点分布	$G(j\omega)$	$G(j0)$	$G(j\infty)$
1		$\frac{K(s/\omega_2 + 1)}{s(s/\omega_1 + 1)}$	$\infty \angle -90^\circ$	$0 \angle -90^\circ$
2		$\frac{K(s/\omega_2 - 1)}{s(s/\omega_1 + 1)}$	$\infty \angle +90^\circ$	$0 \angle -90^\circ$
3		$\frac{K(s/\omega_2 + 1)}{s(s/\omega_1 - 1)}$	$\infty \angle -270^\circ$	$0 \angle -90^\circ$
4		$\frac{K(s/\omega_2 - 1)}{s(s/\omega_1 - 1)}$	$\infty \angle -90^\circ$	$0 \angle -90^\circ$

分析相角的变化趋势,可见,只有当惯性环节极点在右半 s 平面,一阶复合微分环节零点在左半 s 平面时,相角才符合从 -270° 到 -90° 的变化规律。因此可以确定系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1} \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{\omega_1} - 1 \right)}$$

对于最小相角系统,根据对数幅频特性曲线就完全可以确定相应的对数相频特性和传递函数,反之亦然。由于对数幅频特性容易绘制,所以在分析最小相角系统时,通常只

画其对数幅频特性曲线,对数相频特性曲线一般不需要画。而对于非最小相角系统,必须将对数幅频、对数相频特性曲线同时绘制出来,才能完整表达其频率特性。

5.4 频域稳定判据

5.4.1 奈奎斯特稳定判据

闭环控制系统稳定的充要条件是闭环特征方程的根均具有负的实部,或者说,全部闭环极点都位于左半 s 平面。第3章中介绍的劳斯稳定判据,是根据闭环特征方程的系数来判断闭环系统的稳定性。这里要介绍的频域稳定判据则是利用系统的开环频率特性 $G(j\omega)$ 来判断闭环系统的稳定性。

频域稳定判据是奈奎斯特于1932年提出的,它是频率分析法的重要内容。利用奈奎斯特稳定判据,不但可以判断系统是否稳定(绝对稳定性),也可以确定系统的稳定程度(相对稳定性),还可以分析系统的动态性能以及指出改善系统性能指标的途径。因此,奈奎斯特稳定判据是一种重要而实用的稳定性判据,在工程上应用十分广泛。

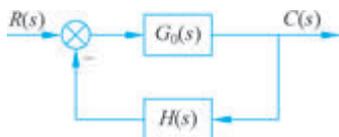


图 5-33 控制系统结构图

1. 辅助函数

对于图 5-33 所示的控制系统结构图,其开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (5-59)$$

相应的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + \frac{M(s)}{N(s)}} = \frac{N(s)G_0(s)}{N(s) + M(s)} \quad (5-60)$$

式中, $M(s)$ 为开环传递函数的分子多项式, m 阶; $N(s)$ 为开环传递函数的分母多项式, n 阶, $n \geq m$ 。令辅助函数

$$F(s) = 1 + G(s) = \frac{M(s) + N(s)}{N(s)} \quad (5-61)$$

可见,辅助函数是闭环特征多项式 $N(s) + M(s)$ 和开环特征多项式 $N(s)$ 之比。

实际系统传递函数 $G(s)$ 分母阶数 n 总是大于或等于分子阶数 m , 因此辅助函数的分子分母同阶, 即 $F(s)$ 的零点与极点数相同。设 z_1, z_2, \dots, z_n 和 p_1, p_2, \dots, p_n 分别为其零、极点, 则辅助函数 $F(s)$ 可表示为

$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (5-62)$$

综上所述可知, 辅助函数 $F(s)$ 具有以下特点。

(1) 辅助函数 $F(s)$ 的零点和极点分别是系统的闭环极点和开环极点, 它们的个数相同, 均为 n 个。



课程视频



MOOC 视频

(2) $F(s)$ 与开环传递函数 $G(s)$ 之间只差常量1, F 平面上的坐标原点就是 G 平面上的 $(-1, j0)$ 点。同时, $F(j\omega)=1+G(j\omega)$ 表明,只要将开环幅相特性曲线 $G(j\omega)$ 向右平移一个单位,就可以得到辅助函数的幅相特性曲线 $F(j\omega)$,如图5-34所示。

2. 奈奎斯特稳定判据

从 $G(s)$ 表达式中容易看出在右半 s 平面中的开环极点(设为 P),如果能确定系统在右半 s 平面中所有闭环极点和开环极点的个数差,也就是辅助函数 $F(s)$ 位于右半 s 平面内的零极点的个数差(设为 R),就能确定系统在右半 s 平面中闭环极点(设为 Z),有

$$Z = P + R \quad (5-63)$$

由此可判定闭环系统的稳定性。

为了确定 R ,在 s 平面中设计奈奎斯特路径 Γ , Γ 由以下3段组成。

- ① ——正虚轴 $s=j\omega$: 频率 ω 由0变到 ∞ 。
- ② ——半径为无限大的右半圆 $s=re^{j\theta}$: $r \rightarrow \infty, \theta$ 由 $\pi/2$ 变化到 $-\pi/2$ 。
- ③ ——负虚轴 $s=j\omega$: 频率 ω 由 $-\infty$ 变化到0。

这样,3段组成的封闭曲线 Γ (称为奈奎斯特路径,简称奈氏路径)就包含了整个右半 s 平面,如图5-35所示。

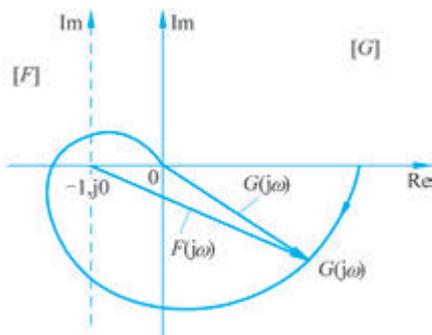


图 5-34 F 平面与 G 平面的关系图

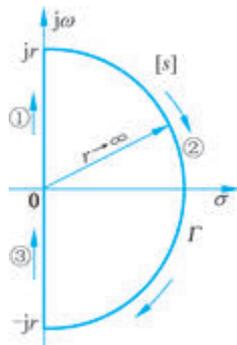


图 5-35 奈奎斯特路径

在 F 平面上通过函数关系 $F(j\omega)$ 绘制与 Γ 相对应的像 Γ' :当 s 沿虚轴变化时,由式(5-61),则有

$$F(j\omega) = 1 + G(j\omega) \quad (5-64)$$

因此, Γ' 将由下面3段组成。

- ① ——与正虚轴对应的是辅助函数的频率特性 $F(j\omega)$,相当于把 $G(j\omega)$ 右移一个单位。
- ② ——与半径为无穷大的右半圆相对应的辅助函数 $F(s) \rightarrow 1$ 。由于开环传递函数的分母阶数高于分子阶数,当 $s \rightarrow \infty$ 时, $G(s) \rightarrow 0$,故有 $F(s) = 1 + G(s) \rightarrow 1$ 。
- ③ ——与负虚轴相对应的是辅助函数频率特性 $F(j\omega)$ 对称于实轴的镜像。

图5-36绘出了系统开环频率特性曲线 $G(j\omega)$ 。将曲线右移一个单位,并取其镜像,则成为 F 平面上的封闭曲线 Γ' ,如图5-37所示。图中用虚线表示镜像。

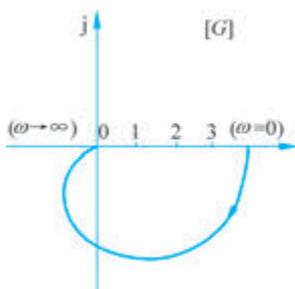


图 5-36 $G(j\omega)$ 特性曲线

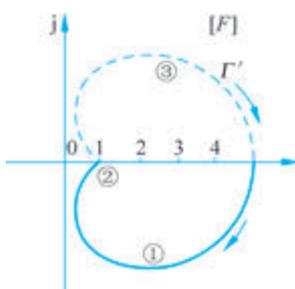


图 5-37 F 平面上的封闭曲线

由于奈氏路径 Γ 包含了整个右半 s 平面, 闭环传递函数和开环传递函数在右半 s 平面上的极点全部被包围在其中。在右半 s 平面上闭环和开环极点的个数差 R , 可以确定为 F 平面上 Γ' 曲线顺时针包围原点的圈数, 也就是 G 平面上系统开环幅相特性曲线及其镜像顺时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。在实际系统分析过程中, 一般只需绘制开环幅相特性曲线, 而不必绘制其镜像曲线, 考虑到角度定义的方向性, 有

$$R = -2N \quad (5-65)$$

将式(5-65)代入式(5-63), 可得奈奎斯特判据(简称奈氏判据)

$$Z = P - 2N \quad (5-66)$$

式中, Z 是右半 s 平面中闭环极点的个数; P 是右半 s 平面中开环极点的个数; N 是开环幅相曲线 $G(j\omega)$ (不包括其镜像) 包围 G 平面 $(-1, j0)$ 点的圈数(逆时针为正)。显然, 只有当 $Z = P - 2N = 0$ 时, 闭环系统才是稳定的。

例 5-9 设系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{52}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

试用奈氏判据判定闭环系统的稳定性。

解 绘出系统的开环幅相特性曲线如图 5-38 所示。当 $\omega=0$ 时, 曲线起点在实轴上 $P(\omega)=5.2$ 。当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 终点在原点。当 $\omega=2.5$ 时曲线和负虚轴相交, 交点为 $-j5.06$ 。当 $\omega=3$ 时, 曲线和负实轴相交, 交点为 -2.0 , 见图 5-38 中实线部分。

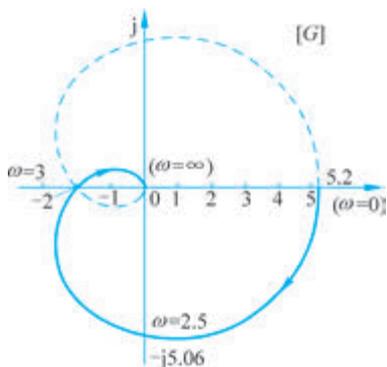


图 5-38 幅相特性曲线及其镜像

在右半 s 平面上, 系统的开环极点数为 0。开环频率特性 $G(j\omega)$ 随着 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, 顺时针方向围绕点 $(-1, j0)$ 点一圈, 即 $N = -1$ 。用式(5-66)可求得闭环系统在右半 s 平面的极点数为

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

所以闭环系统不稳定。

利用奈氏判据还可以讨论开环增益 K 对闭环系统稳定性的影响。当 K 值变化时, 幅频特性成比例变化, 而相频特性不受影响。因此, 就图 5-38 而论, 当频率 $\omega=3$ 时, 曲线与负实轴正好相交在 $(-2, j0)$

点,若 K 缩小一半,取 $K=2.6$ 时,曲线恰好通过点 $(-1, j0)$,这是临界稳定状态;当 $K < 2.6$ 时,幅相特性曲线 $G(j\omega)$ 将从点 $(-1, j0)$ 的右方穿过负实轴,不再包围点 $(-1, j0)$,这时闭环系统是稳定的。

例 5-10 系统结构图如图 5-39 所示,试判断系统的稳定性并讨论 K 值对系统稳定性的影响。

解 系统是一个非最小相角系统,开环不稳定。开环传递函数在右半 s 平面上有一个极点, $P=1$ 。幅相特性曲线如图 5-40 所示。当 $\omega=0$ 时,曲线从负实轴点 $(-K, j0)$ 出发;当 $\omega \rightarrow \infty$ 时,曲线以 -90° 趋于坐标原点;幅相特性包围点 $(-1, j0)$ 的圈数 N 与 K 值有关。图 5-40 绘出了 $K > 1$ 和 $K < 1$ 的两条曲线,可见:

当 $K > 1$ 时,曲线逆时针包围了点 $(-1, j0)$ $1/2$ 圈,即 $N=1/2$,此时 $Z=P-2N=1-2 \times (1/2)=0$,故闭环系统稳定;当 $K < 1$ 时,曲线不包围点 $(-1, j0)$,即 $N=0$,此时 $Z=P-2N=1-2 \times 0=1$,有一个闭环极点在右半 s 平面,故系统不稳定。

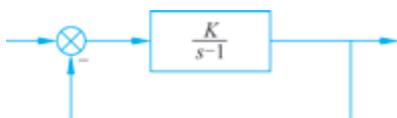


图 5-39 例 5-10 系统结构图

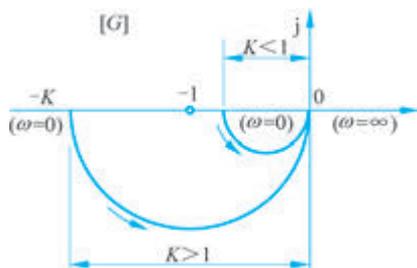


图 5-40 $K > 1$ 和 $K < 1$ 时的幅相特性曲线

5.4.2 奈奎斯特稳定判据的应用

如果开环传递函数 $G(s)$ 在虚轴上有极点,则不能直接应用图 5-35 所示的奈氏路径,因为幅角定理要求奈氏路径不能经过 $F(s)$ 的奇点,为了在这种情况下应用奈氏判据,可以对奈氏路径略作修改。使其沿着半径为无穷小 ($r \rightarrow 0$) 的右半圆绕过虚轴上的极点。例如当开环传递函数中有纯积分环节时, s 平面原点有极点,相应的奈氏路径可以修改为如图 5-41 所示。图中的小半圆绕过了位于坐标原点的极点,使奈氏路径避开了极点,又包围了整个右半 s 平面,前述的奈氏判据结论仍然适用,只是在画幅相特性曲线时, s 取值需要先从 $j0$ 绕半径无限小的圆弧逆时针转 90° 到 $j0^+$,然后再沿虚轴到 $j\infty$ 。这样需要补充 $s = j0 \rightarrow j0^+$ 小圆弧所对应的 $G(j\omega)$ 特性曲线。

设系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n-v} (T_j s + 1)}$$

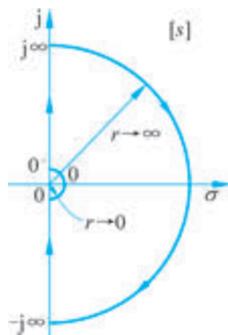


图 5-41 s 平面原点有开环极点时的奈氏路径

式中, ν 为系统型别。当沿着无穷小半圆逆时针方向移动时, 有 $s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\nu\theta}$, 映射到 G 平面的曲线可以按下式求得:

$$G(s) \Big|_{s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\nu\theta}} = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} \Bigg|_{s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\nu\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{r^\nu} e^{-j\nu\theta} = \infty e^{-j\nu\theta} \quad (5-67)$$

由上述分析可见, 当 s 沿小半圆从 $\omega=0$ 变化到 $\omega=0^+$ 时, θ 角沿逆时针方向从 0 变化到 $\pi/2$, 这时 G 平面上的映射曲线将从 $\angle G(j0)$ 位置沿半径无穷大的圆弧按顺时针方向转过 $-\nu\pi/2$ 角度。在确定 $G(j\omega)$ 绕点 $(-1, j0)$ 圈数 N 的值时, 要考虑大圆弧的影响。

例 5-11 已知开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

式中, $K > 0, T > 0$, 绘制奈氏图并判别系统的稳定性。

解 该系统 $G(s)$ 在坐标原点处有一个极点, 为 I 型系统。取奈氏路径如图 5-41 所示。当 s 沿小半圆移动从 $\omega=0$ 变化到 $\omega=0^+$ 时, 在 G 平面上映射曲线为半径 $R \rightarrow \infty$ 的 $\pi/2$ 圆弧。幅相特性曲线(包括大圆弧)如图 5-42 所示。此系统开环传递函数在右半 s 平面无极点, $P=0$; $G(s)$ 的奈氏路径又不包围点 $(-1, j0)$, $N=0$; 因此 $Z=P-2N=0$, 闭环系统是稳定的。

例 5-12 已知系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

试绘制奈氏图, 并分析闭环系统的稳定性。

解 由于 $G(s)H(s)$ 在右半 s 平面有一极点, 故 $P=1$ 。当 $0 < K < 1$ 时, 其奈氏图如图 5-43(a) 所示, 图中可见, 当 ω 从 0 到 $+\infty$ 变化时, 奈氏路径顺时针包围点 $(-1, j0)$ $-1/2$ 圈, 即 $N = -1/2, Z = P - 2N = 1 + 2(1/2) = 2$, 因此闭环系统不稳定。当 $K > 1$ 时, 其奈氏图如图 5-43(b) 所示, 当 ω 从 0 到 $+\infty$ 变化时, 奈氏路径逆时针包围点 $(-1, j0)$ $+1/2$ 圈, $N = +1/2, Z = P - 2N = 1 - 2(1/2) = 0$, 此时闭环系统是稳定的。

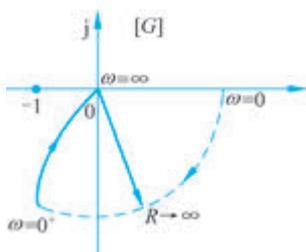


图 5-42 例 5-11 的奈氏图

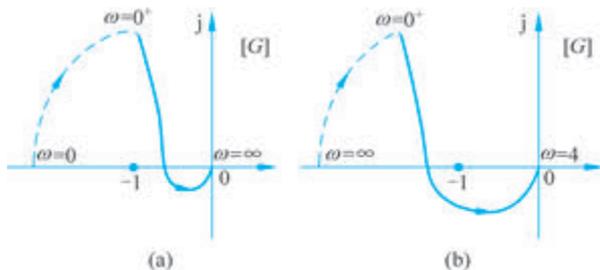


图 5-43 例 5-12 的奈氏图

5.4.3 对数稳定判据

实际上, 系统的频域分析设计通常是在 Bode 图上进行的。将奈氏判据引申到 Bode



课程视频



课程视频



MOOC 视频

图上,以 Bode 图的形式表现出来,就成为对数稳定判据。在 Bode 图上运用奈氏判据的关键在于如何确定 $G(j\omega)$ 包围点 $(-1, j0)$ 的圈数 N 。

系统开环频率特性的奈氏图与 Bode 图存在一定的对应关系,如图 5-44 所示。

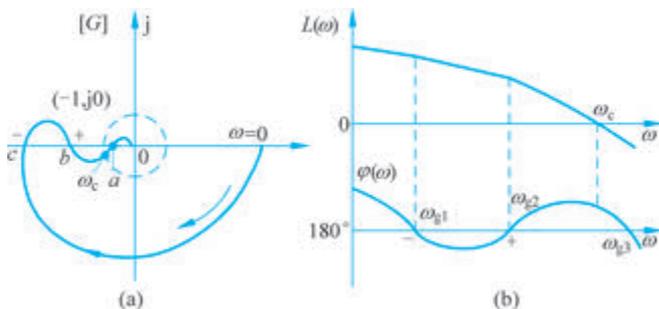


图 5-44 奈氏图与 Bode 图的对应关系

(1) 奈氏图上 $|G(j\omega)|=1$ 的单位圆与 Bode 图上的 0dB 线相对应。单位圆外部对应于 $L(\omega)>0$, 单位圆内部对应于 $L(\omega)<0$ 。

(2) 奈氏图上的负实轴对应于 Bode 图上 $\varphi(\omega)=-180^\circ$ 线。

在奈氏图中,如果开环幅相特性曲线在点 $(-1, j0)$ 以左穿过负实轴,则称为“穿越”。若沿 ω 增加方向,曲线按相角增加方向(自上而下)穿过点 $(-1, j0)$ 以左的负实轴,则称为正穿越;反之,曲线按相角减小方向(自下而上)穿过点 $(-1, j0)$ 以左的负实轴,则称为负穿越,如图 5-44(a)所示。如果沿 ω 增加方向,幅相特性曲线自 $(-1, j0)$ 点以左的负实轴上某点开始向下(上)离开,或从负实轴上(下)方趋近到点 $(-1, j0)$ 以左的负实轴上某点,则称为半次正(负)穿越。

在 Bode 图上,对应于 $L(\omega)>0$ 的频段范围内沿 ω 增加方向,对数相频特性曲线按相角增加方向(自下而上)穿过 -180° 线称为正穿越;反之,曲线按相角减小方向(自上而下)穿过 -180° 线为负穿越。同理,在 $L(\omega)>0$ 的频段范围内,对数相频曲线沿 ω 增加方向自 -180° 线开始向上(下)离开,或从下(上)方趋近到 -180° 线,则称为半次正(负)穿越,如图 5.44(b)所示。

在奈氏图上,正穿越一次,对应于幅相特性曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈,而负穿越一次,对应于顺时针包围点 $(-1, j0)$ 一圈,因此幅相特性曲线包围点 $(-1, j0)$ 的次数等于正、负穿越次数之差,即

$$N = N_+ - N_- \quad (5-68)$$

式中, N_+ 是正穿越次数; N_- 是负穿越次数。在 Bode 图上可以应用此方法方便地确定 N 。

例 5-13 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^* \left(s + \frac{1}{2} \right)}{s^2 (s + 1)(s + 2)}$$

当 $K^* = 0.8$ 时,判断闭环系统的稳定性。

解 系统开环零极点分布图如图 5-45 所示。首先计算 $G(j\omega)$ 曲线与实轴交点坐标。

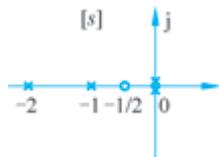


图 5-45 开环零极点图

$$G(j\omega) = \frac{0.8\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)}{-\omega^2(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{-0.8\left[1 + \frac{5}{2}\omega^2 + j\omega\left(\frac{1}{2} - \omega^2\right)\right]}{\omega^2[4 + 5\omega^2 + \omega^4]}$$

