

数字音频应用中通常采用几种不同的采样率,对于广播音频、专业音频和消费者音频,采样率分别为 32kHz、48kHz 和 44.1kHz。此外,在不同帧速率的电影和视频中使用其他采样率。在连接具有不同独立采样率的系统时,需要对采样率进行转换。本章对耦合时钟速率讨论具有比例因子  $L/M$  的同步采样率转换,对不同采样率彼此不同步的情况讨论异步采样率的转换。

### 3.1 基础知识

采样率转换包括上采样、下采样、抗镜像和抗混叠滤波。具有采样频率  $f_s = 1/T$  ( $\omega_s = 2\pi f_s$ ) 的采样信号  $x(n)$  的离散时间傅里叶变换如式(3.1)所示,对应连续时间信号  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X_a(j\omega)$ 。

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\omega + jk \frac{2\pi}{T}\right), \quad \Omega = \omega T \quad (3.1)$$

对于理想采样,式(3.2)成立。

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} X_a(j\omega), \quad |\Omega| \leq \pi \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 上采样和抗镜像滤波

对信号  $x(n)$

$$x(n) \circ \bullet X(e^{j\Omega}) \quad (3.3)$$

进行上采样,可对连续  $L-1$  个样本之间的信号  $x(n)$  除以因子  $L$ ,其中包含  $n=0$  时的样本,如图 3.1 所示。这就产生了上采样信号

$$w(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{L}\right), & m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.4)$$

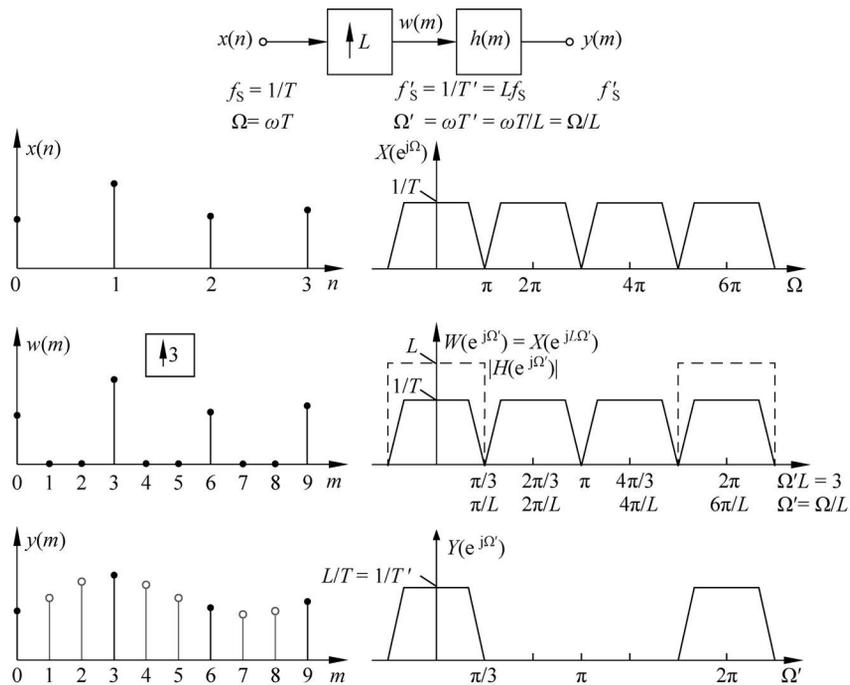
其中,采样频率  $f'_s = 1/T' = Lf_s = L/T$  ( $\Omega' = \Omega/L$ ),对应的傅里叶变换为

$$W(e^{j\Omega'}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) e^{-jm\Omega'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-jmL\Omega'} = X(e^{jL\Omega'}) \quad (3.5)$$