令 $\text{Im}G(j\omega) = 0$, 解出 $\omega = 1/\sqrt{2}$ 。计算相应实部的值 $\text{Re}G(j\omega) = -0.5333$ 。由此可画出开环幅相特性和开环对数频率特性曲线分别如图 5-46(a)、图 5-46(b) 所示。系统是 II 型的, 相应地在 $G(j\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 上补上 180° 大圆弧 (如图 5-46(a)、图 5-46(b) 中虚线所示)。应用对数稳定判据, 在 $L(\omega) > 0$ 的频段范围 ($0 \sim \omega_c$) 内, $\varphi(j\omega)$ 在 $\omega = 0^+$ 处有负、正穿越各 $1/2$ 次, 所以

$$N = N_+ - N_- = 1/2 - 1/2 = 0$$

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0$$

可知闭环系统是稳定的。

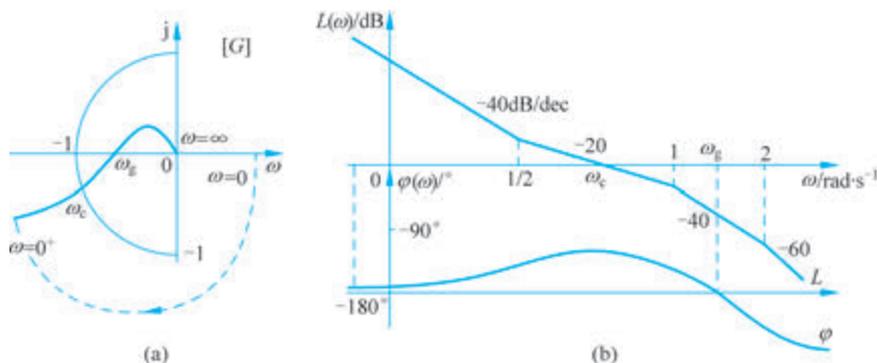


图 5-46 开环幅相特性和对数频率特性曲线



课程视频

5.5 稳定裕度

5.5.1 稳定裕度的定义

控制系统稳定与否是绝对稳定性的概念。而对一个稳定的系统而言, 还有一个稳定的程度, 即相对稳定性的概念。相对稳定性与系统的动态性能指标有着密切的关系。在设计一个控制系统时, 不仅要求它必须是绝对稳定的, 还应保证系统具有一定的稳定程度。只有这样, 才能不致因系统参数的小范围漂移而导致系统性能变差甚至不稳定。

对于一个最小相角系统而言, $G(j\omega)$ 曲线越靠近点 $(-1, j0)$, 系统阶跃响应的振荡就越强烈, 系统的相对稳定性就越差。因此, 可用 $G(j\omega)$ 曲线对点 $(-1, j0)$ 的接近程度来表示系统的相对稳定性。通常, 这种接近程度是用相角裕度和幅值裕度来表示的。

相角裕度和幅值裕度是系统开环频率指标, 它们与闭环系统的动态性能密切相关。

1. 相角裕度

相角裕度是指开环幅相频率特性 $G(j\omega)$ 的幅值 $A(\omega) = |G(j\omega)| = 1$ 时的向量与负实轴的夹角, 常用希腊字母 γ 表示。



MOOC 视频

在 G 平面上画出以原点为圆心的单位圆, 见图 5-47。 $G(j\omega)$ 曲线与单位圆相交, 交点处的频率 ω_c 称为截止频率, 此时有 $A(\omega_c)=1$ 。按相角裕度的定义

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) \quad (5-69)$$

由于 $L(\omega_c) = 20\lg A(\omega_c) = 20\lg 1 = 0$, 故在 Bode 图中, 相角裕度表现为 $L(\omega) = 0\text{dB}$ 处的相角 $\varphi(\omega_c)$ 与 -180° 水平线之间的角度差, 如图 5-48 所示。上述两图中的 γ 均为正值。

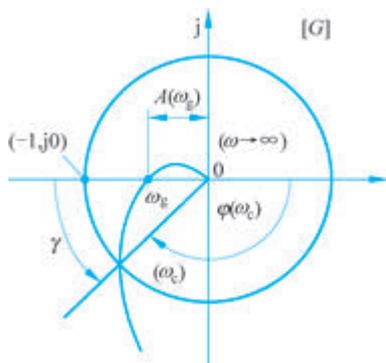


图 5-47 相角裕度和幅值裕度的定义

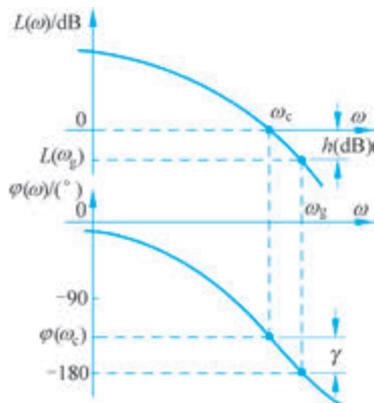


图 5-48 稳定裕度在 Bode 图上的表示

2. 幅值裕度

$G(j\omega)$ 曲线与负实轴交点处的频率 ω_g 称为相角交界频率, 此时幅相特性曲线的幅值为 $A(\omega_g)$, 如图 5-47 所示。幅值裕度是 $G(j\omega)$ 与负实轴交点至虚轴距离的倒数, 即 $1/A(\omega_g)$, 常用 h 表示, 即

$$h = \frac{1}{A(\omega_g)} \quad (5-70)$$

在对数坐标图上

$$20\lg h = -20\lg |A(\omega_g)| = -L(\omega_g) \quad (5-71)$$

即 h 的分贝值等于 $L(\omega_g)$ 与 0dB 之间的距离 (0dB 下为正)。

相角裕度的物理意义在于: 稳定系统在截止频率 ω_c 处若相角再滞后一个 γ 角度, 则系统处于临界稳定状态; 若相角滞后大于 γ , 则系统将变成不稳定的。

幅值裕度的物理意义在于: 稳定系统的开环增益再增大 h 倍, 则 $\omega = \omega_g$ 处的幅值 $A(\omega_g)$ 等于 1, 曲线正好通过点 $(-1, j0)$, 系统处于临界稳定状态; 若开环增益增大 h 倍以上, 则系统将变成不稳定的。

对于最小相角系统, 要使系统稳定, 要求相角裕度 $\gamma > 0$, 幅值裕度 $h > 0\text{dB}$ 。为保证系统具有一定的相对稳定性, 稳定裕度不能太小。在工程设计中, 要求 $\gamma > 30^\circ$ (一般选 $40^\circ \sim 60^\circ$), $h > 6\text{dB}$ (一般选 $10 \sim 20\text{dB}$)。

5.5.2 稳定裕度的计算

根据式(5-69), 要计算相角裕度 γ , 首先要知道截止频率 ω_c 。求 ω_c 较方便的方法是先由 $G(s)$ 绘制 $L(\omega)$ 曲线, 由 $L(\omega)$ 与 0dB 线的交点确定 ω_c 。而求幅值裕度 h , 则要先知

道相角交界频率 ω_g 。对于阶数不太高的系统,直接解三角方程 $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$ 是求 ω_g 较方便的方法。通常是将 $G(j\omega)$ 写成虚部和实部,令虚部为零而解得 ω_g 。

例 5-14 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_0}{s(s+1)(s+5)}$$

试求 $K_0=10$ 时系统的相角裕度和幅值裕度。

解

$$G(s) = \frac{K_0/5}{s(s+1)\left(\frac{1}{5}s+1\right)} \quad \begin{cases} K = K_0/5 \\ v = 1 \end{cases}$$

绘制开环增益 $K = K_0/5 = 2$ 时的 $L(\omega)$ 曲线如图 5-49 所示。

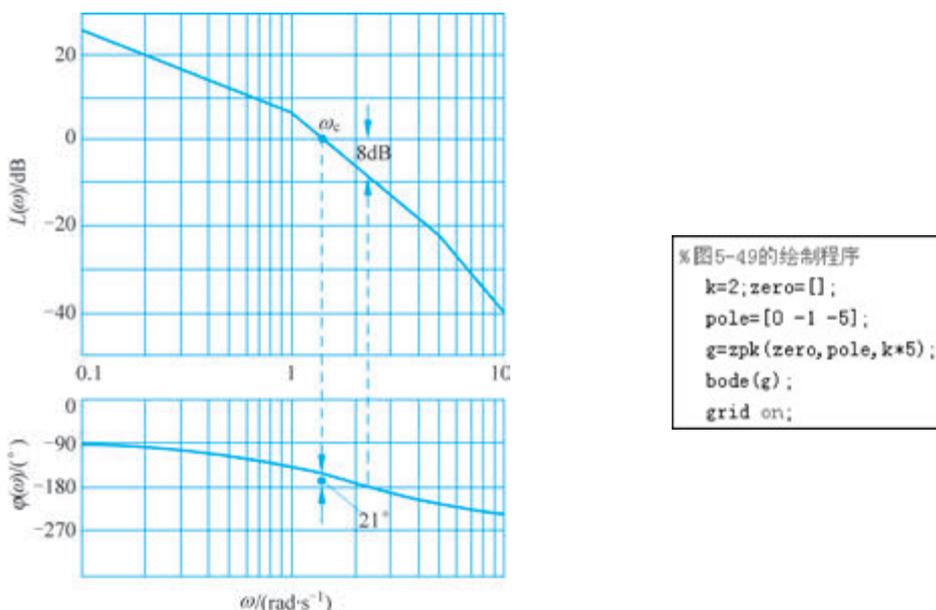


图 5-49 $K=2$ 时的 $L(\omega)$ 曲线

当 $K=2$ 时

$$A(\omega_c) = \frac{2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 1^2} \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{5}\right)^2 + 1^2}} = 1 \approx \frac{2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2} \sqrt{1^2}} = \frac{2}{\omega_c^2} \quad 0 < \omega_c < 2$$

所以 $\omega_c = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan \frac{\omega_c}{5} \\ &= 90^\circ - 54.7^\circ - 15.8^\circ = 19.5^\circ \end{aligned}$$

又由 $180^\circ + \angle G(j\omega_g) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_g - \arctan(\omega_g/5) = 0$
有 $\arctan \omega_g + \arctan(\omega_g/5) = 90^\circ$

等式两边取正切

$$\left[\frac{\omega_g + \frac{\omega_g}{5}}{1 - \frac{\omega_g^2}{5}} \right] = \tan 90^\circ \rightarrow \infty$$

得 $1 - \omega_g^2/5 = 0$, 即 $\omega_g = \sqrt{5} = 2.236$ 。

$$\text{所以 } h_1 = \frac{1}{|A(\omega_g)|} = \frac{\omega_g \sqrt{\omega_g^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{5}\right)^2 + 1}}{2} = 3 = 9.5 \text{ dB}$$

在实际工程设计中,必须先确定系统的稳定性。对于不稳定的系统,没有必要计算稳定裕度。在稳定的前提下,只要绘出 $L(\omega)$ 曲线,可以直接在图上读 ω_c ,不需太多计算。

5.6 利用开环对数幅频特性分析系统的性能

在频域中对系统进行分析、设计时,通常是以频域指标为依据的,但是频域指标不如时域指标直观、准确,因此,需进一步探讨频域指标与时域指标之间的关系。考虑到对数频率特性在控制工程中应用的广泛性,本节以 Bode 图为基础形式,首先讨论开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 的形状与性能指标之间的关系,然后根据频域指标与时域指标之间的关系估算出系统的时域响应性能。

实际系统的开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 一般都符合如图 5-50 所示的特征:左端(频率较低的部分)高;右端(频率较高的部分)低。将 $L(\omega)$ 人为地分为三个频段:低频段、中频段和高频段。低频段主要是指第一个转折频率以左的频段;中频段是指截止频率 ω_c 附近的频段;高频段是指频率远大于 ω_c 的频段。这三个频段包含了闭环系统性能不同方面的信息,需要分别进行讨论。

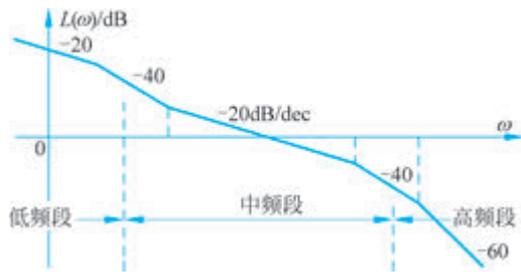


图 5-50 对数频率特性三个频段的划分

需要指出,开环对数频率特性三个频段的划分是相对的,各频段之间没有严格的界限。一般控制系统的频段范围为 $0.01 \sim 100 \text{ rad/s}$ 。这里所述的“高频段”与无线电学科里的“超高频”“甚高频”不是一个概念。

5.6.1 $L(\omega)$ 低频段渐近线与系统稳态误差的关系

低频段通常是指 $L(\omega)$ 的渐近线在第一个转折频率左边的频段,这一频段的特性完全由积分环节和开环增益决定。设低频段对应的传递函数



课程视频



MOOC 视频

$$G_d(s) = \frac{K}{s^v}$$

则低频段对数幅频特性

$$20\lg |G_d(j\omega)| = 20\lg \frac{K}{\omega^v}$$

将低频段对数幅频特性曲线延长交于 0dB 线, 交点频率 $\omega_0 = K^{\frac{1}{v}}$ 。可以看出, 低频段斜率越小(负数的绝对值越大), 位置越高, 对应积分环节数目越多, 开环增益越大。在闭环系统稳定的条件下, 其稳态误差越小, 稳态精度越高。因此, 根据 $L(\omega)$ 低频段可以确定系统型别 v 和开环增益 K , 利用第 3 章中介绍的静态误差系数法可以求出系统在给定输入下的稳态误差。

5.6.2 $L(\omega)$ 中频段特性与系统动态性能的关系

中频段是指 $L(\omega)$ 在截止频率 ω_c 附近的频段, 这段特性集中反映了闭环系统动态响应的平稳性和快速性。

一般来说, $\varphi(\omega)$ 的大小与对应频率下 $L(\omega)$ 的斜率有密切关系, $L(\omega)$ 斜率越负, 则 $\varphi(\omega)$ 越小(负数的绝对值越大)。在 ω_c 处, $L(\omega)$ 曲线的斜率对相角裕度 γ 的影响最大, 越远离 ω_c 处的 $L(\omega)$ 斜率对 γ 的影响就越小。定性来讲, 如果 $L(\omega)$ 曲线的中频段斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$, 并且占据较宽的频率范围, 则相角裕度 γ 就较大(接近 90°), 系统的超调量就很小。反之, 如果中频段是 $-40\text{dB}/\text{dec}$ 的斜率, 且占据较宽的频率范围, 则相角裕度 γ 就很小(接近 0°), 系统的平稳性和快速性会变得很差。因此, 为保证系统具有满意的动态性能, 希望 $L(\omega)$ 以 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 的斜率穿越 0dB 线, 并保持较宽的中频段范围。闭环系统的动态性能主要取决于开环对数幅频特性中频段的形状。

1. 二阶系统

典型二阶系统的结构图可用图 5-51 表示。其中开环传递函数为

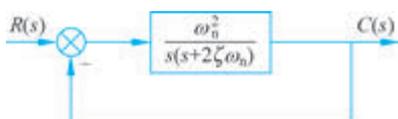


图 5-51 典型二阶系统结构图

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad 0 < \zeta < 1$$

相应的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

1) γ 和 $\sigma\%$ 的关系

系统开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} \quad (5-72)$$

开环幅频和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega \sqrt{\omega^2 + (2\zeta\omega_n)^2}}$$



课程视频



MOOC 视频

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\zeta\omega_n}$$

在 $\omega = \omega_c$ 处, $A(\omega) = 1$, 即

$$A(\omega_c) = \frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + (2\zeta\omega_n)^2}} = 1$$

亦即

$$\omega_c^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$$

解之, 得

$$\omega_c = \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \omega_n \quad (5-73)$$

当 $\omega = \omega_c$ 时, 有

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$

由此可得系统的相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = \arctan \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} \quad (5-74)$$

将式(5-73)代入式(5-74), 得

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} \quad (5-75)$$

根据式(5-75), 可以画出 γ 和 ζ 的函数关系曲线如图 5-52 所示。

另外, 典型二阶系统超调量

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (5-76)$$

为便于比较, 将式(5-76)的函数关系也一并绘于图 5-52 中。

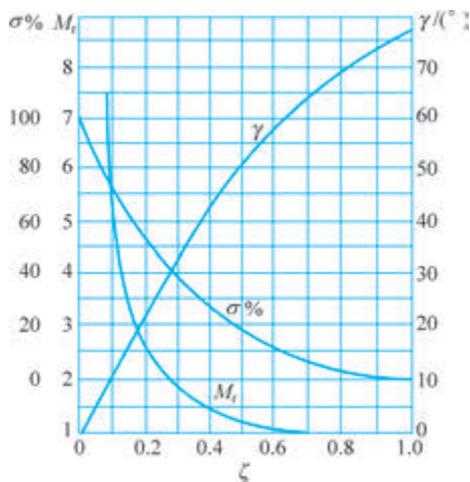


图 5-52 二阶系统 $\sigma\%$ 、 M_r 、 γ 与 ζ 的关系曲线

从图 5-52 所示曲线可以看出, γ 越小(即 ζ 越小), $\sigma\%$ 就越大; 反之, γ 越大, $\sigma\%$ 就越小。通常希望 $30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ 。

```

%图5-52的绘制程序
xi=0:0.001:1;MMr=[];kks=[];
for i=1:length(xi)
    gamma(i)=atan(2*xi(i)/sqrt(sqrt(4*xi(i)^4+1)-2*xi(i)^2))*180/pi;
    sigma(i)=exp(-pi*xi(i)/sqrt(1-xi(i)^2))*100/2+10;
    if xi(i)<0.707
        Mr(i)=1/(2*xi(i)*sqrt(1-xi(i)^2));
    else Mr(i)=1;
    end
    if Mr(i)<=7.5
        MMr=[MMr Mr(i)*10-10];
        kks=[kks xi(i)];
    end
end
end
plot(xi, gamma, 'b-', xi, sigma, 'r-', kks, MMr, 'g-');grid on
    
```

2) γ, ω_c 与 t_s 的关系

由时域分析法可知,典型二阶系统调节时间(取 $\Delta=0.05$ 时)为

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} \quad 0.3 < \zeta < 0.8 \quad (5-77)$$

将式(5-77)与式(5-73)相乘,得

$$t_s\omega_c = \frac{3.5}{\zeta} \sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2} \quad (5-78)$$

再由式(5-75)和式(5-78)可得

$$t_s\omega_c = \frac{7}{\tan\gamma} \quad (5-79)$$

将式(5-79)的函数关系绘成曲线,如图 5-53 所示。可见,调节时间 t_s 与相角裕度 γ 和截止频率 ω_c 都有关。当 γ 确定时, t_s 与 ω_c 成反比。换言之,如果两个典型二阶系统的相角裕度 γ 相同,那么它们的超调量也相同(见图 5-52),这样, ω_c 较大的系统,其调节时间 t_s 必然较短(见图 5-53)。

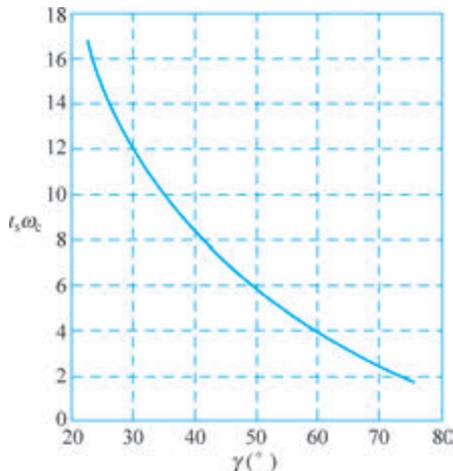


图 5-53 二阶系统 $t_s\omega_c$ 与 γ 的关系曲线

```

%图5-53的绘图程序
xi=0.2:0.01:1;
for i=1:length(xi)
    gamma(i)=atan(2*xi(i)/sqrt(sqrt(4*xi(i)^4+1)-2*xi(i)^2));
    TsWc(i)=7/tan(gamma(i));
end
plot(gamma*180/pi, TsWc, 'b-');grid on;

```

例 5-15 二阶系统结构图如图 5-54 所示。试分析系统开环频域指标与时域指标的关系。

解 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 \alpha}{T_i s (T_a s + 1)} = \frac{K}{s (T_a s + 1)}$$

式中, $K = K_1 K_2 \alpha / T_i$; 转折频率为 $\omega_2 = 1/T_a$ 。若取

$$\omega_c = \frac{1}{2T_a} = \frac{\omega_2}{2} \quad (5-80)$$

则开环对数幅频特性曲线如图 5-55 所示。系统的相角裕度为

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c T_a \\ &= 90^\circ - \arctan \frac{1}{2T_a} \cdot T = 63.4^\circ \end{aligned}$$

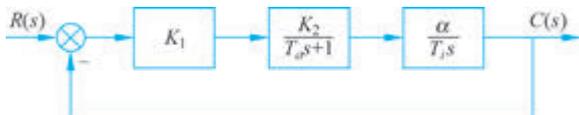


图 5-54 系统结构图

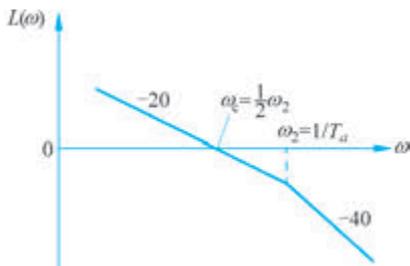


图 5-55 系统的对数幅频特性曲线

根据所求得的 γ 值,查图 5-52 可得 $\zeta = 0.707, \sigma\% = 4.3\%$ 。由图 5-53 查得 $t_s \omega_c = 3.5$ 。再由式(5-80)得

$$t_s = \frac{3.5}{\omega_c} = \frac{7}{\omega_2} = 7T_a$$

若增加开环增益,则图 5-55 中所示的 $L(\omega)$ 向上平移, ω_c 右移。当 ω_c 移至更靠近 ω_2 时,相角裕度变得较小,超调量自然变大。例如,若选 $\omega_c = \omega_2 = 1/T_a$ 时,则相角裕度 $\gamma = 45^\circ$,从上述曲线查得 $\zeta = 0.42, \sigma\% = 23\%$ 。若 K 值进一步加大,则 ω_c 将落在 -40dB/dec 斜率的频段上,相角裕度将变得更小,超调量就更大。

2. 高阶系统

对于三阶或三阶以上的高阶系统,要准确推导出开环频域特征量(γ 和 ω_c)与时域指标($\sigma\%$ 和 t_s)之间的关系是很困难的,即使导出这样的关系式,使用起来也不方便,实用



课程视频

意义不大。在控制工程分析与设计中,通常采用下面从工程实践中总结出来的近似公式,由 ω_c 、 γ 估算系统的动态性能指标,即有

$$\sigma\% = \left[0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) \right] \times 100\% \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (5-81)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right)^2 \right] \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (5-82)$$

图 5-56 所示的两条曲线是根据上述两式绘成的,以供查用。图中曲线表明,当 ω_c 一定时,随着 γ 值的增加,高阶系统的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 都会降低。

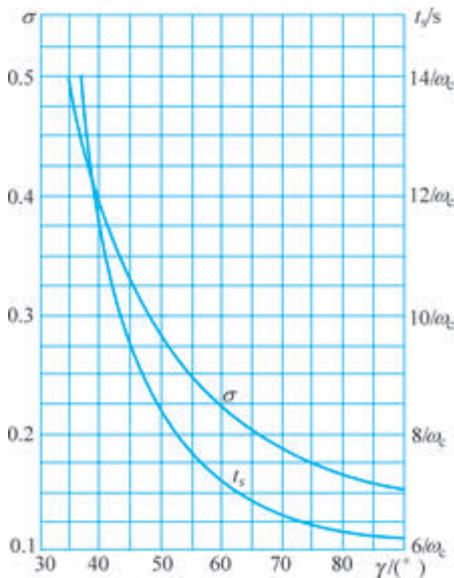


图 5-56 高阶系统 $\sigma\%$ 、 t_s 与 γ 的关系

```

%图5-56的绘制程序
gamma=30:0.01:90;Ts=[];Sigma=[];Gamma1=[];Gamma2=[];
for i=1:length(gamma);
    temp=1/sin(gamma(i)*pi/180)-1;
    sigma=0.16+0.4*temp;
    ts=pi*(2+1.5*temp+2.5*temp^2)*0.5/9-6*0.5/9+0.1;
    if ts<=0.5
        Gamma1=[Gamma1 gamma(i)];
        Ts=[Ts ts];
    end
    if sigma<=0.5
        Gamma2=[Gamma2 gamma(i)];
        Sigma=[Sigma sigma];
    end
end
plot(Gamma2, Sigma, 'b-', Gamma1, Ts, 'r-');
axis([30 90 0.1 0.55]);grid on;
    
```

5.6.3 $L(\omega)$ 高频段特性与系统抗高频干扰能力的关系

$L(\omega)$ 的高频段特性是由小时间常数的环节构成的,其转折频率均远离截止频率 ω_c ,所以对系统的动态性能影响不大。但是,从系统抗干扰的角度出发,研究高频段的特性是具有实际意义的,现说明如下。

对于单位反馈系统,开环频率特性 $G(j\omega)$ 和闭环频率特性 $\Phi(j\omega)$ 的关系为

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

在高频段,一般有 $20\lg|G(j\omega)| \ll 0$, 即 $|G(j\omega)| \ll 1$ 。故由上式可得

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|} \approx |G(j\omega)|$$

即在高频段,闭环幅频特性近似等于开环幅频特性。

因此, $L(\omega)$ 高频段特性的幅值,直接反映出系统对输入端高频信号的抑制能力,高频段的分贝值越低,说明系统对高频信号的衰减作用越大,即系统的抗高频干扰能力越强。

综上所述,希望的开环对数幅频特性应具有如下特点。

(1) 如果要求具有一阶或二阶无差度(即系统在阶跃或斜坡作用下无稳态误差),则 $L(\omega)$ 特性的低频段应具有 -20dB/dec 或 -40dB/dec 的斜率。为保证系统的稳态精度,低频段应有较高的分贝值。

(2) $L(\omega)$ 特性应以 -20dB/dec 的斜率穿过零分贝线,且具有一定的中频段宽度。这样,系统就有足够的稳定裕度,保证闭环系统具有较好的平稳性。

(3) $L(\omega)$ 特性应具有较高的截止频率 ω_c ,以提高闭环系统的快速性。

(4) $L(\omega)$ 特性的高频段应尽可能低,以增强系统的抗高频干扰能力。

三频段理论并没有提供校正系统的具体方法,但它为如何设计一个具有满意性能的闭环系统指出了原则和方向。

5.7 闭环频率特性曲线的绘制

反馈控制系统的性能,除了用其开环频率特性来估算外,也可以根据闭环频率特性来分析。确定闭环频率特性有不同方法,下面仅讨论通过系统的开环频率特性来求闭环频率特性的图解法。

5.7.1 用向量法求闭环频率特性

对于单位反馈系统,如果以幅值和相角形式表示开环频率特性

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

则闭环频率特性可以表示为

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$



课程视频



MOOC 视频

其中,闭环频率特性的幅值和相角可以分别表示为

$$M(\omega) = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right| = \left[\left(1 + \frac{1}{A^2(\omega)} + \frac{2\cos\varphi(\omega)}{A(\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \quad (5-83)$$

$$\alpha(\omega) = \angle \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \arctan \frac{\sin\varphi(\omega)}{\cos\varphi(\omega) + A(\omega)} \quad (5-84)$$

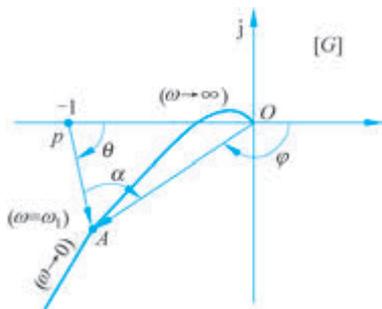


图 5-57 开环频率特性与闭环频率特性的向量关系

在 G 平面上,系统开环频率特性可用向量表示,如图 5-57 所示。当频率 $\omega = \omega_1$ 时,向量 \overrightarrow{OA} 表示 $G(j\omega_1)$ 。向量 \overrightarrow{PA} 表示 $1+G(j\omega_1)$ 。因此,闭环频率特性 $\Phi(j\omega_1)$ 可由两个向量之比求得

$$\Phi(j\omega_1) = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{PA}}$$

即有

$$M(\omega_1) = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{PA}|}$$

$$\alpha(\omega_1) = \angle \overrightarrow{OA} - \angle \overrightarrow{PA} = \varphi - \theta$$

可见,只要给出系统的开环幅相特性 $G(j\omega)$,就可在 $\omega = 0 \sim \infty$ 的范围内采用图解算法逐点求出系统的闭环频率特性。用这种方法求闭环频率特性,几何意义清晰,容易理解,但过程比较麻烦。

5.7.2 尼柯尔斯图

用开环频率特性求系统的闭环频率特性时,需要准确绘制出系统的开环幅相特性曲线 $G(j\omega)$,这样做一般比较麻烦,因此希望通过开环对数频率特性来求闭环频率特性。为查对方便和互相换算,将式(5-83)和式(5-84)的关系在对数幅相平面上绘制成标准图线,这就是尼柯尔斯图,如图 5-58 所示。

尼柯尔斯图由两簇曲线组成。一簇是对应于闭环频率特性的幅值为定值($20\lg M$)时的曲线;另一簇则是对应于闭环频率特性的相角为定值(α)时的曲线。尼柯尔斯图是在对数幅相坐标中绘出的,其横坐标是开环频率特性的相角 $\varphi(\omega)$,单位是($^\circ$);纵坐标是开环对数频率特性的幅值 $L(\omega)$,单位是 dB。尼柯尔斯图左右对称于 -180° 线。每隔 360° ,等幅值图线和等相角图线重复一次。

考虑到工程上常常要对 $L(\omega) = 0$ 以及 $\varphi(\omega) = -180^\circ$ 附近的频率特性进行研究,图 5-58 绘出了相角在 $-180^\circ \sim 0^\circ$ 的尼柯尔斯图。为了使用方便,等幅值曲线上的对应值用分贝表示,而等相角曲线的对应值仍用度表示。

使用尼柯尔斯图求闭环频率特性时,需首先绘制系统的开环对数幅相特性曲线。然后,将所得的开环对数幅相特性曲线以相同的比例尺覆盖在尼柯尔斯图上,从对数幅相特性曲线与尼柯尔斯图上的等幅值曲线、等相角曲线的交点,可读得各个频率下闭环频率特性的对数幅值和相角值。

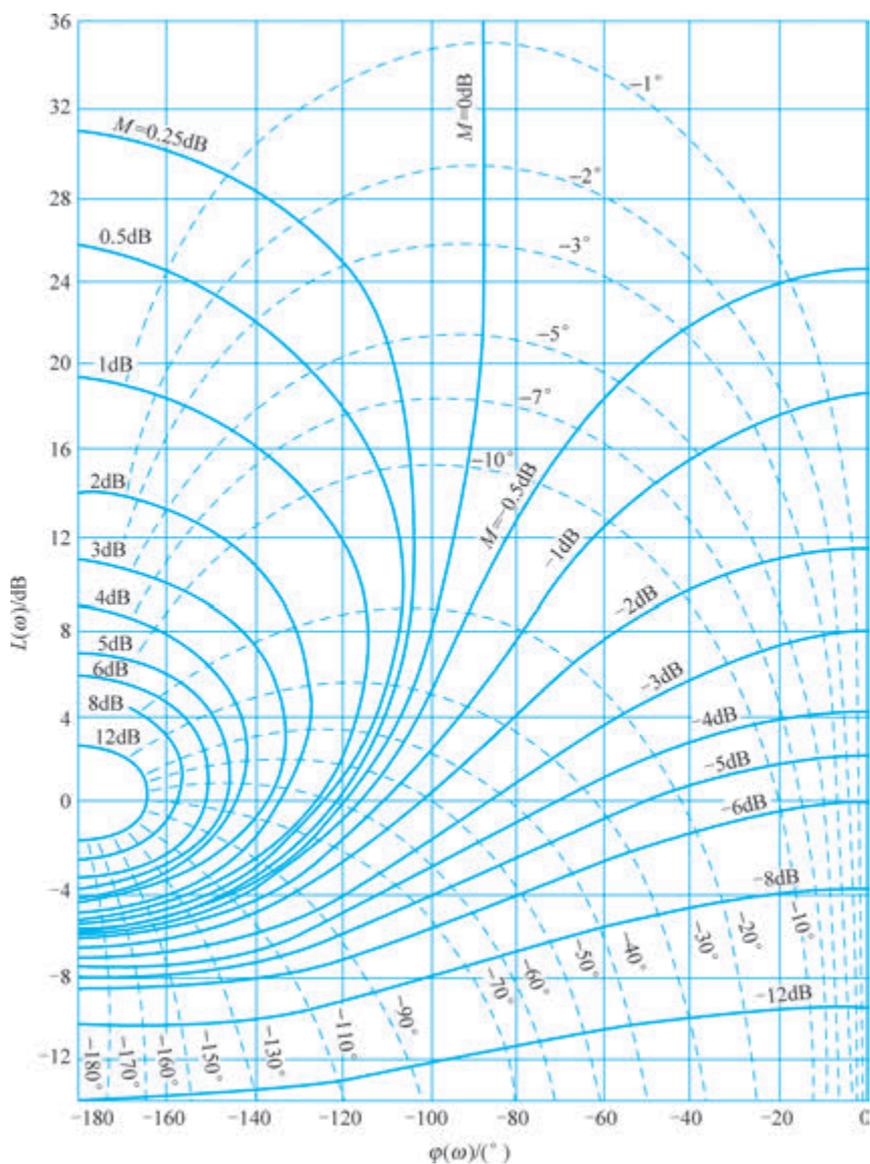


图 5-58 尼柯尔斯图

5.8 利用闭环频率特性分析系统的性能



课程视频

5.8.1 闭环频率特性的几个特征量

利用闭环频率特性也可以间接反映出系统的性能。典型的闭环幅频特性可用以下几个特征量来描述。

(1) 零频值 $M(0)$: $\omega=0$ 时的闭环幅频特性值, 也就是闭环系统的增益, 或者说是系统单位阶跃响应的稳态值。如果 $M(0)=1$ (如图 5-59 所示), 则意味着当阶跃函数作用

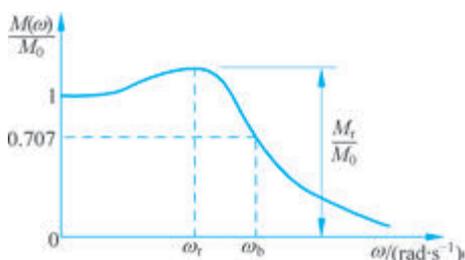


图 5-59 典型的闭环幅频特性曲线

于系统时,系统响应的稳态值与输入值一致,即此时系统的稳态误差为 0。所以 $M(0)$ 直接反映了系统在阶跃作用下的稳态精度。 $M(0)$ 值越接近 1,系统的稳态精度越高。

(2) 谐振峰值 M_r : 闭环频率特性的最大值 M_{\max} 与零频值 $M(0)$ 之比,即 $M_r = M_{\max}/M(0)$ 。 M_r 值大,表明系统对某个频率的正弦输入信号反映强烈,有振荡的趋向。这意味着

系统的相对稳定性较差,系统的阶跃响应会有较大的超调量。

(3) 谐振频率 ω_r : 指出现谐振峰值 M_r 时的角频率。

(4) 带宽频率 ω_b : 闭环幅频特性 $M(\omega)$ 降低到其零频值的 70.7% 时所对应的频率。通常把 $[0, \omega_b]$ 对应的频率范围称为通频带或频带宽度(简称带宽)。控制系统的带宽反映系统静态噪声滤波特性,同时带宽也用于衡量瞬态响应的特性。带宽大,高频信号分量容易通过系统达到输出端,系统上升时间就短;相反,闭环带宽小,系统时间响应慢,快速性就差。

5.8.2 闭环频域指标与时域指标的关系

用闭环频率特性分析、设计系统时,通常以谐振峰值 M_r 和频带宽度 ω_b (或谐振频率 ω_r) 这些特征量作为依据,这就是闭环频域指标。 M_r, ω_b 与时域指标 $\sigma\%, t_s$ 之间亦存在密切关系,这种关系在二阶系统中是准确的,在高阶系统中则是近似的。

1. 二阶系统

典型二阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-85)$$

1) M_r 与 $\sigma\%$ 的关系

由二阶振荡环节幅相特性的讨论可知,典型二阶系统的谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r 为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 0.707 \quad (5-86)$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad 0 \leq \zeta \leq 0.707 \quad (5-87)$$

将式(5-87)所描述的 M_r 与 ζ 的函数关系一并绘于图 5-52 中,得 $M_r = f(\zeta)$ 。曲线表明, M_r 越小,系统的阻尼性能越好。若 M_r 值较高,则系统的动态过程超调量大,收敛慢,平稳性和快速性都较差。从图 5-52 还可看出, $M_r = 1.2 \sim 1.5$ 时,对应的 $\sigma\% = 20\% \sim 30\%$,这时的动态过程有适度的振荡,平稳性及快速性均较好。控制工程中常以 $M_r = 1.3$ 作为系统设计的依据。若 M_r 过大(如 $M_r > 2$),则闭环系统阶跃响应的超调量会大

于40%。

2) M_r 、 ω_b 与 t_s 的关系

根据通频带的定义,在带宽频率 ω_b 处,典型二阶系统闭环频率特性的幅值为

$$M(\omega_b) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707$$

由此解出带宽 ω_b 与 ω_n 、 ζ 的关系为

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (5-88)$$

从时域分析可知系统的调节时间如式(5-70)所示。现将式(5-70)、式(5-79)相乘,得

$$\omega_b t_s = \frac{3.5}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (5-89)$$

将式(5-89)与式(5-87)联系起来,可求得 $\omega_b t_s$ 与 M_r 的函数关系,并绘成曲线如图 5-60 所示。

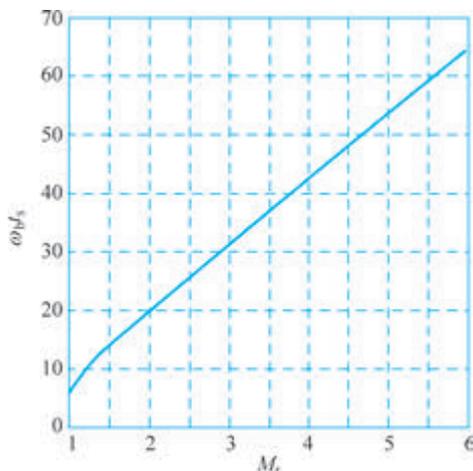


图 5-60 二阶系统 $\omega_b t_s$ 与 M_r 的关系曲线

```

*图5-60的绘图程序
xi=0:0.001:0.707;Mr=[];Xi=[];
for i=1:length(xi)
    mr=1/(2*xi(i)*sqrt(1-xi(i)^2));
    if mr>=1&&mr<=6
        Xi=[Xi xi(i)];
        Mr=[Mr mr];
    end
end
for i=1:length(Xi)
    WbTs(i)=3.5*sqrt(1-2*Xi(i)^2+...
        sqrt(2-4*Xi(i)^2+4*Xi(i)^4))/Xi(i);
end
plot(Mr,WbTs,'b-');
grid on;
xlabel('Mr');ylabel('WbTs');
    
```

由图可见,对于给定的谐振峰值 M_r ,调节时间 t_s 与带宽 ω_b 成反比,频带宽度越宽,则调节时间越短。

2. 高阶系统

对于高阶系统,时域指标与闭环频率特性的特征量之间没有确切关系。但是,若高阶系统存在一对共轭复数主导极点,则可用二阶系统所建立的关系来近似表示。至于一般的高阶系统,常用下面两个经验公式估算系统的动态指标:

$$\sigma\% = [0.16 + 0.4(M_r - 1)] \times 100\% \quad 1 \leq M_r \leq 1.8 \quad (5-90)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]$$

$$= \frac{1.6\pi}{\omega_b} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \quad 1 \leq M_r \leq 1.8 \quad (5-91)$$

实际上,高阶系统特征量谐振峰值 M_r 、带宽频率 ω_b 与开环频率特性中的相角裕度 γ (γ 不太大时)、截止频率 ω_c 之间存在如下近似关系:

$$\begin{cases} \omega_b = 1.6\omega_c \\ M_r \approx \frac{1}{\sin\gamma} \end{cases} \quad (5-92)$$

所以,式(5-90)、式(5-91)与式(5-81)、式(5-82)本质上是一致的。

式(5-90)、式(5-91)的函数关系如图 5-61 所示。由图可以看出,高阶系统的超调量 $\sigma\%$ 随 M_r 的增大而增大。系统的调节时间 t_s 亦随着 M_r 的增大而增大,但随着 ω_c 的增大而减小。

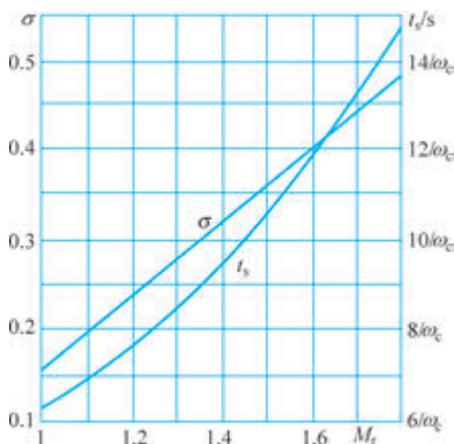


图 5-61 高阶系统 $\sigma\%$ 、 t_s 与 M_r 的关系曲线

```

%图5-61的绘制程序
wc=1;Mr=1:0.001:1.8;
for i=1:length(Mr)
    sigma(i)=0.16+0.4*(Mr(i)-1);
    ts(i)=pi*(2+1.5*(Mr(i)-1)+2.5*(Mr(i)-1)^2)/wc;
end
plot(Mr, sigma, 'b-', Mr, ts*0.45/9-6*0.45/9+0.1, 'r-');grid on;
axis([1 1.8 0.1 0.55]);
    
```

例 5-16 设单位反馈系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

- (1) 绘制开环对数频率特性曲线,求系统的 ω_c 、 γ ,并由此估算 $\sigma\%$ 、 t_s 。
- (2) 试用尼柯尔斯图求系统的 M_r 、 ω_r 、 ω_b ,估算 $\sigma\%$ 、 t_s 。
- (3) 绘制系统的闭环对数频率特性曲线。

解 (1) 绘制开环对数频率特性曲线如图 5-62 所示。令 $|G(j\omega)| = 1$,可解(或由图读)出 $\omega_c = 0.751$, $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 33^\circ$ 。

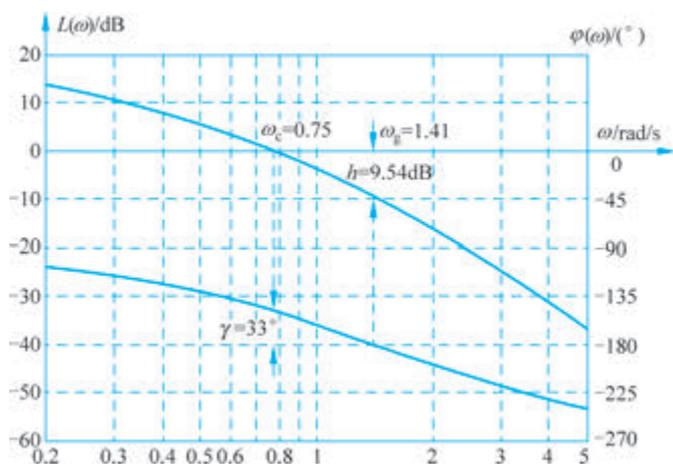


图 5-62 开环对数频率特性曲线

*图5-62、图5-64的绘制程序

```
num=[0 0 0 1];
den=conv(conv([1 0],[1 1]),[0.5 1]);
bode(num,den,[0.2 5]); grid on;figure;
bode(num,num+den,[0.2 5]); grid on;
```

查图 5-56 可得

$$\begin{cases} \sigma \% \approx 50\% \\ t_s \approx \frac{15}{\omega_c} = \frac{15}{0.751} = 20 \end{cases}$$