利用  $h(m)$  对  $w(m)$  进行抗镜像滤波,实现对图像频谱的抑制,得到输出信号为

$$y(m) = w(m) * h(m) \quad (3.6)$$

$$Y(e^{j\Omega'}) = H(e^{j\Omega'}) \cdot X(e^{j\Omega'/L}) \quad (3.7)$$

图 3.1 在时域和频域使用  $L$  的上采样及抗镜像滤波

为了调节信号在基带内的功率,脉冲响应的傅里叶变换[式(3.8)]在通带中需要一个增益因子  $L$ ,使得输出信号  $y(m)$  的傅里叶变换如式(3.9)所示。

$$H(e^{j\Omega'}) = \begin{cases} L, & |\Omega'| \leq \pi/L \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$Y(e^{j\Omega'}) = LX(e^{j\Omega'L}) \quad (3.9)$$

$$= L \frac{1}{T} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\omega + jLk \frac{2\pi}{T}\right)}_{\text{与式(3.1)比较}} \quad (3.10)$$

$$= L \frac{1}{LT'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\omega + jLk \frac{2\pi}{LT'}\right) \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{T'} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\omega + jk \frac{2\pi}{T'}\right)}_{\text{采样率为 } f'_s = Lf_s \text{ 信号的频谱}} \quad (3.12)$$

输出信号  $y(m)$  表示用采样频率  $f'_s = Lf_s$  对输入  $x(t)$  进行上采样的结果。

### 3.1.2 下采样和抗混叠滤波

对信号  $x(n)$  下采样时,通过因子  $M$  实现,为了避免下采样后的混叠,信号频带必须限制在  $\pi/M$  范围内,如图 3.2 所示。通过式(3.15)的  $H(e^{j\Omega})$  滤波实现带限。

$$w(m) = x(m) * h(m) \quad (3.13)$$

$$W(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega}) \quad (3.14)$$

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{M} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.15)$$

对  $w(m)$  进行下采样, 每次取第  $M$  个样点, 得到输出信号为

$$y(n) = w(Mn) \quad (3.16)$$

其傅里叶变换为

$$Y(e^{j\Omega'}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} W(e^{j(\Omega' - 2\pi l)/M}) \quad (3.17)$$

对于基带频谱 ( $|\Omega'| < \pi$  和  $l=0$ ), 可得

$$Y(e^{j\Omega'}) = \frac{1}{M} H(e^{j\Omega'/M}) \cdot X(e^{j\Omega'/M}) = \frac{1}{M} X(e^{j\Omega'/M}) \quad |\Omega'| \leq \pi \quad (3.18)$$

则输出信号的傅里叶变换为

$$Y(e^{j\Omega'}) = \frac{1}{M} X(e^{j\Omega'/M}) = \frac{1}{M} \frac{1}{T} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega + jk \frac{2\pi}{MT})}_{\text{与式(3.1)比较}} \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{T'} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega + jk \frac{2\pi}{T'})}_{\text{采样率为 } f'_s = f_s/M \text{ 的信号频谱}} \quad (3.20)$$