(2) 在开环对数频率特性曲线上取点标在尼柯尔斯图上,如图 5-63 所示。读出相应的闭环频率特征参数。与 $G(j\omega)$ 相切的等 M 线读数为 5,因此有

$$\begin{cases} M_r = 5\text{dB} = 1.78 \\ \omega_r = 0.824 \end{cases}$$

$G(j\omega)$ 在 $\omega = 1.26$ 处与 -3dB 等 M 线相交,因此有

$$\omega_b = 1.26$$

由式(5-90)、式(5-91),得

$$\sigma \% = [0.16 + 0.4(1.78 - 1)] \times 100 = 47.2\%$$

$$t_s = \frac{1.6\pi}{1.26} [2 + 1.5(1.78 - 1) + 2.5(1.78 - 1)^2] = 18.7$$

由式(5-92),得

$$\omega_b = 1.6\omega_c = 1.6 \times 0.751 = 1.2$$

$$M_r \approx \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{\sin 33^\circ} = 1.836$$

可见估算结果与实际值 $\omega_b = 1.26$ 、 $M_r = 1.78$ 是比较接近的。

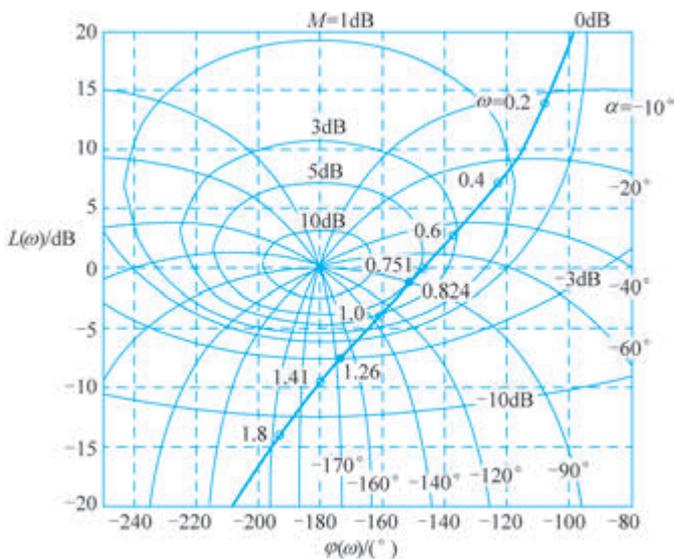


图 5-63 对数幅相特性曲线

(3) 将对数幅相特性曲线上各点对应的闭环 M 值、 α 值描在半对数坐标纸上,可以得到相应的闭环对数频率特性曲线,如图 5-64 所示。

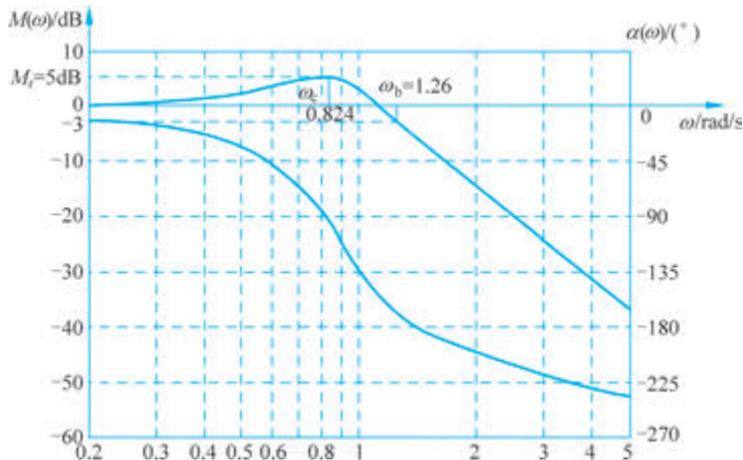


图 5-64 闭环对数频率特性曲线

5.9 频率法串联校正

在第 3 章已经讲述了反馈校正和复合校正方法,本节介绍基于频率法的串联校正方法。

将校正装置放在前向通道中,使之与系统被控对象等固有部分相串联,这种校正方法称为串联校正,如图 5-65 所示。图中 $G_c(s)$ 是校正装置的传递函数。

串联校正根据所用校正装置的频率特性不同,分为串联超前、串联滞后和串联滞后-

超前校正三种方式。频率法串联校正的实质是利用校正装置改变系统的开环对数频率特性,使之符合三频段的要求,从而达到改善系统性能的目的。

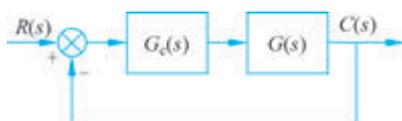


图 5-65 系统串联校正方法

5.9.1 相角超前校正

1. 超前网络特性

图 5-66 是 RC 超前网络的电路图,如果输入信号源的内阻为零,负载阻抗为无穷大,则其传递函数可写为

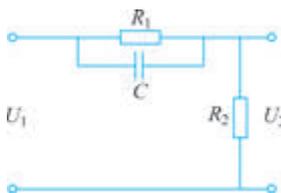


图 5-66 超前校正网络

$$G_{c0}(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

式中, $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1, T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$ 。

可见,若将无源超前网络接入系统,系统的开环增益会降到原来的 $1/a$ 。为补偿超前网络造成的增益衰减,需要另外串联一个放大器或将原放大器的放大倍数提高 a 倍。增益

补偿后的网络传递函数为

$$G_c(s) = aG_{c0}(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \quad (5-93)$$

画出超前网络 $G_c(s)$ 的对数频率特性曲线,如图 5-67(a)所示。可见,该校正装置的相角总是超前的,故称为相角超前网络。

超前网络 $G_c(s)$ 的相频特性为

$$\varphi_c(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega = \arctan \frac{(a-1)T\omega}{1 + a(T\omega)^2} \quad (5-94)$$

将式(5-94)对 ω 求导并令其为零,可求出最大超前角频率

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad (5-95)$$

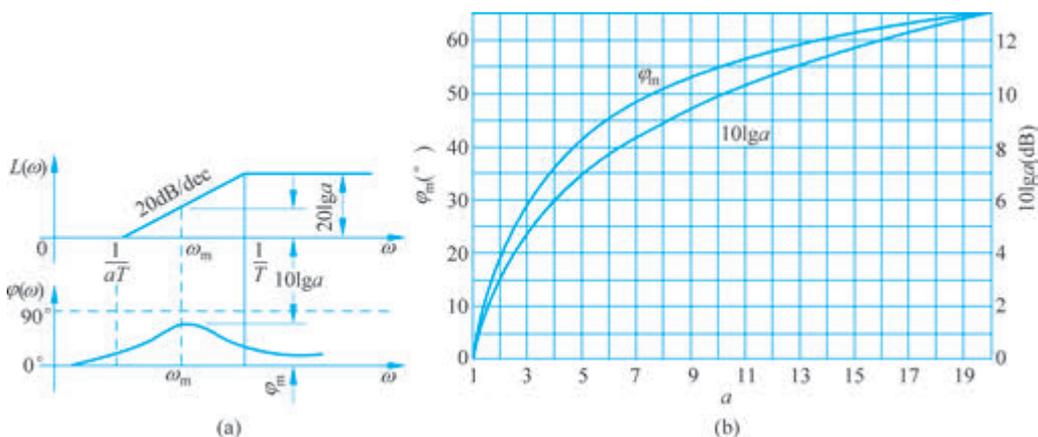


图 5-67 无源超前网络特性曲线



课程视频



MOOC 视频

```

%图5-67的绘图程序
a=1:0.01:20;
for i=1:length(a)
    phi(i)=asin((a(i)-1)/...
        (a(i)+1))*180/pi;
    L(i)=10*log10(a(i));
end
plot(a,phi,'b-',a,L*5,'r-');
axis([1 20 0 70]);grid on;
    
```

显然, ω_m 位于 $L_c(\omega)$ 两转折频率 $1/aT$ 和 $1/T$ 的几何中心。将 ω_m 代入式(5-94), 可求出最大超前角

$$\varphi_m = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \quad (5-96)$$

式(5-96)表明, 最大超前角 φ_m 仅与 a 有关。 a 值选得越大, 获得的 φ_m 越大, 但同时高频段也抬得越高。为使系统具有较高的信噪比, 实际选用的

a 值一般不超过 20。此外, 由图 5-67(a) 可以看出, ω_m 处的对数幅频值为

$$L_c(\omega_m) = 20 \lg |aG_c(j\omega_m)| = 10 \lg a \quad (5-97)$$

φ_m 和 $10 \lg a$ 随 a 变化的关系曲线如图 5-67(b) 所示。可见, 一级超前网络能提供的最大超前角不超过 60° 。

由式(5-96)可推出

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (5-98)$$

利用式(5-98)可以根据所需的 φ_m 确定满足条件的 a 。

超前校正装置对控制系统会产生两方面的有利影响: 一是相角超前, 即适当选择校正装置参数, 使最大超前角频率 ω_m 置于校正后系统的截止频率 ω_c 处, 就可以有效增加系统的相角裕度, 提高系统的相对稳定性。二是幅值增加, 即将校正装置的对数幅频特性叠加到原系统开环对数幅频特性上, 会使系统的截止频率 ω_c 右移(增大), 有利于提高系统响应的快速性。

附录 B 中给出了常用无源和有源校正网络的电路图传递函数及对数幅频特性曲线, 供设计者选用。

2. 相角超前校正过程

超前网络的特性是相角超前, 幅值增加。串联超前校正的实质是将超前网络的最大超前角补在校正后系统开环频率特性的截止频率处, 提高校正后系统的相角裕度和截止频率, 从而改善系统的动态性能。

假设未校正系统的开环传递函数为 $G_0(s)$, 系统给定的稳态误差、截止频率、相角裕度和幅值裕度指标分别为 e_{ss}^* 、 ω_c^* 、 γ^* 和 h^* 。设计超前校正装置的一般步骤可归纳如下。

(1) 根据给定的稳态误差 e_{ss}^* 要求, 确定系统的开环增益 K 。

(2) 根据已确定的开环增益 K , 绘出未校正系统的对数幅频特性曲线, 并求出截止频率 ω_{c0} 和相角裕度 γ_0 。当 $\omega_{c0} < \omega_c^*$, $\gamma_0 < \gamma^*$ 时, 首先考虑用超前校正。

(3) 根据给定的相角裕度 γ^* , 计算校正装置所应提供的最大相角超前量 φ_m , 即

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + (5^\circ \sim 15^\circ) \quad (5-99)$$

式中, 预加的 $5^\circ \sim 15^\circ$ 是为了补偿因校正后截止频率增大导致的、校正前系统相角裕度的损失量。若未校正系统的对数幅频特性在截止频率处的斜率为 -40dB/dec 并不再向下



课程视频

转折,可以取 $5^\circ\sim 8^\circ$;若该频段斜率从 $-40\text{dB}/\text{dec}$ 继续转折为 $-60\text{dB}/\text{dec}$,甚至更小,则补偿角应适当取大些。注意,如果 $\varphi_m > 60^\circ$,则用一级超前校正不能达到要求的 γ^* 指标。

(4) 根据所确定的最大超前相角 φ_m ,按式(5-89)求出相应的 a 值,即

$$a = \frac{1 + \sin\varphi_m}{1 - \sin\varphi_m}$$

(5) 选定校正后系统的截止频率。

在 $-10\lg a$ 处作水平线,与 $L_0(\omega)$ 相交于 A' 点,交点频率设为 $\omega_{A'}$ 。取校正后系统的截止频率为

$$\omega_c = \max\{\omega_{A'}, \omega_c^*\} \quad (5-100)$$

(6) 确定校正装置的传递函数。

在选好的 ω_c 处作垂直线,与 $L_0(\omega)$ 交于 A 点;确定 A 点关于 0dB 线的镜像点 B ,过点 B 作 $+20\text{dB}/\text{dec}$ 直线,与 0dB 线交于 C 点,对应频率为 ω_C ;在 CB 延长线上定 D 点,使 $\frac{\omega_D}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_C}$,在 D 点将曲线改平,则对应超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_C} + 1}{\frac{s}{\omega_D} + 1} \quad (5-101)$$

(7) 验算。

写出校正后系统的开环传递函数

$$G(s) = G_c(s)G_0(s)$$

验算是否满足设计条件

$$\omega_c \geq \omega_c^*, \quad \gamma \geq \gamma^*, \quad h \geq h^*$$

若不满足则返回(3),适当增加相角补偿量,重新设计直到满足要求。当调整相角补偿量不能达到设计指标时,应改变校正方案,可尝试使用滞后-超前校正。

以下举例说明超前校正的具体过程。

例 5-17 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

试设计校正装置 $G_c(s)$,使校正后系统满足如下指标。

- (1) 当 $r=t$ 时,稳态误差 $e_{ss}^* \leq 0.1$ 。
- (2) 开环系统截止频率 $\omega_c^* \geq 6\text{rad}/\text{s}$ 。
- (3) 相角裕度 $r^* \geq 60^\circ$ 。
- (4) 幅值裕度 $h^* \geq 10\text{dB}$ 。

解 ① 根据稳态精度要求 $e_{ss}^* = 1/K \leq 0.1$,可得 $K \geq 10$,取 $K = 10$ 。

② 绘制未校正系统的对数幅频特性曲线如图 5-68 中 $L_0(\omega)$ 所示。可确定未校正系

统的截止频率和相角裕度:

$$\omega_{c0} = 3.16 < \omega_c^* = 6$$

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 3.16 = 17.5^\circ < \gamma^* = 60^\circ$$

可采用超前校正。

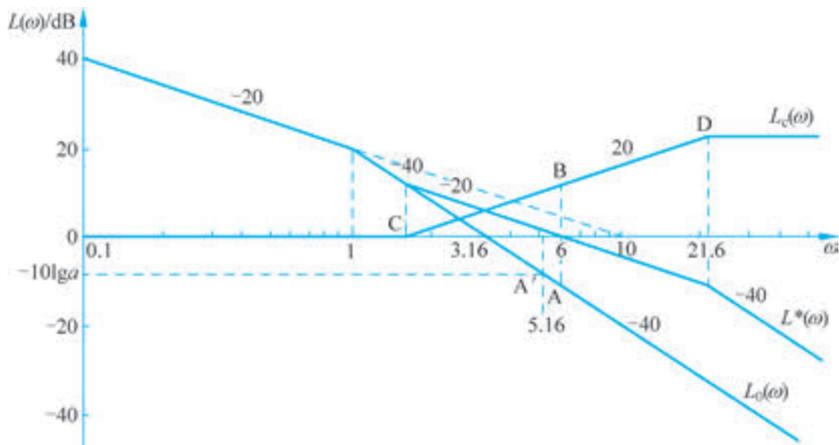


图 5-68 频率法超前校正过程

③ 所需提供的相角最大超前量为

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0 + 5^\circ = 60^\circ - 17.5^\circ + 5^\circ = 47.5^\circ$$

④ 超前网络参数 $a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 7$, $10 \lg a = 8.5 \text{ dB}$

⑤ 在 $-10 \lg a$ 处作水平线, 与 $L_0(\omega)$ 相交于 A' 点; 设交点频率为 $\omega_{A'}$, 由 $40 \lg(\omega_{A'} / \omega_{c0}) = 8.5$ 可得 $\omega_{A'} = \omega_{c0} 10^{\frac{8.5}{40}} = 5.16 < \omega_c^* = 6$, 所以选截止频率为

$$\omega_c = \max\{\omega_{A'}, \omega_c^*\} = \omega_c^* = 6$$

这样可以同时兼顾 ω_c^* 和 γ^* 两项指标, 避免不必要的重复设计。

⑥ 在 $\omega_c = 6$ 处作垂直线, 与 $L_0(\omega)$ 交于 A 点, 确定其关于 0dB 线的镜像点 B, 如图 5-68 所示; 过点 B 作 $+20 \text{ dB/dec}$ 直线, 与 0dB 线交于 C 点, 对应频率为 ω_C ; 在 CB 延长线上

定 D 点, 使 $\frac{\omega_D}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_C}$, 则 C 点频率

$$\omega_C = \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_c} = \frac{3.16^2}{6} = 1.667$$

D 点频率

$$\omega_D = \frac{\omega_c^2}{\omega_C} = \frac{6^2}{1.667} = 21.6$$

初步确定校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_C} + 1}{\frac{s}{\omega_D} + 1} = \frac{\frac{s}{1.667} + 1}{\frac{s}{21.6} + 1}$$

⑦ 验算指标。校正后系统的开环传递函数为

$$G^*(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{10\left(\frac{s}{1.667} + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{21.6} + 1\right)}$$

校正后系统的截止频率为

$$\omega_c = \omega_c^* = 6 \text{ rad/s}$$

相角裕度为

$$\begin{aligned} \gamma^* &= 180^\circ + \angle G^*(j\omega_c) = 180^\circ + \arctan \frac{6}{1.667} - 90^\circ - \arctan 6 - \arctan \frac{6}{21.6} \\ &= 180^\circ + 74.5^\circ - 90^\circ - 80.5^\circ - 15.5^\circ = 68.47^\circ > 60^\circ \end{aligned}$$

幅值裕度: $h^* \rightarrow \infty > 10 \text{ dB}$

满足设计要求。

图 5-68 中绘出了校正装置以及校正前后系统的开环对数幅频特性。可见校正前 $L_0(\omega)$ 曲线以 -40 dB/dec 斜率穿过 0 dB 线, 相角裕度不足, 校正后 $L^*(\omega)$ 曲线则以 -20 dB/dec 斜率穿过 0 dB 线, 并且在 $\omega_c = 6$ 附近保持了较宽的频段, 相角裕度有了明显的增加。

超前校正利用了超前网络相角超前、幅值增加的特性, 校正后可以使系统的截止频率 ω_c 、相角裕度 γ 均有所改善, 从而有效改善系统的动态性能。然而, 超前校正同时使 $L^*(\omega)$ 的高频段抬高, 相应使校正后系统抗高频干扰的能力有所下降, 这是不利的一面。

5.9.2 相角滞后校正

1. 滞后网络特性

无源滞后网络的电路图如图 5-69(a) 所示, 如果输入信号源的内阻为零, 负载阻抗为无穷大, 则其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} \quad (5-102)$$

其中, $b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$; $T = (R_1 + R_2)C$ 。

滞后网络的对数频率特性如图 5-69(b) 所示。由图可见, 滞后校正装置是一种低通滤波器, 由于其 $\varphi_c(\omega)$ 总是滞后的, 故称相角滞后校正装置。

与超前校正装置类似, 滞后校正装置的最大滞后角发生在 $1/T$ 和 $1/(bT)$ 的几何中心 $\omega_m = 1/(T\sqrt{b})$ 处, 计算最大滞后角 φ_m 的公式是

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-b}{1+b} \quad (5-103)$$



课程视频



MOOC 视频

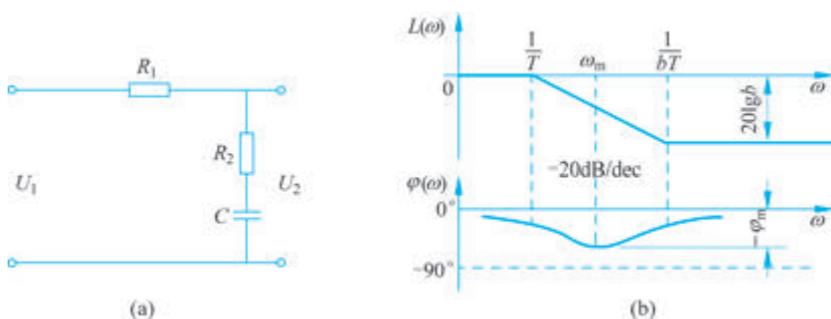


图 5-69 无源滞后网络及其特性

图 5-69(b) 还表明, 滞后网络对低频有用信号不产生衰减, 而对高频信号有削弱作用, b 值越小, 这种作用越强。

采用滞后校正装置进行串联校正时, 主要是利用其高频幅值衰减特性, 力求避免最大滞后角发生在校正后系统的截止频率 ω_c 附近。因此, 选择滞后校正装置参数时, 通常使校正装置的第二个转折频率 $1/(bT)$ 远小于 ω_c , 一般取

$$\frac{1}{bT} = \frac{\omega_c}{10} \quad (5-104)$$

此时, 滞后网络在 ω_c 处产生的相角滞后量按下式确定:

$$\varphi_c(\omega_c) = \arctan bT\omega_c - \arctan T\omega_c$$

由两角和的三角函数公式, 得

$$\tan \varphi_c(\omega_c) = \frac{bT\omega_c - T\omega_c}{1 + bT^2(\omega_c)^2}$$

代入式(5-104)及 $b < 1$ 的关系, 上式可化简为

$$\varphi_c(\omega_c) \approx \arctan[0.1(b-1)] \quad (5-105)$$

$\varphi_c(\omega_c)$ 和 $20\lg b$ 随 b 变化的关系曲线如图 5-70 所示。由图 5-70 可见, 只要使滞后网络的第二个转折频率离开校正后截止频率 ω_c 有 10 倍频 ($b=0.1$), 则滞后网络对校正后系统相角裕度造成的影响不会超过 -6° 。

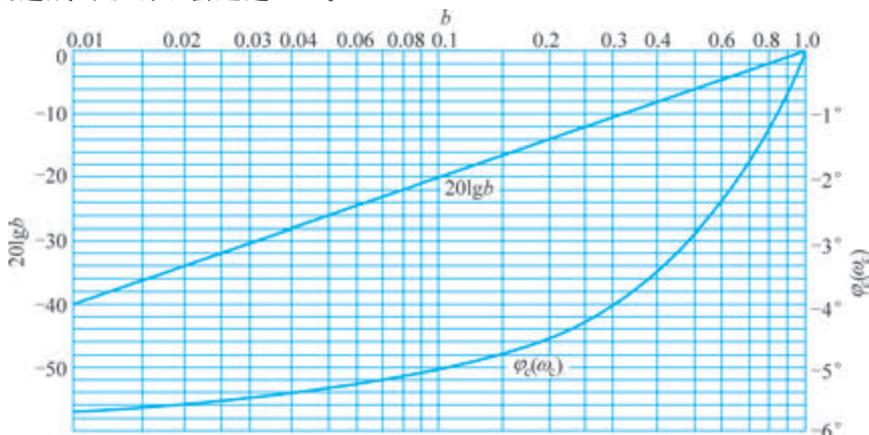


图 5-70 滞后网络关系曲线 ($1/(bT) = 0.1\omega_c'$)

```

%图5-70的绘制程序
b=0.01:0.0001:1.0;
for i=1:length(b)
    Lgb(i)=20*log10(b(i));
    phiv(i)=atan(0.1*(b(i)-1))*180/pi;
end
semilogx(b,phiv*10,'b-',b,Lgb,'r-');
grid on;

```

滞后校正装置本身对系统的相角没有贡献,但利用其幅值衰减特性,可以挖掘原系统自身的相角储备量,提高系统的稳定裕度;同时由于压低了高频段,相应提高了校正后系统的抗高频干扰能力。

2. 相角滞后校正过程

滞后校正的实质是利用滞后网络幅值衰减特性,将系统的中频段压低,使校正后系统的截止频率减小,挖掘系统自身的相角储备来满足校正后系统的相角裕度要求。

设计滞后校正装置的一般步骤可以归纳如下。

假设未校正系统的开环传递函数为 $G_0(\omega)$ 。系统设计指标为 e_{ss}^* 、 ω_c^* 、 γ^* 、 h^* 。

(1) 根据给定的稳态误差或静态误差系数要求,确定开环增益 K 。

(2) 根据确定的 K 值绘制未校正系统的对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$,确定其截止频率 ω_{c0} 和相角裕度 γ_0 。

(3) 判别是否适合采用滞后校正。

若 $\begin{cases} \omega_{c0} > \omega_c^* \\ \gamma_0 < \gamma^* \end{cases}$, 并且在 ω_c^* 处满足

$$\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c^*) \geq \gamma^* + 6^\circ \quad (5-106)$$

则可以采用滞后校正。否则用滞后校正不能达到设计要求,建议试用滞后-超前校正。

(4) 确定校正后系统的截止频率 ω_c 。

确定满足条件 $\gamma_0(\omega_{c1}) = \gamma^* + 6^\circ$ 的频率 ω_{c1} 。根据情况选择 ω_c ,使 ω_c 满足 $\omega_c^* \leq \omega_c \leq \omega_{c1}$ (建议取 $\omega_c = \omega_{c1}$,以使校正装置容易实现)。

(5) 设计滞后校正装置的传递函数 $G_c(s)$ 。

在选定的校正后系统截止频率 ω_c 处作垂直线交 $L(\omega_c)$ 于 A 点,确定 A 关于 0dB 线的镜像点 B,过 B 点作水平线,在 $\omega_c = 0.1\omega_c$ 处确定 C 点,过该点作斜率为 -20dB/dec 的直线交 0dB 于点 D,对应频率为 ω_D ,则校正后系统的传递函数可写为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_c} + 1}{\frac{s}{\omega_D} + 1} \quad (5-107)$$

(6) 验算。

写出校正后系统的开环传递函数 $G(s) = G_c(s)G_0(s)$,验算相角裕度 γ 和幅值裕度 h 是否满足



课程视频

$$\begin{cases} \gamma = 180^\circ + \angle G(\omega_c) \geq \gamma^* \\ h \geq h^* \end{cases} \quad (5-108)$$

否则返回(4)重新进行设计。

以下举例说明滞后校正的具体过程。

例 5-18 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

试设计校正装置 $G_c(s)$, 使校正后系统满足如下指标。

- ① 速度误差系数 $K_V^* = 30$ 。
- ② 开环系统截止频率 $\omega_c^* \geq 2.3 \text{ rad/s}$ 。
- ③ 相角裕度 $\gamma^* \geq 40^\circ$ 。
- ④ 幅值裕度 $h^* \geq 10 \text{ dB}$ 。

解 ① 由设计要求取 $K = K_V^* = 30$ 。

② 作出未校正系统的开环对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$, 如图 5-71 所示。设未校正系统的截止频率为 ω_{c0} , 则应有

$$|G(\omega_{c0})| \approx \frac{30}{\omega_{c0} \frac{\omega_{c0}}{10} \frac{\omega_{c0}}{5}} \approx 1$$

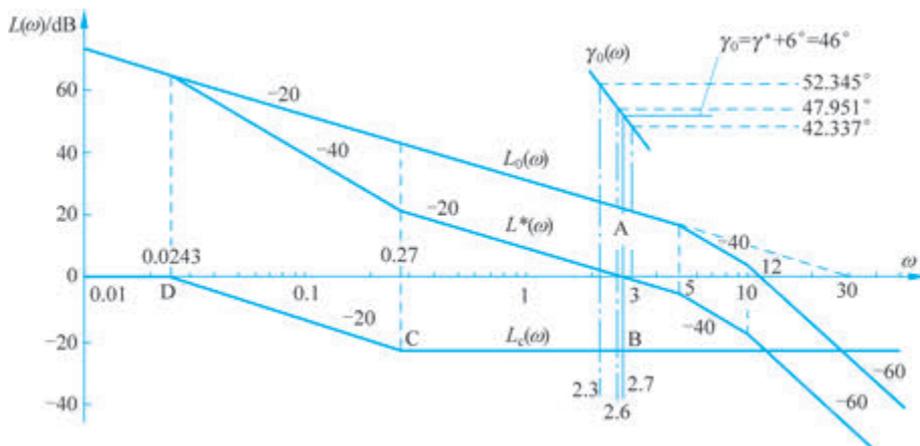


图 5-71 频率法滞后校正过程

可解出未校正系统的截止频率

$$\omega_{c0} = 11.45 > \omega_c^* = 2.3$$

未校正系统的相角裕度

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 180^\circ + \angle G_0(j\omega_{c0}) = 90^\circ - \arctan 0.1\omega_{c0} - \arctan 0.2\omega_{c0} \\ &= 90^\circ - 48.9^\circ - 66.4^\circ = -25.28^\circ \ll \gamma^* \\ &= 40^\circ \end{aligned}$$

③ 显然,用一级超前校正达不到 γ^* 的要求。在 ω_c^* 处,系统自身的相角储备量

$$\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c^*) = 52.345^\circ > \gamma^* + 6^\circ = 46^\circ$$

所以可采用滞后校正。

④ 为了不用画出准确的对数相频曲线 $\varphi_0(\omega)$ 而找出满足条件

$$\gamma_0(\omega_{c1}) = \gamma^* + 6^\circ = 46^\circ$$

的频率 ω_{c1} ,采用试探法。在 $\omega = 3$ 处

$$\gamma_0(3) = 180^\circ + \angle G_0(j3) = 42.337^\circ$$

在 $\omega = 2.6$ 处

$$\gamma_0(2.6) = 180^\circ + \angle G_0(j2.6) = 47.951^\circ$$

利用已得到的 3 组试探值,画出 $\gamma_0(\omega)$ 在 ω_c 附近较准确的局部(比例放大)图,如图 5-71 中 $\gamma_0(\omega)$ 所示。在 $\gamma_0(\omega) = \gamma^* + 6^\circ = 46^\circ$ 处反查出对应的频率 $\omega_{c1} = 2.7$,则可确定校正后系统截止频率的取值范围

$$2.3 = \omega_c^* \leq \omega_c \leq \omega_{c1} = 2.7$$

⑤ 取 $\omega_c = 2.7$,在 ω_c 处作垂直线交 $L_0(\omega)$ 于 A 点,确定 A 关于 0dB 线的镜像点 B;过 B 点作水平线,在 $\omega_c = 0.1\omega_c$ 处确定 C 点;过点 C 作斜率为 -20dB/dec 的直线交 0dB 于点 D,对应频率为 ω_D ,则 C 点频率

$$\omega_C = 0.1\omega_c = 0.1 \times 2.7 = 0.27$$

D 点频率

$$\frac{30}{2.7} = \frac{\omega_C}{\omega_D} \Rightarrow \omega_D = \frac{0.27 \times 2.7}{30} = 0.0243$$

所以校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_C} + 1}{\frac{s}{\omega_D} + 1} = \frac{\frac{s}{0.27} + 1}{\frac{s}{0.0243} + 1}$$

⑥ 验算指标。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{30\left(\frac{s}{0.27} + 1\right)}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)\left(\frac{s}{0.0243} + 1\right)}$$

校正后系统指标如下:

$$K = 30 = K_V^*$$

$$\omega_c = 2.7 > \omega_c^* = 2.3$$

$$\gamma^* = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$$

$$= 180^\circ + \arctan \frac{2.7}{0.27} - 90^\circ - \arctan(0.1 \times 2.7) -$$

$$\arctan(0.2 \times 2.7) - \arctan \frac{2.7}{0.0243}$$

$$= 41.3^\circ > 40^\circ$$

求出相角交界频率 $\omega_g = 6.8$, 校正后系统的幅值裕度

$$h = -20 \lg |G^*(\omega_g)| = 10.5 \text{dB} > h^*$$

设计指标全部满足。

图 5-71 中画出了校正装置以及校正前后系统的对数幅频特性曲线。校正前 $L_0(\omega)$ 以 -60dB/dec 的斜率穿过 0dB 线, 系统不稳定; 校正后 $L^*(\omega)$ 则以 -20dB/dec 的斜率穿过 0dB 线, γ 明显增加, 系统相对稳定性得到显著改善; 然而校正后 ω_c 比校正前 ω_{c0} 降低。所以, 滞后校正以牺牲截止频率换取了相角裕度的提高。另外, 由于滞后网络幅值衰减, 使校正后系统 $L^*(\omega)$ 曲线高频段降低, 抗高频干扰能力提高。

滞后校正有另一种用法, 就是在保持原系统中频段形状不变的前提下, 适当抬高低频段, 这样可以基本保持原系统的动态性能, 同时改善系统的稳态性能。

5.9.3 滞后-超前校正

1. 滞后-超前校正网络特性

滞后-超前网络的电路图如图 5-72(a)所示, 其传递函数

$$G_c(s) = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1} \quad (5-109)$$

若使

$$a T_1 = R_1 C_1, \quad b T_2 = R_2 C_2, \quad ab = 1,$$

$$R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2 = T_1 + T_2, \quad T_1 < T_2$$

则有 $T_1 T_2 = R_1 R_2 C_1 C_2$ 。滞后-超前校正装置的传递函数表示为

$$G_c(s) = \left(\frac{b T_2 s + 1}{T_2 s + 1} \right) \left(\frac{a T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \right) \quad (5-110)$$

当 $a > 1, b < 1$ 时, 上式右端第一项起滞后校正装置的作用, 第二项起超前校正装置的作用。滞后-超前网络的对数频率特性如图 5-72(b)所示。可以看出, 在超前部分的几何中

点频率 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_1}$ 处, 校正装置的相角是超前的, 幅值是衰减的。若将 ω_m 设置在校正后

系统的截止频率处, 则既可以利用校正装置的最大超前角, 又可以挖掘原系统的一部分相角储备量。

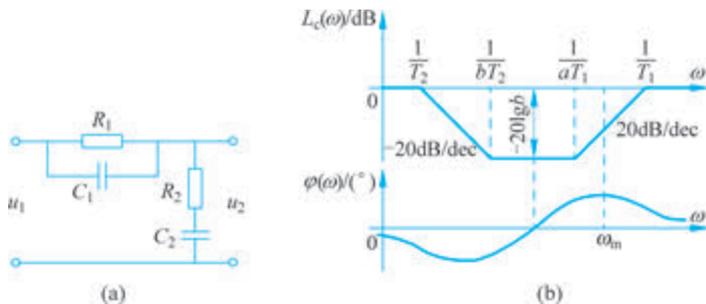


图 5-72 无源滞后-超前网络及其特性



课程视频
MOOC 视频
MOOC 视频

2. 串联滞后-超前校正

滞后-超前校正的实质是综合利用超前网络的相角超前特性和滞后网络幅值衰减特性来改善系统的性能。假设未校正系统的开环传递函数为 $G_0(\omega)$ 。给定系统指标为 e_{ss}^* 、 ω_c^* 、 γ^* 、 h^* 。可以按照以下步骤设计滞后-超前校正装置。

(1) 根据系统的稳态误差 e_{ss}^* 要求确定系统开环增益 K 。

(2) 计算未校正系统的频率指标, 决定应采用的校正方式。

由 K 绘制未校正系统的开环对数幅频特性 $L_0(\omega)$, 确定校正前系统的 ω_{c_0} 和 γ_0 。当 $\gamma_0 < \gamma^*$, 用超前校正所需要的最大超前角 $\varphi_m > 60^\circ$; 而用滞后校正, 在 ω_c^* 处系统又没有足够的相角储备量, 即

$$\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(\omega_c^*) < \gamma^* + 6^\circ$$

因而分别用超前、滞后校正均不能达到目的时, 可以考虑用滞后-超前校正。

(3) 校正设计。

选择校正后系统的截止频率 $\omega_c = \omega_c^*$, 计算 ω_c 处系统需要的最大超前角

$$\varphi_m(\omega_c) = \gamma^* - \gamma_0(\omega_c) + 6^\circ \quad (5-111)$$

其中, 6° 是为了补偿校正网络滞后部分造成的相角损失而预置的。计算超前部分参数

$$a = \frac{1 + \sin\varphi_m}{1 - \sin\varphi_m}$$

在 ω_c 处作一垂线, 与 $L_0(\omega)$ 交于点 A, 确定 A 关于 0dB 线的镜像点 B。

以点 B 为中心作斜率为 $+20\text{dB/dec}$ 线, 分别与过 $\omega = \sqrt{a}\omega_c$ 和 $\omega = \omega_c/\sqrt{a}$ 的两条垂直线交于点 C 和点 D (对应频率 $\omega_C = \sqrt{a}\omega_c$, $\omega_D = \omega_c/\sqrt{a}$)。

从点 C 向右作水平线, 从点 D 向左作水平线。

在过点 D 的水平线上确定 $\omega_E = 0.1\omega_c$ 的点 E; 过点 E 作斜率为 -20dB/dec 的直线交 0dB 线于点 F, 相应频率为 ω_F , 则滞后-超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_E} + 1}{\frac{s}{\omega_F} + 1} \frac{\frac{s}{\omega_D} + 1}{\frac{s}{\omega_C} + 1} \quad (5-112)$$

(4) 验算。

写出校正后系统的开环传递函数

$$G(s) = G_c(s)G_0(s)$$

计算校正后系统的 γ 和 h , 若 $\gamma \geq \gamma^*$, $h \geq h^*$, 则结束, 否则返回(3)调整参数重新设计。

下面举例说明滞后-超前校正的具体过程。

例 5-19 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{60} + 1\right)}$$

试设计校正装置 $G_c(s)$, 使校正后系统满足如下指标。

- (1) 当 $r(t)=t$ 时, 稳态误差 $e_{ss}^* \leq 1/126$ 。
 (2) 开环系统截止频率 $\omega_c^* \geq 20 \text{ rad/s}$ 。
 (3) 相角裕度 $\gamma^* \geq 35^\circ$ 。

解 ① 由稳态误差要求, 得 $K \geq 126$, 取 $K=126$ 。

② 绘制未校正系统的开环对数幅频曲线如图 5-73 中 $L_0(\omega)$ 所示。确定截止频率和相角裕度

$$\omega_{c0} = \sqrt{10 \times 126} = 35.5$$

$$\gamma_0 = 90^\circ - \arctan \frac{35.5}{10} - \arctan \frac{35.5}{60} = 90^\circ - 74.3^\circ - 30.6^\circ = -14.9^\circ$$

原系统不稳定; 原开环系统在 $\omega_c^* = 20$ 处相角储备量 $\gamma_c(\omega_c^*) = 8.13^\circ$ 。该系统单独用超前或滞后校正都难以达到目标, 所以确定采用滞后-超前校正。

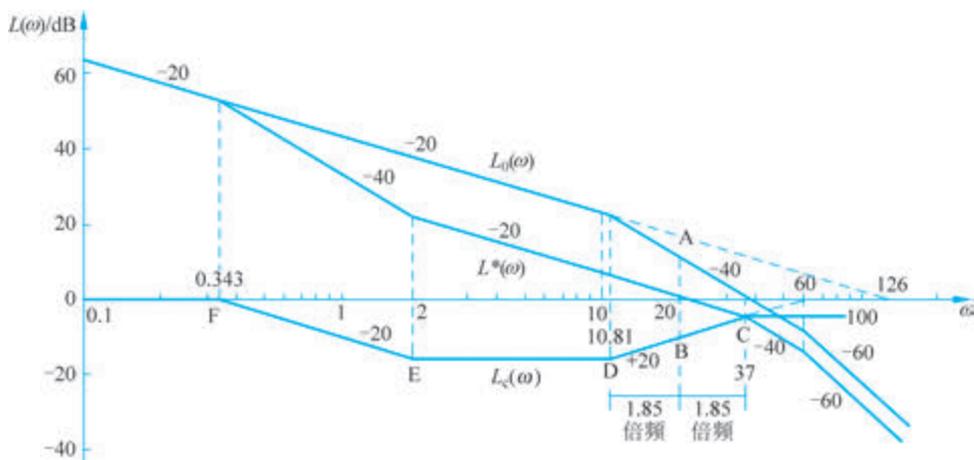


图 5-73 串联滞后-超前校正过程

③ 选择校正后系统的截止频率 $\omega_c = \omega_c^* = 20$, 超前部分应提供的最大超前角为

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma_c(\omega_c^*) + 6^\circ = 35^\circ - 8.13^\circ + 6^\circ = 32.87^\circ$$

则
$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 3.4, \quad \sqrt{a} = \sqrt{3.4} = 1.85$$

在 $\omega_c = 20$ 处作垂线, 与 $L_0(\omega)$ 交于点 A, 确定点 A 关于 0dB 线的镜像点 B; 以点 B 为中心作斜率为 $+20 \text{ dB/dec}$ 的直线, 分别与过 $\omega = \sqrt{a}\omega_c = 37$, $\omega = \omega_c/\sqrt{a} = 10.81$ 两条垂线交于点 C 和点 D, 则 C 点频率

$$\omega_C = \sqrt{a}\omega_c^* = 1.85 \times 20 = 37 \text{ rad/s}$$

D 点频率

$$\omega_D = \frac{\omega_c^{*2}}{\omega_C} = \frac{400}{37} = 10.81$$

从点 C 向右作水平射线, 从点 D 向左作水平射线, 在过点 D 的水平线上确定 $\omega_E = 0.1\omega_c$ 的点 E; 过点 E 作斜率为 -20 dB/dec 的直线交 0dB 线于点 F, 相应频率为 ω_F , 则 E 点频率

$$\omega_E = 0.1\omega_c^* = 0.1 \times 20 = 2$$

DC 延长线与 0dB 线交点处的频率

$$\omega_0 = \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_c} = \frac{35.5^2}{20} = 63$$

F 点频率

$$\omega_F = \frac{\omega_D \omega_E}{\omega_0} = \frac{10.81 \times 2}{63} = 0.343$$

可写出校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_E} + 1}{\frac{s}{\omega_F} + 1} \frac{\frac{s}{\omega_D} + 1}{\frac{s}{\omega_C} + 1} = \frac{\left(\frac{s}{2} + 1\right) \left(\frac{s}{10.81} + 1\right)}{\left(0.343s + 1\right) \left(\frac{s}{37} + 1\right)}$$

④ 验算。校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{126 \left(\frac{s}{2} + 1\right) \left(\frac{s}{10.81} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s}{60} + 1\right) \left(0.343s + 1\right) \left(\frac{s}{37} + 1\right)}$$

校正后系统的截止频率、相角裕度分别为

$$\omega_c = 20 = \omega_c^*$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 36.6^\circ > 35^\circ = \gamma^*$$

设计要求全部满足。

图 5-73 中绘出了所设计的校正装置和校正前后系统的开环对数幅频特性,可以看出滞后-超前校正是以 $\omega_c = \omega_c^*$ 为基点,在利用原系统的相角储备的基础上,用超前网络的超前角补偿不足部分,使校正后系统的相角裕度满足指标要求;滞后部分的作用在于使校正后系统开环增益不变,保证 e_{ss}^* 指标满足要求。

5.9.4 串联 PID 校正

串联 PID 校正通常也称为 PID(比例+积分+微分)控制,它利用系统误差、误差的微分和积分信号构成控制规律,对被控对象进行调节,具有实现方便、成本低、效果好、适用范围广等优点,因而在实际工程控制中得到了广泛的应用。PID 控制采用不同的组合,可以实现 PD、PI 和 PID 不同的校正方式。

1. 比例-微分(PD)控制

比例-微分控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s) \quad (5-113)$$

式中, $T_D = K_D / K_P$ 。 $G_c(s)$ 的 Bode 图见表 5-4。显然,PD 校正是相角超前校正。由于微分控制反映误差信号的变化趋势,具有“预测”能力。因此,它能在误差信号变化之前给出校正信号,防止系统出现过大的偏离和振荡,因而可以有效地改善系统的动态性能。另外,比例微分校正抬高了高频段,使得系统抗高频干扰能力下降。

2. 比例-积分(PI)控制

比例-积分控制器的传递函数为



课程视频

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (5-114)$$

式中, $T_I = K_P / K_I$ 。 $G_c(s)$ 的 Bode 图见表 5-4。PI 控制引入了积分环节, 使系统型别增加一级, 因而可以有效改善系统的稳态精度。同时, PI 控制器是相角滞后环节, 它会损失相角裕度, 降低系统的相对稳定度。另外, PI 控制器是低通滤波器, 能提高系统抗高频干扰的能力。

表 5-4 PID 控制器特性

控制器	传递函数 $G_c(s)$	Bode 图
PD 控制器	$G_c(s) = K_P + K_D s$ $= K_P (1 + T_D s)$	
PI 控制器	$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$ $= K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$	
PID 控制器	$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$ $= K_P \left(1 + T_D s + \frac{1}{T_I s} \right)$ $= K_I \cdot \frac{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s}$	

3. 比例-积分-微分(PID)控制

PID 控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_I \frac{\left(\frac{1}{\omega_1} s + 1 \right) \left(\frac{1}{\omega_2} s + 1 \right)}{s} \quad (5-115)$$

其中, $\omega_1 \omega_2 = K_I / K_D$, $\omega_1 + \omega_2 = K_P / K_D$ 。当 K_P, K_I, K_D 均大于 0 且 $K_P^2 - 4K_I K_D > 0$ 时, ω_1, ω_2 均为正实数。 $G_c(j\omega)$ 对应的 Bode 图见表 5-4。从 Bode 图可以看出, PID 控制有滞后-超前校正的功效, 在低频段起积分作用, 可以改善系统的稳态性能; 在中高频段则起微分作用, 可以改善系统的动态性能。

PD、PI 和 PID 校正分别可以看成超前、滞后和滞后-超前校正的特殊情况, 所以 PID 控制器的设计完全可以利用频率校正方法进行。

例 5-20 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{(s+1) \left(\frac{s}{5} + 1 \right) \left(\frac{s}{30} + 1 \right)}$$

试设计 PID 控制器, 使系统的稳态速度误差 $e_{ssv} \leq 0.1$, 超调量 $\sigma\% \leq 20\%$, 调节时间 $t_s \leq 0.5s$ 。

解 由稳态速度误差要求可知, 校正后的系统必须是 I 型的, 并且开环增益应该是

$$K = 1/e_{ssv} = 10$$

为了在频域中进行校正, 将时域指标化为频域指标。查图 5-56, 有

$$\begin{cases} \sigma\% \leq 20\% \\ t_s \leq 0.5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^* \geq 67^\circ \\ \omega_c^* = 6.8/t_s = 6.8/0.5 = 13.6 \text{ rad/s} \end{cases}$$

为校正方便起见, 将 $K=10$ 放在校正装置中考虑, 绘制未校正系统开环增益为 1 时的对数幅频特性 $L_0(\omega)$, 如图 5-74 所示。

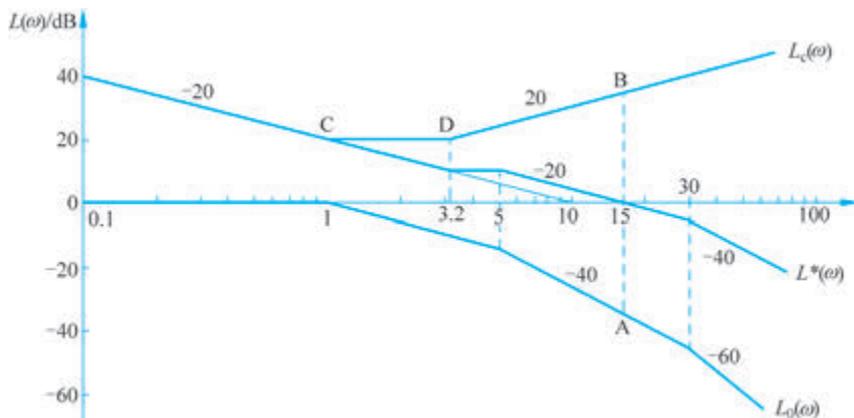


图 5-74 PID 串联校正

取校正后系统的截止频率 $\omega_c = 15$, 在 ω_c 处作垂线与 $L_0(\omega)$ 交于点 A, 找到点 A 关于 0dB 线的镜像点 B, 过点 B 作斜率为 +20dB/dec 的直线。微分(超前)部分应提供的超前角为

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma(\omega_c) + 6^\circ = 67^\circ + 4.3^\circ + 6^\circ = 77.3^\circ \approx 78^\circ$$

在斜率为 +20dB/dec 的直线上确定点 D(对应频率 ω_D), 使 $\arctan(\omega_c/\omega_D) = 78^\circ$, 得

$$\omega_D = \omega_c / \tan 78^\circ = 3.2$$

在点 D 向左引水平线。

根据稳态误差要求, 绘制低频段渐近线, 即过点 $(\omega = 1, 20\lg 10)$, 斜率为 -20dB/dec。低频段渐近线与经点 D 的水平线相交于点 C(对应频率 $\omega_C = 0.96$)。因此可以写出 PID 控制器的传递函数

$$G_c(s) = \frac{10(s+1)\left(\frac{s}{3.2} + 1\right)}{s} = \frac{10(0.3125s^2 + 1.3125s + 1)}{s}$$

以下进行验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{10\left(\frac{s}{3.2} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{30} + 1\right)}$$

校正后系统的截止频率 $\omega_c = 15 > 13.6 = \omega_c^*$, 校正后系统的相角裕度

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) \\ &= 180^\circ + \arctan \frac{15}{3.2} - 90^\circ - \arctan \frac{15}{5} - \arctan \frac{15}{30} = 69.8^\circ > 67^\circ = \gamma^* \end{aligned}$$

查图 5-56 将设计好的频域指标转换成时域指标, 有

$$\begin{cases} \gamma = 69.8^\circ \\ \omega_c = 15 \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma\% = 19\% < 20\% \\ t_s = 6.7/\omega_c = 6.7/15 = 0.45 < 0.5 \text{ s} \end{cases}$$

系统指标完全满足。

在实际工程中, PID 校正装置的选择及参数的确定还可以通过系统实验来确定。

应当注意, 以上所述的各种频率校正方法原则上仅适用于单位反馈的最小相角系统。因为只有这样才能仅根据开环对数幅频特性来确定闭环系统的传递函数。对于非单位反馈系统, 可以在原系统输入信号口附加 $H(s)$ 环节, 将系统转换为单位反馈系统(如图 5-75 所示)来设计。

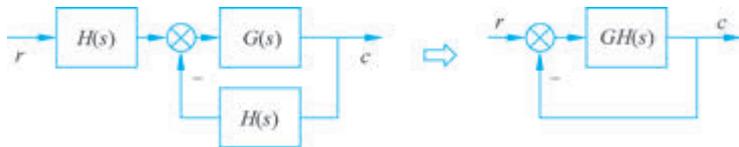


图 5-75 将非单位反馈系统转换为单位反馈系统

对非最小相角系统,则应将 $L(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 同时画出来,综合考虑进行校正。

应当指出,串联频率校正方法是一种折中方法。因而对系统性能的改善是有条件的,不能保证经频域校正后任何系统都能满足指标要求。当用频域校正达不到要求时,可以采用综合方法(如与前馈校正、反馈校正相结合)或采用现代控制理论设计方法。

应当指出,校正设计的结果是不唯一的,达到给定性能指标,所采用的校正方式和校正装置的具体形式可以不止一种,具有较大的灵活性。因此设计过程中,往往要运用基本概念,在估算的基础上,经过若干次试凑来达到设计目的,这其中实践经验往往起着重要的作用。另外,在设计过程中借助于仿真手段会带来许多方便。

不同的控制系统对性能指标要求也不同,如恒值控制系统对稳定性和稳态精度要求严格,而随动系统则对快速性期望较高。在制定指标时,一方面要做到有所侧重,另一方面还要切合实际,只要能够达到系统正常工作的要求即可,不应追求不切实际的高指标。

5.10 工程领域的控制问题示例——基于频域法的飞机俯仰控制

本节将从频域的角度对飞机的俯仰控制问题进行讨论分析,仍然从改善飞机的俯仰操纵性能和俯仰姿态控制性能两方面进行分析。

例 5-21 飞机俯仰角速率对升降舵的传递函数同例 3-24,采用图 5-76 所示的俯仰角速率反馈来改善飞机的俯仰操纵性能,已知 $K_t=0.617$,计算系统的带宽频率、截止频率和相角裕度。

解 校正后的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{0.617 \cdot 5(s + 0.8)}{s^2 + 2s + 4}$$

绘制其渐近的对数幅频特性曲线如图 5-77 中虚线所示,采用计算机绘制其对数幅频与相频特性曲线如图 5-78 中实线所示。

近似计算截止频率:

$$0.617 \cdot \frac{\frac{\omega_c}{0.8}}{\left(\frac{\omega_{c0}}{2}\right)^2} = 1, \quad \omega_{c0} = 3.085$$

计算相角裕度:

$$\tilde{G}(s) = \frac{0.617 \cdot 5(s + 0.8)}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad p_1 = 1 + \sqrt{3}j, \quad p_2 = 1 - \sqrt{3}j$$

$$\gamma_0 = 180^\circ + \angle(0.8 + j\omega_{c0}) - \angle(j\omega_{c0} + p_1) - \angle(j\omega_{c0} + p_2) = 123.66^\circ$$

计算机求得的精确截止频率 $\omega_{c0} = 3.57$,相角裕度 $\gamma_0 = 116.61^\circ$ 。

根据例 4-15 的讨论可知,当 $K_t = 0.617$ 时,闭环系统为临界阻尼二阶系统,此时图 5-76 所示系统的闭环传递函数为

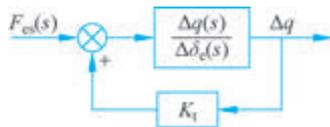


图 5-76 控制系统结构图

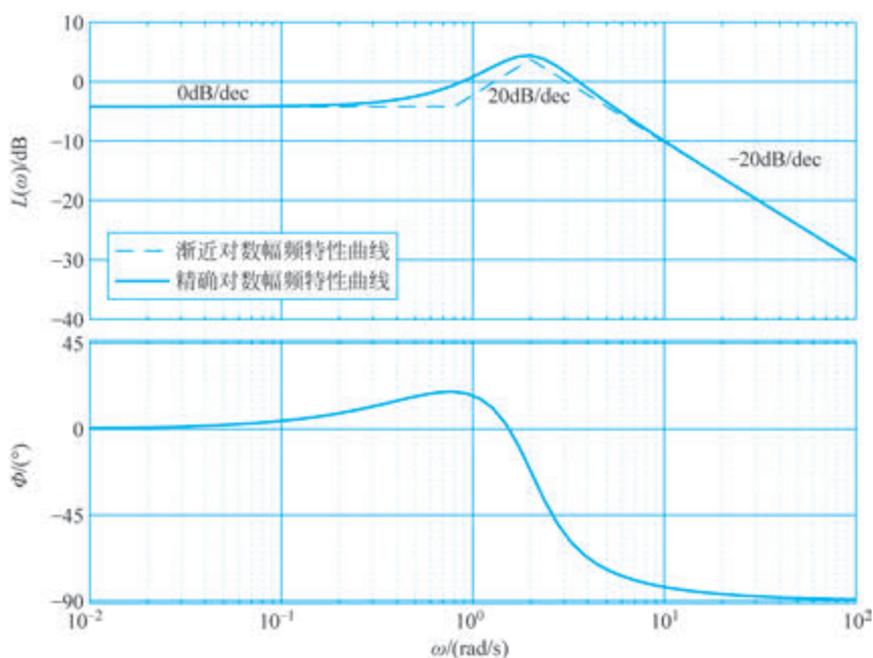


图 5-77 对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线

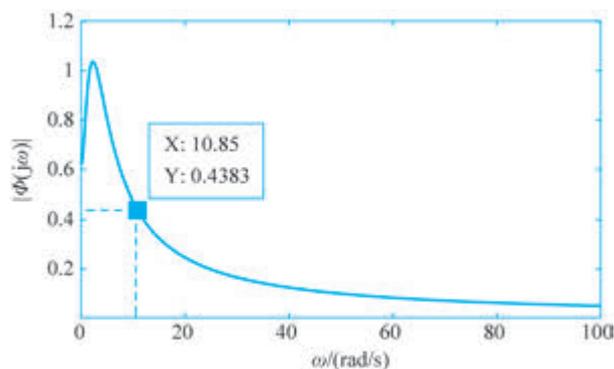


图 5-78 闭环幅频特性曲线

$$\Phi(s) = -\frac{5(s + 0.8)}{(s + 2.54)^2}$$

幅频特性:

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{5(j\omega + 0.8)}{(j\omega + 2.54)^2} \right| = \frac{5\sqrt{\omega^2 + 0.8^2}}{\omega^2 + 2.54^2}$$

相频特性:

$$\angle \Phi(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{0.8} - 2\arctan \frac{\omega}{2.54}$$

闭环传递函数中的负号是舵面极性定义引入的,在计算相角时不考虑该负号的

影响。

绘制闭环幅频特性曲线、相频特性曲线分别如图 5-78 和图 5-79 所示。系统的零频值为 0.62, 根据带宽的定义:

$$|\Phi(j\omega_d)| = 0.62 \times 0.707$$

$$\omega_d = 10.85$$

解得

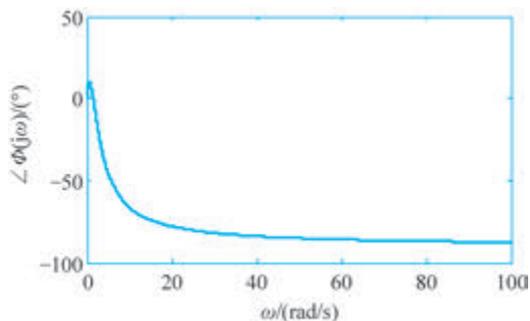


图 5-79 闭环相频特性曲线

这意味着飞行员须以不高于 10.85rad/s 的角频率对该飞机的操纵杆进行操作。若大于该值, 飞机的俯仰角速率响应将无法有效跟踪输入指令, 呈现较大的幅值衰减和相位滞后, 甚至会产生驾驶员诱发振荡等不良后果。例如, 给予 $F_{es} = \sin(20t)$ 的操纵指令, 俯仰角速率的响应曲线如图 5-80 所示, 此时正弦响应稳态分量的幅值为输入的 0.236 倍, 相位差 -77.8° 。

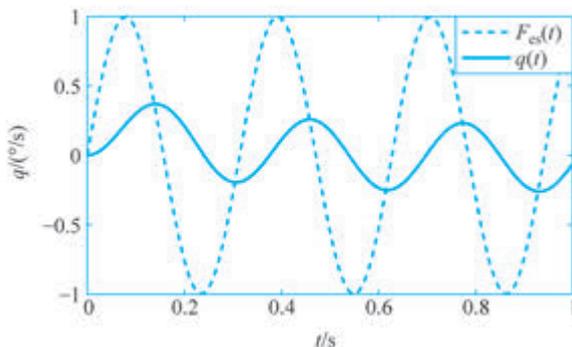


图 5-80 俯仰角速率正弦响应曲线

```
% 例 5-21 程序
clc
clear
warning off;
% 对数幅频和相频率曲线计算机绘制程序
m = 0.617 * 5 * [1 0.8];
n = [1 2 4];
GO = tf(m,n);
figure(1);
```

```

bode(G0);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(G0)
xlabel('\omega')
grid on
% ---- >>渐近对数幅频特性曲线绘制 ----
figure(2);
w = 10e-2:0.1:100;
[x,y] = bd_asymp(G0,w);
semilogx(x,y);
grid on
xlabel('\omega(rad/s)')
ylabel('\itL(\omega)/dB')
% 渐近对数幅频曲线绘制程序
function[wpos,ypos] = bd_asymp(G,w)
G1 = zpk(G);
wpos = [];
pos1 = [];
if nargin == 1,w = freqint2(G);
end
zer = G1.z{1}; pol = G1.p{1};
gain = G1.k;
for i = 1:length(zer);
    if isreal(zer(i))
        wpos = [wpos,abs(zer(i))];
        pos1 = [pos1,20];
    else
        if imag(zer(i))> 0
            wpos = [wpos,abs(zer(i))];
            pos1 = [pos1,40];
        end
    end
end
for i = 1:length(pol);
    if isreal(pol(i))
        wpos = [wpos,abs(pol(i))];
        pos1 = [pos1,-20];
    else
        if imag(pol(i))> 0
            wpos = [wpos,abs(pol(i))];
            pos1 = [pos1,-40];
        end
    end
end
wpos = [wpos w(1) w(length(w))];
pos1 = [pos1,0,0];
[wpos,ii] = sort(wpos);
pos1 = pos1(ii);
ii = find(abs(wpos)< eps);
kslp = 0;

```

```

w_start = 1000 * eps;
if length(ii)>0
    kslp = sum(pos1(ii));
    ii = (ii(length(ii)) + 1):length(wpos);
    wpos = wpos(ii);
    pos1 = pos1(ii);
end
while 1
    [ypos1,pp] = bode(G,w_start);
    if isinf(ypos1),w_start = w_start * 10;
    else break;
    end
end
wpos = [w_start wpos];
ypos(1) = 20 * log10(ypos1);
pos1 = [kslp pos1];
for i = 2:length(wpos)
    kslp = sum(pos1(1:i-1));
    ypos(i) = ypos(i-1) + kslp * log10(wpos(i)/wpos(i-1));
end
ii = find(wpos >= w(1)&wpos <= w(length(w)));
wpos = wpos(ii);
ypos = ypos(ii);

```

例 5-22 飞机俯仰角速率对升降舵的传递函数同例 3-24,在例 5-21 的基础上采用比例+微分校正装置来改善飞机纵向的操纵性能,如图 5-81 所示,已知 $K_P=1, K_D=\frac{1}{4}, K_t=0.617$,计算校正后系统的带宽频率、截止频率和相角裕度。

解 校正后的开环传递函数为

$$\begin{aligned}
 G(s) &= -\frac{0.617 \cdot \left(\frac{s}{4} + 1\right) \left(\frac{s}{0.8} + 1\right)}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s}{2} + 1} \\
 &= -\frac{0.771 \cdot (s+4)(s+0.8)}{(s+p_1)(s+p_2)}
 \end{aligned}$$

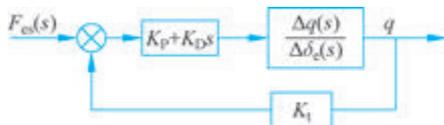


图 5-81 控制系统结构图

绘制其渐近的对数幅频特性曲线如图 5-82(虚线)所示,采用计算机绘制其对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线如图 5-82(实线)所示。

近似计算截止频率:

$$0.771 \cdot \frac{\frac{\omega_c}{0.8}}{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2} = 1, \quad \omega_{c0} = 3.855$$

计算相角裕度:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 180^\circ + \angle(0.8 + j\omega_{c0}) + \angle(2 + j\omega_{c0}) - \angle(j\omega_{c0} + p_1) - \angle(j\omega_{c0} + p_2) \\
 &= 157.59^\circ
 \end{aligned}$$

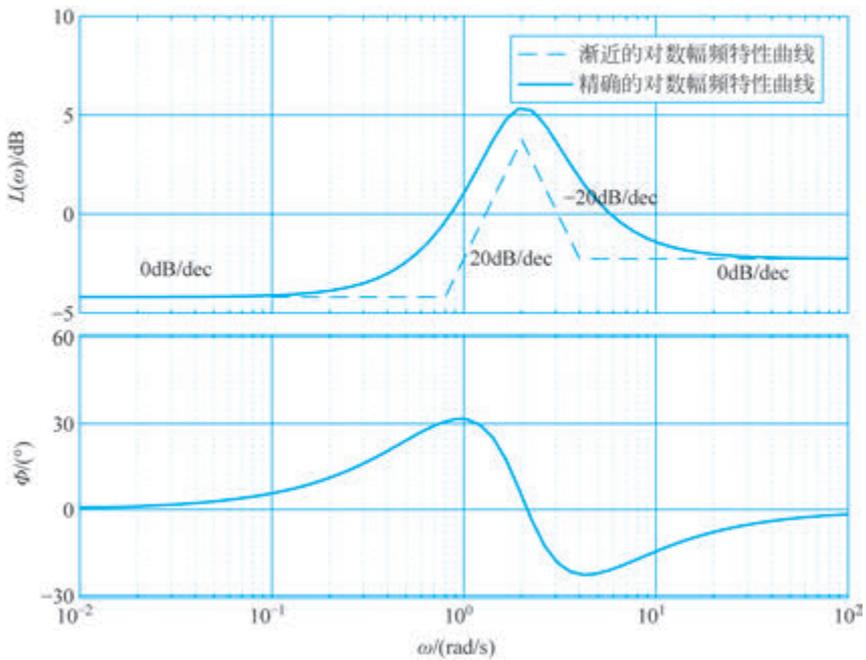


图 5-82 对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线

由计算结果可知,相对于例 5-21,采用比例+微分控制增加了系统的截止频率和相角裕度。

计算系统的闭环传递函数:

$$\Phi(s) = -\frac{5(s+0.8)\left(\frac{s}{4}+1\right)}{s^2+2s+4+0.617 \cdot 5(s+0.8)\left(\frac{s}{4}+1\right)}$$

绘制闭环幅频特性曲线、相频特性曲线分别如图 5-83 和图 5-84 所示。系统的零频值为 0.618,根据带宽的定义:

$$|\Phi(j\omega_d)| = 0.618 \times 0.707$$

解得 $\omega_d = 41.5(\text{rad/s})$

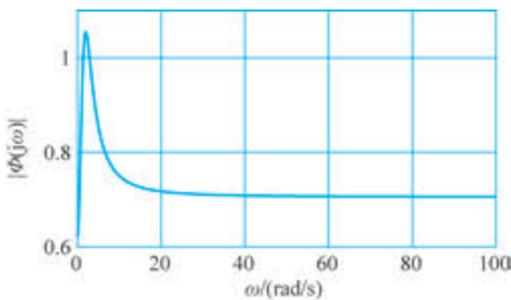


图 5-83 闭环幅频特性曲线

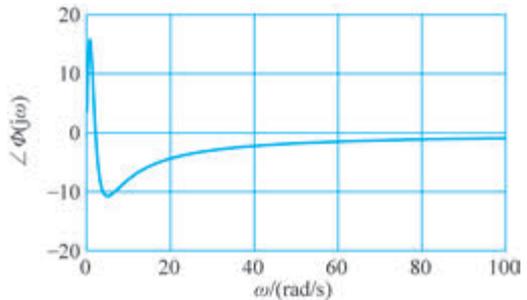


图 5-84 闭环相频特性曲线

给予 $F_{es} = \sin(20t)$ 的驾驶杆操纵指令,俯仰角速率的响应曲线如图 5-85 所示,与图 5-80 对比可知,系统带宽频率的增大显著改善了飞机的频率响应特性。

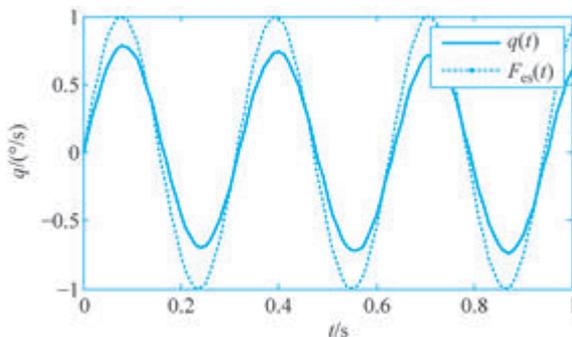


图 5-85 俯仰角速率正弦响应曲线

```

% 例 5-22 程序
clc
clear
warning off;
m = 0.617 * 5 * [1 0.8];
n = [1 2 4];
G0 = tf(m,n);
figure(1);
w = 10e-2:0.1:100;
[x,y] = bd_asymp(G0,w);
hold on;
semilogx(x,y);
grid on
xlabel('\omega(rad/s)')
ylabel('\itL(\omega)/dB')
hold on
bode(G0);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(G0)
xlabel('\omega')
grid on

m = [1.25 6 4];
n = [1.7713 5.7020 6.4680];
Gb = tf(m,n)
w = 10e-2:0.1:100;
[mag, phase] = bode(Gb, w);
mag = squeeze(mag);
phase = squeeze(phase);
figure(3)

plot(w, mag);
grid on;
xlabel('\it \omega\rm/(rad/s)');
ylabel('\it|\phi(j\omega)|');

```

```

figure(4)
plot(w, phase);
grid on;
xlabel('\it \omega\rm/(rad/s)');
ylabel('\it \angle\phi(j\omega)');
    
```

例 5-23 飞机俯仰角速率与升降舵的传递函数同例 3-24, 现采用图 5-86 所示结构对飞机俯仰角进行控制, 参数 $K_t = 0.617$, 采用频域校正方法设计校正环节 $G_c(s)$, 使得校正后的截止频率 $\omega_c = 10$, $\gamma \geq 60^\circ$ 。

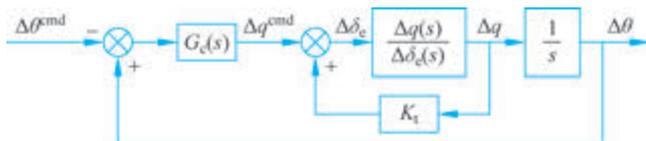


图 5-86 飞机俯仰角控制结构图

解

(1) 分析: 根据例 3-25 的讨论可知, 当 $K_t = 0.617$ 时, 图 5-86 所示的系统开环传递函数处于临界阻尼状态, 写出开环传递函数为

$$G(s) = \frac{5(s + 0.8)}{s(s + 2.54)^2} = \frac{0.62 \left(\frac{s}{0.8} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{2.54} + 1 \right)^2}$$

绘制其渐近对数幅频特性曲线和相频特性曲线如图 5-87 所示。

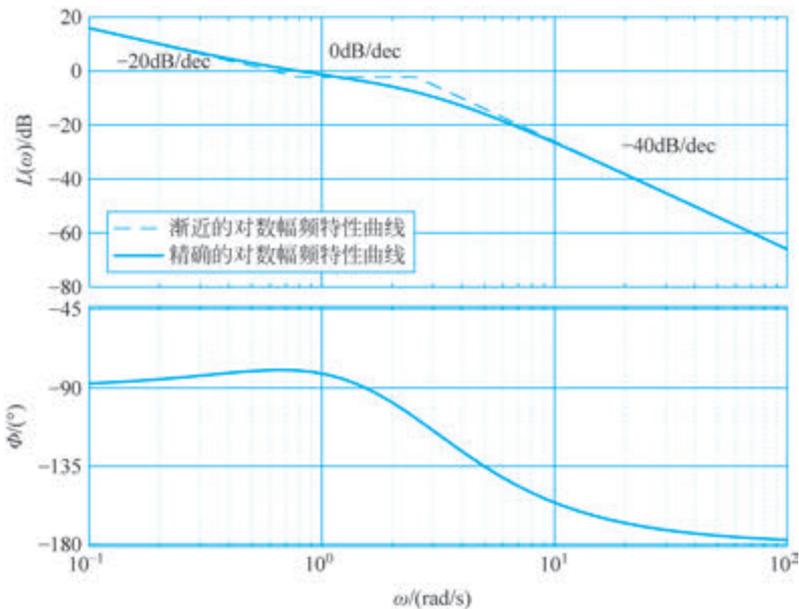


图 5-87 对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线

计算校正前系统的截止频率:

$$\frac{0.62}{\omega_{c0}} = 1, \quad \omega_{c0} = 0.62$$

计算校正前系统的相角裕度:

$$\gamma_0 = 180^\circ + \angle(0.8 + j\omega_{c0}) - 2\angle(j\omega_{c0} + 2.54) - 90^\circ = 100.34^\circ$$

国军标 GJB2874-97《电传操纵系统飞机的飞行品质》规范指出:对飞机俯仰操纵的开环俯仰姿态反应,其频宽在急剧飞行阶段的一级品质范围为 $6.5 \sim 11 \text{ rad/s}$ 。考虑到系统的截止频率较小,相角裕度过大,因此可采用如下校正思路,使得校正后的截止频率指标 $\omega_c^* = 10$ 。

① 提高开环增益,增加截止频率、改善快速性,并提高稳态精度。

② 在 $1 \sim 10 \text{ rad/s}$ 频带,校正前系统相角衰减较快,可引入超前校正环节补偿截止频率增加所造成的相角裕度损失。

基于上述分析定出校正装置的传递函数:

$$G_c(s) = \frac{K_p \left(\frac{s}{\omega_D} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{\omega_E} + 1 \right)}$$

(2) 校正:增加开环增益 K_p 或采用超前校正均可以提高截止频率。 K_p 过大会导致较大纵向过载,因而自动飞控系统的参数 K_p 一般设置在 1 附近。考虑到系统为 I 型系统,对于阶跃响应的稳态精度较好,为方便与例 4-16 根轨迹校正方法结果对比,仍然选择 $K_p = 1.27$,以 $G'(s)$ 为校正前的开环传递进行频域校正,绘制其渐近对数幅频特性曲线如图 5-88 所示。

$$G'(s) = \frac{1.27 \times 0.62 \left(\frac{s}{0.8} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{2.54} + 1 \right)^2}$$

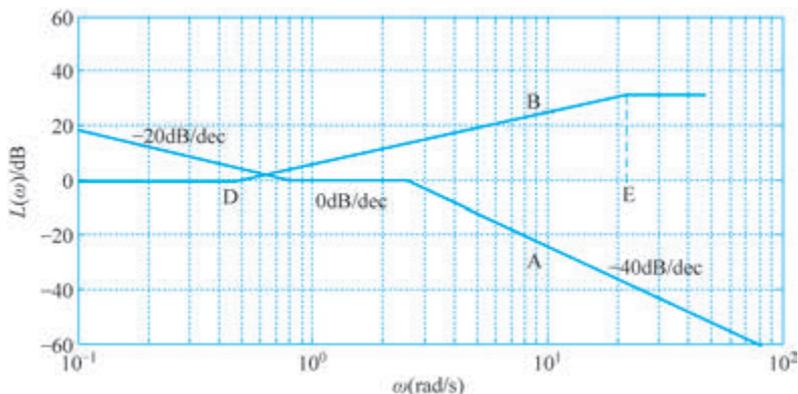


图 5-88 $K_p = 1.27$ 时的开环对数幅频特性曲线

采用超前校正提高截止频率,过 $\omega_c = 10$ 作垂线,交于 A 点,确定 A 点关于 0dB 线的对称点 B;过 B 点作斜率为 20 dB/dec 的直线,交 0dB 线于 D 点。

$$\text{A 点的对数幅频值: } 20 \log \left(\frac{1.27 \times 0.62 \left(\frac{10}{0.8} \right)}{10 \left(\frac{10}{2.54} \right)^2} \right) = -23.94 \text{ dB}$$

B 点的对数幅频值: 23.94 dB

$$\text{D 点的频率值: } \frac{23.94}{\log 10 - \log \omega_D} = 20, \omega_D = 0.635$$

求 E 点的频率值: 与相角裕度指标有关, 首先计算出 $\omega_c = 10$ 处的相角储备裕度 γ'_0 :

$$\gamma'_0 = 180^\circ + \angle(0.8 + j10) - 2\angle(j10 + 2.54) - 90^\circ = 23.92^\circ$$

$$\Delta\gamma = 60^\circ - \gamma'_0 + 5 \sim 10^\circ \approx 45^\circ$$

$$\arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_D}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_E}\right) = \Delta\gamma, \quad \omega_E = 11.355$$

确定校正装置的传递函数:

$$G_c(s) = \frac{1.27 \left(\frac{s}{0.635} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{11.355} + 1 \right)}$$

(3) 验算指标: 校正后系统的开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{1.27 \times 0.62 \left(\frac{s}{0.635} + 1 \right) \left(\frac{s}{0.8} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{2.54} + 1 \right)^2 \left(\frac{s}{11.355} + 1 \right)}$$

校正后的截止频率: $\omega_c = \omega_c^* = 10$

校正后的相角裕度:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle(0.635 + j\omega_c) + \angle(0.8 + j\omega_c) - 2\angle(j\omega_c + 2.54) - \\ &\quad \angle(j\omega_c + 11.355) - 90^\circ \\ &= 68.9^\circ > 60^\circ \end{aligned}$$

满足设计要求。

绘制校正后俯仰角控制系统的阶跃响应曲线 ($\theta^{\text{cmd}} = 5^\circ$) 和频域响应曲线 ($\theta^{\text{cmd}} = 1^\circ \cdot \sin(10.85t)$) 如图 5-89、图 5-90 所示。阶跃响应表明: 两种方法的时域指标: 调节时间、超调量相当; 超前校正阶跃响应的延迟时间优于比例控制。频域响应结果表明: 采用超前校正方法针对频域指标要求设计的俯仰角控制系统具有更优的闭环响应性能, 而比例控制频域响应的幅值衰减量和相角滞后量较大, 这是因为超前校正方法在该例中提供了更大的闭环带宽频率; 事实上采用比例控制和超前校正时, 所得的闭环传递函数分别为

$$\text{采用比例控制的闭环传递函数: } \Phi_1(s) = \frac{6.35s + 5.08}{s^3 + 5.08s^2 + 12.80s + 5.08}$$

$$\text{采用超前校正的闭环传递函数: } \Phi_2(s) = \frac{113.5s^2 + 162.94s + 57.68}{s^4 + 16.44s^3 + 177.69s^2 + 236.20s + 57.68}$$

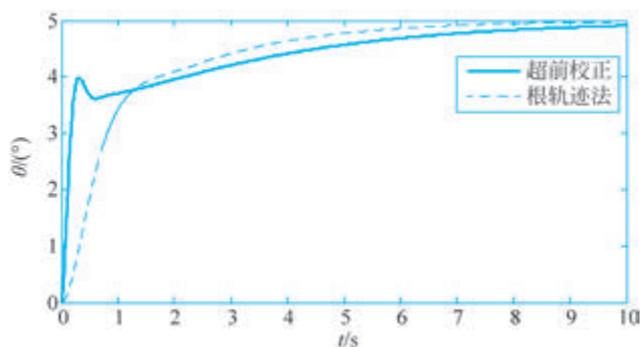


图 5-89 阶跃响应曲线

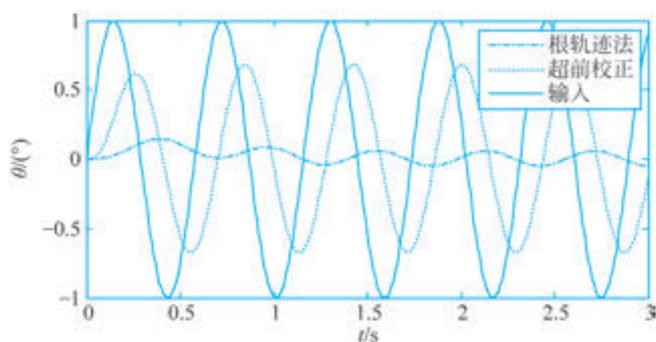


图 5-90 闭环频域响应曲线

绘制二者的对数幅频和相频响应曲线如图 5-91 所示,超前校正的闭环系统具有更大的带宽频率,因而能够跟踪更高角频率的输入信号。

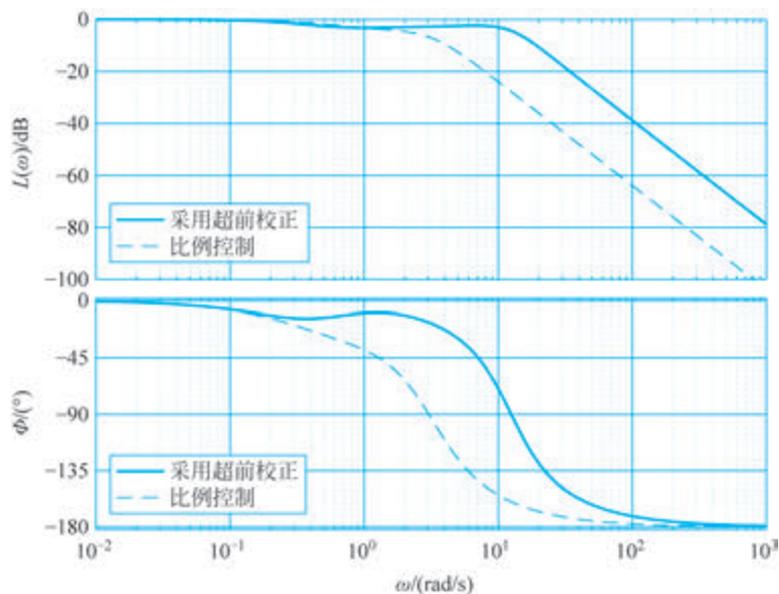


图 5-91 闭环系统的对数幅频和相频响应曲线



课程视频



课程视频

5.11 小结

1. 本章内容提要

频率特性是线性定常系统在正弦信号作用下,稳态输出与输入的复数之比对频率的函数关系。频率特性是传递函数的一种特殊形式,将系统(或环节)传递函数中的复数 s 换成纯虚数 $j\omega$,即可得出系统(或环节)的频率特性。

频率特性图形因其采用的坐标不同而分为幅相特性(Nyquist 图)、对数频率特性(Bode 图)和对数幅相特性(Nichols 图)等形式。各种形式之间是互通的,每种形式有其特定的适用场合。开环幅相特性在分析闭环系统的稳定性时比较直观,理论分析时经常采用;Bode 图在分析系统参数变化对系统性能的影响以及运用频率法校正时很方便,实际工程应用十分广泛;由开环频率特性获取闭环频率特征量时,用对数幅相特性最直接。绘制开环频率特性(主要指幅相特性和对数频率特性)是进行频域法分析、校正的基础,必须熟练掌握绘制方法,熟悉不同特性曲线间的对应关系。

奈奎斯特稳定判据是频率法的重要理论基础。利用奈氏稳定判据,除了可判断闭环系统的稳定性外,还可引出相角裕度和幅值裕度的概念,对于多数工程系统而言,可以用相角裕度和幅值裕度描述系统的相对稳定性。

对于单位反馈的最小相角系统,根据开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 可以确定闭环系统的性能。可将 $L(\omega)$ 划分为低、中、高三个频段, $L(\omega)$ 低频段的渐近线斜率和高度分别反映系统的型别(ν)和开环增益,因而低频段集中体现系统的稳态性能;中频段反映系统的截止频率和相角裕度,集中体现系统的动态性能;高频段则体现系统抗高频干扰的能力。三频段理论为设计系统指出了原则和方向。

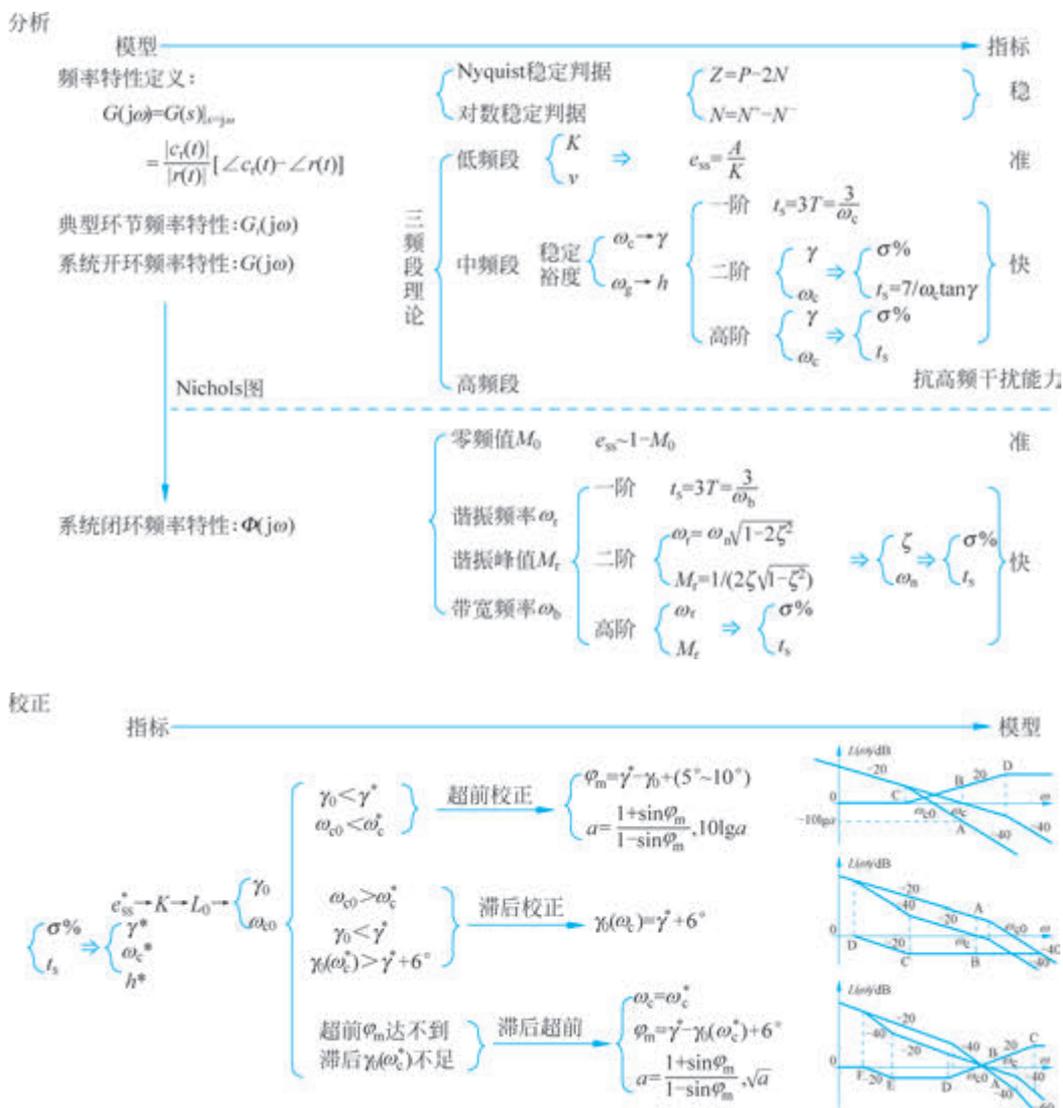
开环频率特性指标(ω_c 、 γ 和 h)或闭环频率特性的某些特征量(ω_b 、 ω_r 和 M_r)与系统时域指标 $\sigma\%$ 、 t_s 密切相关,这种关系对于二阶系统是准确的,而对于高阶系统则是近似的,然而在工程设计中完全可以满足精度要求。利用这些关系可以估算闭环系统的时域指标。

频率法串联校正有超前校正、滞后校正和滞后-超前校正三种形式。串联校正装置既可用 RC 无源网络来实现,又可用运算放大器组成的有源网络来实现。

超前校正利用超前网络的相角超前特性,将其最大超前角补在校正后系统的截止频率处,同时提高相角裕度和截止频率,从而改善系统的动态性能。滞后校正利用滞后网络的幅值衰减特性,通过压低未校正系统的截止频率,挖掘系统自身的相角储备,提高校正后系统的相角裕度,以牺牲快速性来改善相对稳定性。滞后-超前校正则综合利用超前、滞后网络的长处,具有较大的灵活性。PD、PI 和 PID 校正则可视作超前、滞后和滞后-超前校正的特例。

串联频率校正方法原则上只适用于单位反馈的最小相角系统。

2. 知识脉络图



习题

5-1 试求图 5-92(a)、(b) 所示网络的频率特性。

5-2 某系统结构图如图 5-93 所示, 试根据频率特性的物理意义, 求下列输入信号作用时, 系统的稳态输出 $c_s(t)$ 和稳态误差 $e_s(t)$ 。

(1) $r(t) = \sin 2t$

(2) $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$

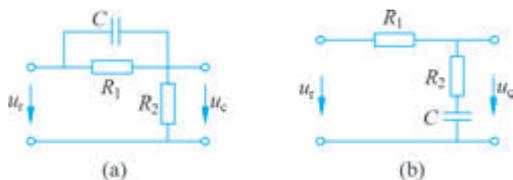


图 5-92 RC 网络

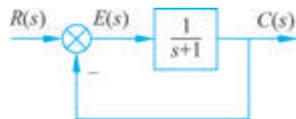


图 5-93 系统结构图

5-3 若系统单位阶跃响应

$$h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} \quad t \geq 0$$

试求系统频率特性。

5-4 绘制下列传递函数的幅相曲线。

- (1) $G(s) = K/s$
- (2) $G(s) = K/s^2$
- (3) $G(s) = K/s^3$

5-5 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

试分别计算当 $\omega=0.5$ 和 $\omega=2$ 时开环频率特性的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$ 。

5-6 试绘制下列传递函数的幅相特性曲线。

- (1) $G(s) = \frac{5}{(2s+1)(8s+1)}$
- (2) $G(s) = \frac{10(1+s)}{s^2}$

5-7 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(-T_2s+1)}{s(T_1s+1)} \quad K, T_1, T_2 > 0$$

当 $\omega=1$ 时, $\angle G(j\omega) = -180^\circ$, $|G(j\omega)| = 0.5$; 当输入为单位速度信号时, 系统的稳态误差为 1, 试写出系统开环频率特性表达式 $G(j\omega)$ 。

5-8 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s^2+1)}$$

试概略绘制系统开环幅相曲线。

5-9 绘制下列传递函数的渐近对数幅频特性曲线。

- (1) $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$
- (2) $G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$
- (3) $G(s) = \frac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}$

$$(4) G(s) = \frac{20(3s+1)}{s^2(6s+1)(s^2+4s+25)(10s+1)}$$

$$(5) G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}$$

5-10 若传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

式中, $G_0(s)$ 为 $G(s)$ 中, 除比例和积分两种环节外的部分, 试证

$$\omega_1 = K^{\frac{1}{v}}$$

式中, ω_1 为近似对数幅频特性曲线最左端直线(或其延长线)与零分贝线交点的频率, 如图 5-94 所示。

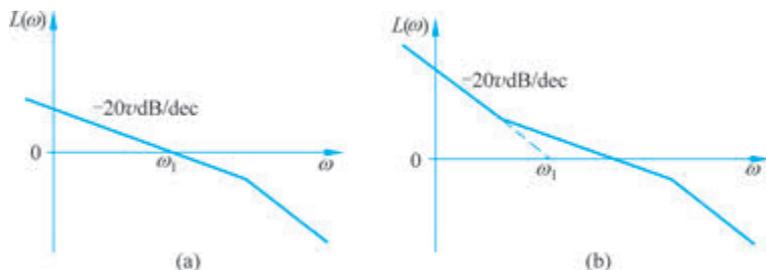


图 5-94 题 5-10 图

5-11 最小相角系统传递函数的近似对数幅频特性曲线分别如图 5-95 所示。试分别写出它们对应的传递函数。

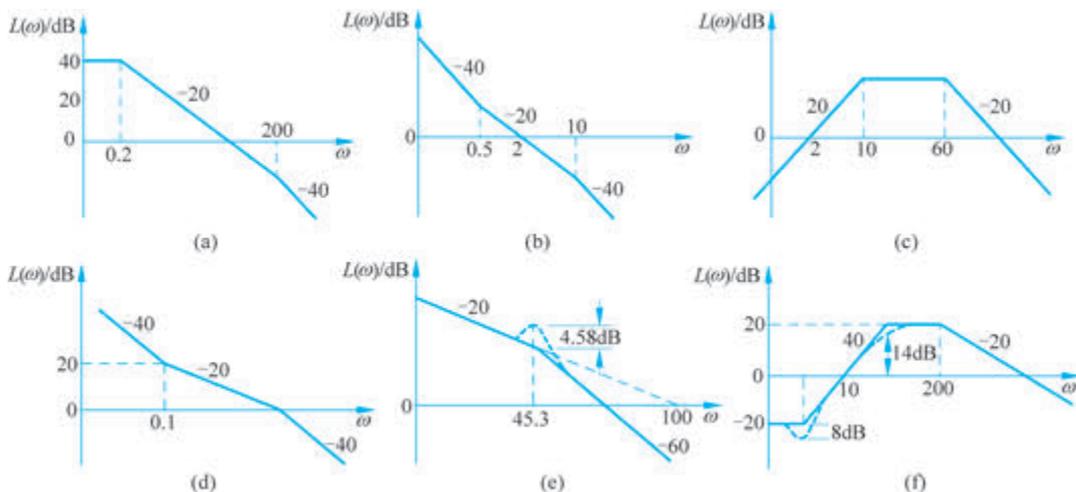


图 5-95 题 5-11 图

5-12 已知 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 和 $G_3(s)$ 均为最小相角传递函数, 其近似对数幅频特性曲线如图 5-96 所示。试概略绘制传递函数

$$G_4(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

的对数幅频、对数相频和幅相特性曲线。

5-13 试根据奈氏判据,判断图 5-97(1)~图 5-97(10) 所示曲线对应闭环系统的稳定性。已知曲线(1)~(10) 对应的开环传递函数分别为(按自左至右顺序)。

$$(1) G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$

$$(4) G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)} \quad T_1 > T_2$$

$$(5) G(s) = \frac{K}{s^3}$$

$$(6) G(s) = \frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)}{s^3}$$

$$(7) G(s) = \frac{K(T_5s+1)(T_6s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

$$(8) G(s) = \frac{K}{T_1s-1} \quad K > 1$$

$$(9) G(s) = \frac{K}{T_1s-1} \quad K < 1$$

$$(10) G(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$$

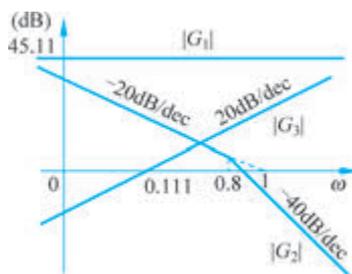


图 5-96 题 5-12 图

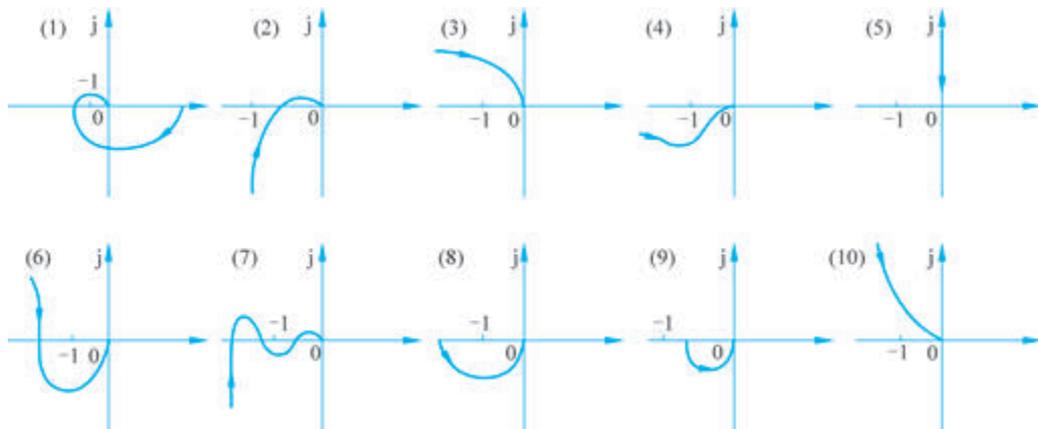


图 5-97 系统开环幅相特性曲线

5-14 设开环幅相特性曲线如图 5-98 所示,其中, P 为开环传递函数在右半 s 平面的极点数, v 为积分环节个数,试判别闭环系统的稳定性。

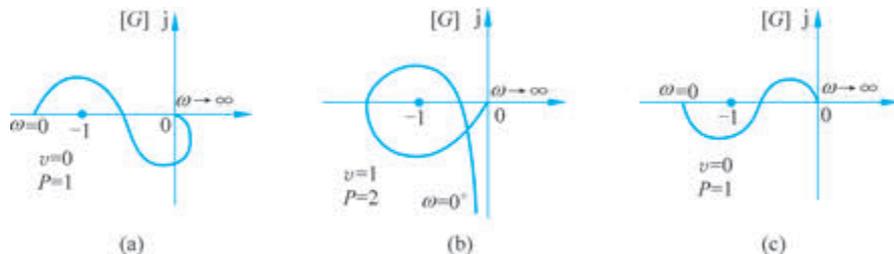


图 5-98 题 5-14 图

5-15 已知系统开环传递函数,试根据奈氏判据,确定其闭环稳定的条件。

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)(s + 1)} \quad K, T > 0$$

- (1) 当 $T=2$ 时, K 值的范围;
- (2) 当 $K=10$ 时, T 值的范围;
- (3) K 、 T 值的范围。

5-16 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10(s^2 - 2s + 5)}{(s + 2)(s - 0.5)}$$

试概略绘制幅相特性曲线,并根据奈氏判据判定闭环系统的稳定性。

5-17 某系统的结构图和开环幅相特性曲线如图 5-99(a)、(b)所示。图中

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}, \quad H(s) = \frac{s^3}{(s+1)^2}$$

试判断闭环系统稳定性,并决定闭环特征方程正实部根个数。

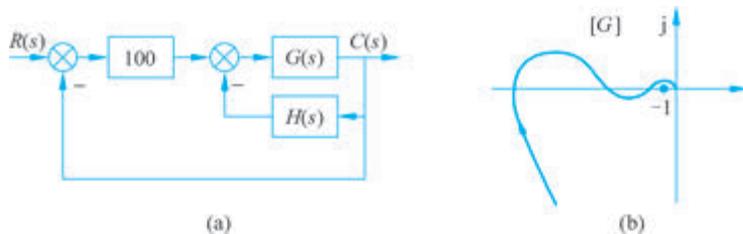


图 5-99 题 5-17 图

5-18 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s^2 + 0.8s - 1)}$$

试根据奈氏判据确定闭环系统的稳定性。

5-19 已知单位反馈系统的开环传递函数,试判断闭环系统的稳定性。

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s^2}{4} + 1\right)}$$

5-20 已知反馈系统,其开环传递函数如下。

$$(1) G(s) = \frac{100}{s(0.2s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

$$(4) G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

试用奈氏判据或对数稳定判据判断闭环系统的稳定性,并确定系统的相角裕度和幅值裕度。

5-21 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

试确定相角裕度为 45° 时的 a 值。

5-22 在已知系统中

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)}, \quad H(s) = 1 + K_h s$$

试确定闭环系统临界稳定时的 K_h 。

5-23 若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K e^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的 K 的临界值。

5-24 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定的延迟时间 τ 的范围。

5-25 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10K_1}{s(0.1s+1)(s+1)}$, 当 $r(t) = 10t$

时,要求系统的速度稳态误差为 0.2 ,试确定 K_1 并计算系统此时具有的相角裕度和幅值裕度,说明系统能否达到精度要求。

5-26 某单位反馈的最小相角系统,其开环对数幅频特性如图 5-100 所示。要求:

- (1) 写出系统开环传递函数;
- (2) 利用相角裕度判断系统的稳定性;
- (3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程,试讨论对系统性能的影响。

5-27 某单位反馈的最小相角系统,其开环对数幅频特性曲线如图 5-101 所示。

- (1) 写出系统的开环传递函数 $G(s)$ 。

- (2) 计算系统的截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。
 (3) 当输入信号 $r(t) = 1 + t/2$ 时, 计算系统的稳态误差。

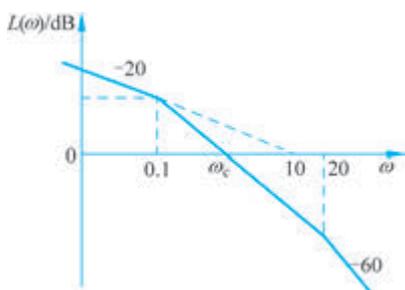


图 5-100 题 5-26 图

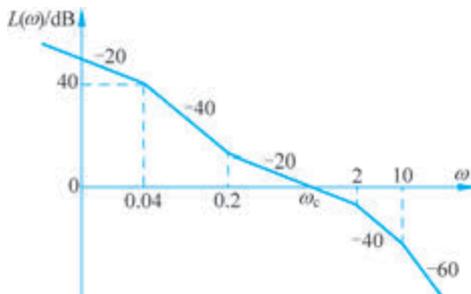


图 5-101 开环对数幅频特性

5-28 对于典型二阶系统, 已知参数 $\omega_n = 3, \zeta = 0.7$, 试确定截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。

5-29 对于典型二阶系统, 已知 $\sigma\% = 15\%, t_s = 3\text{s}$, 试计算截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。

5-30 某单位反馈系统, 其开环传递函数

$$G(s) = \frac{16.7s}{(0.8s + 1)(0.25s + 1)(0.0625s + 1)}$$

试应用尼柯尔斯图, 绘制闭环系统对数幅频特性和相频特性曲线。

5-31 某控制系统结构图如图 5-102 所示, 图中

$$G_1(s) = \frac{10(1+s)}{1+8s}, \quad G_2(s) = \frac{4.8}{s\left(1+\frac{s}{20}\right)}$$

试按以下数据估算系统时域指标 $\sigma\%$ 和 t_s 。

- (1) γ 和 ω_c ;
- (2) M_r 和 ω_c ;
- (3) 闭环幅频特性曲线形状。

5-32 已知控制系统结构图如图 5-103 所示。当输入 $r(t) = 2\sin t$ 时, 系统的稳态输出 $c_s(t) = 4\sin(t - 45^\circ)$ 。试确定系统的参数 ζ, ω_n 。

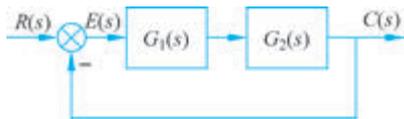


图 5-102 题 5-31 图

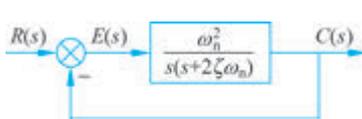


图 5-103 题 5-32 图

5-33 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(s+0.2)}$, 试求使系统闭环幅频特性谐振峰值 $M_r = 1.5$ 的截止频率 ω_c 、 K 值和系统的稳定裕度。

5-34 对于高阶系统, 要求时域指标 $\sigma\% = 18\%, t_s = 0.05\text{s}$, 试将其转换成开环频域指标 (ω_c, γ) 。

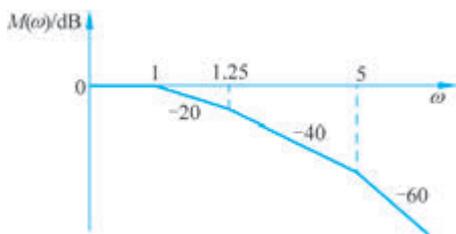


图 5-104 题 5-35 图

5-35 单位反馈系统的闭环对数幅频特性曲线如图 5-104 所示。若要求系统具有 30° 的相角裕度,试计算开环增益应增大的倍数。

5-36 设有单位反馈的火炮指挥仪伺服系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

若要求系统最大输出速度为 2r/min ,输出位置

的容许误差小于 2° ,试

- (1) 确定满足上述指标的最小 K 值,计算该 K 值下系统的相角裕度和幅值裕度;
- (2) 在前向通路中串接超前校正网络

$$G_c(s) = \frac{0.4s + 1}{0.08s + 1}$$

计算校正后系统的相角裕度和幅值裕度,说明超前校正对系统动态性能的影响。

5-37 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

试设计一串联超前校正装置,使系统满足如下指标

- (1) 在单位斜坡输入下的稳态误差 $e_{ss} < 1/15$;
- (2) 截止频率 $\omega_c \geq 7.5\text{rad/s}$;
- (3) 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ 。

5-38 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(0.25s + 1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \geq 5\text{rad/s}$,相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ 。试设计串联滞后校正装置。

5-39 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{0.5}{s(s + 1)(0.1s + 1)}$ 。给定指标为开环增益 $K = 10$,超调量 $\sigma\% \leq 25\%$,调节时间 $t_s \leq 16.5\text{s}$,试设计串联滞后校正装置。

5-40 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K e^{-0.005s}}{s(0.01s + 1)(0.1s + 1)}$,要求系统的相角裕度 $\gamma = 45^\circ$,输入 $r(t) = t$ 时的稳态误差 $e_{ss} = 0.01$ 。试确定串联校正装置的传递函数。

5-41 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(0.25s + 1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \geq 5\text{rad/s}$,截止频率 $\omega_c \geq 2\text{rad/s}$,相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$,试设计串联校正装置。

5-42 单位反馈系统,校正前系统的开环传递函数 $G_0(s) = \frac{2}{s(0.5s+1)}$,采用串联校正后系统的对数幅频特性曲线如图 5-105 所示。

- (1) 写出校正后系统的开环传递函数 $G(s)$;
- (2) 确定校正装置的传递函数,说明所用的校正方式(超前/滞后/滞后-超前);
- (3) 分别绘制校正装置以及校正前系统的对数幅频特性曲线;
- (4) 利用三频段理论说明采用如上校正装置后对系统性能的影响。

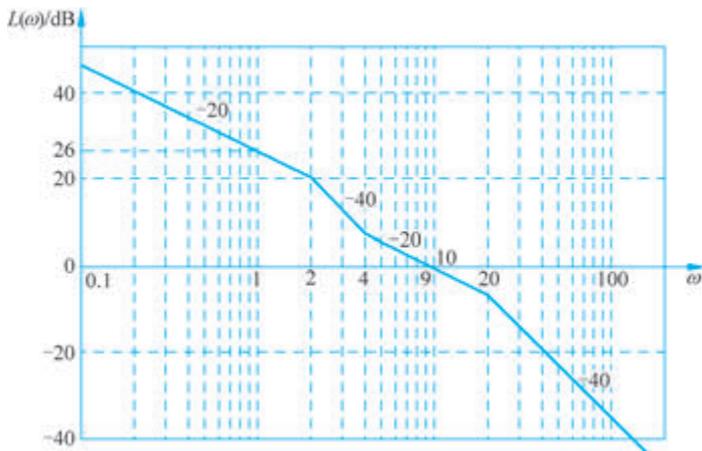


图 5-105 题 5-42 图

5-43 已知一单位反馈控制系统,其被控对象 $G_0(s)$ 和串联校正装置 $G_c(s)$ 的对数幅频特性曲线分别如图 5-106(a)、图 5-106(b)和图 5-106(c)中 L_0 和 L_c 所示。要求:

- (1) 写出校正后各系统的开环传递函数;
- (2) 分析各 $G_c(s)$ 对系统的作用,并比较其优缺点。

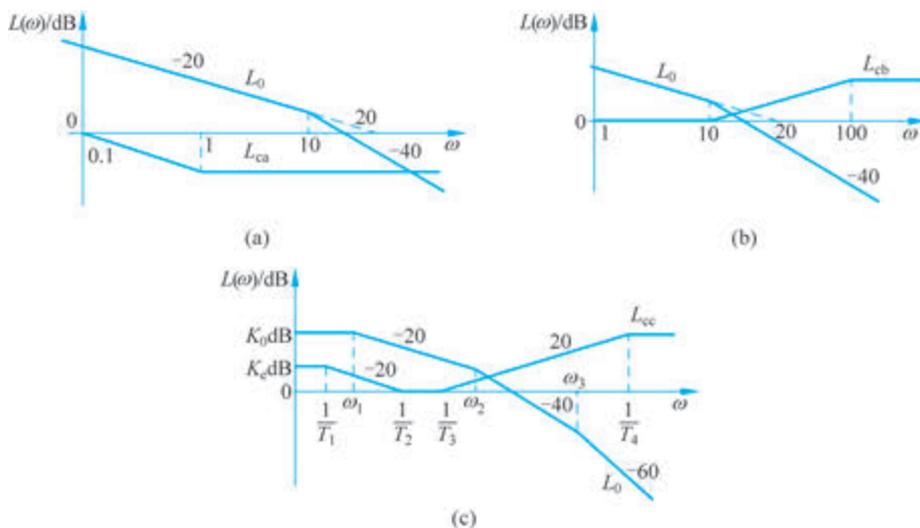


图 5-106 题 5-43 图

5-44 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

- (1) 如果要求系统在单位阶跃输入作用下的超调量 $\sigma\% = 20\%$, 试确定 K 值;
- (2) 根据所求得的 K 值, 求出系统在单位阶跃输入作用下的调节时间 t_s , 以及静态速度误差系数 K_v ;
- (3) 设计一串联校正装置, 使系统的 $K_v \geq 20, \sigma\% \leq 17\%, t_s$ 减小到校正前系统调节时间的一半以内。

5-45 图 5-107 所示为三种推荐的串联校正网络的对数幅频特性曲线, 它们均由最小相角环节组成。若原控制系统为单位反馈系统, 其开环传递函数

$$G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

试问:

- (1) 这些校正网络中, 哪一种可使校正后系统的稳定程度最好?
- (2) 为了将 12Hz 的正弦噪声削弱到原信号幅值的 1/10 左右, 确定应当采用哪种校正网络?

5-46 某系统的开环对数幅频特性曲线如图 5-108 所示, 其中虚线表示校正前的, 实线表示校正后的要求:

- (1) 确定所用的是何种串联校正方式, 写出校正装置的传递函数 $G_c(s)$;
- (2) 确定使校正后系统稳定的开环增益范围;
- (3) 当开环增益 $K=1$ 时, 求校正后系统的相角裕度 γ 和幅值裕度 h 。

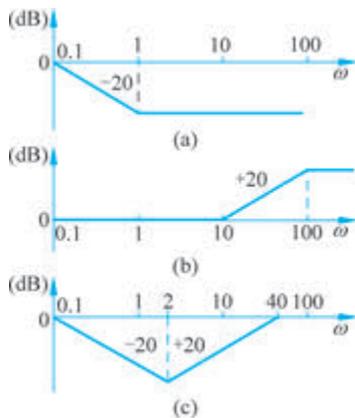


图 5-107 校正网络对数幅频特性曲线

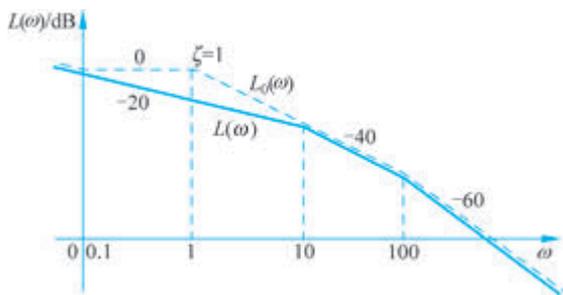


图 5-108 系统开环对数幅频特性曲线