这就表示了采样率为  $f'_s = \frac{f_s}{M}$  的下采样信号  $y(n)$ 。

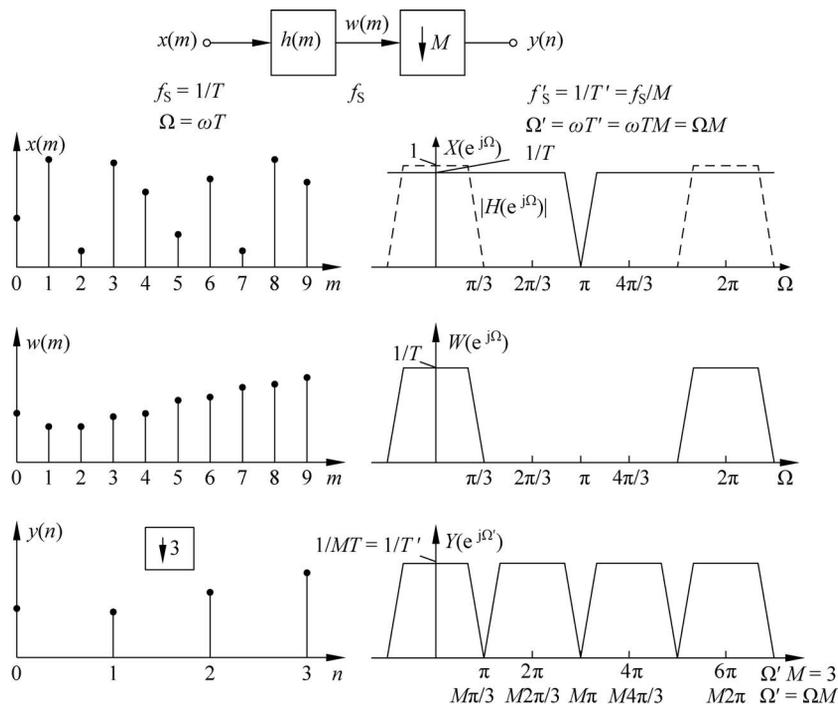


图 3.2 在时域和频域使用  $M$  的抗混叠滤波及下采样

## 3.2 同步转换

图 3.3 所示的系统可以通过一个比例因子  $L/M$  对耦合采样率进行采样率转换。通过因子  $L$  上采样后,以采样率  $Lf_s$  进行抗镜像滤波,随后通过因子  $M$  下采样。因为经过上采样和滤波后,每次只有  $M$  个样本被使用,因此就有可能开发出降低复杂度的高效算法。在这方面,有两种方法被使用:一种基于时域,另一种基于  $Z$ -域基本原理。由于  $Z$ -域方法计算效率高,本书只考虑该方法。

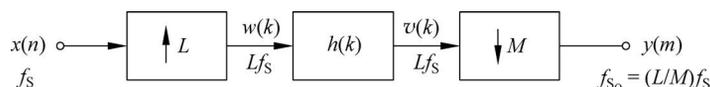


图 3.3 通过因子  $L/M$  进行采样率转换

从长度为  $n$  的有限脉冲响应  $h(n)$  和它的  $Z$ -变换[式(3.21)]开始讨论。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (3.21)$$

具有  $M$  个分量的多相表示可以写成式(3.22)或式(3.24)。

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} E_k(z^M) \quad \text{类型 1} \quad (3.22)$$

$$e_k(n) = h(nM + k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.23)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-(M-1-k)} R_k(z^M) \quad \text{类型 2} \quad (3.24)$$

$$r_k(n) = h(nM - k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.25)$$

式(3.22)和式(3.24)的多相分解分别设为类型 1 和类型 2。类型 1 的多相分解对应的是逆时针方向的整流器模型,类型 2 的多相分解对应的是顺时针方向的整流器模型。 $R(z)$  和  $E(z)$  之间的关系为

$$R_k(z) = E_{M-1-k}(z) \quad (3.26)$$

借助图 3.4 所示的恒等式和式(3.27)的分解式(欧几里得定理),可以移动图 3.5 中的内部延迟元件。如果  $M$  和  $L$  是素数,则式(3.27)成立。在上采样和下采样级联中,功能块的顺序可以互换[图 3.5(b)]。

$$z^{-1} = z^{-pL} z^{qM} \quad (3.27)$$

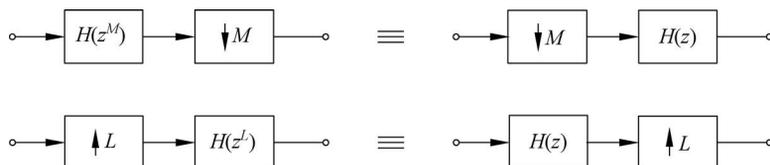


图 3.4 采样率转换的恒等式

利用  $L=2$  和  $M=3$  的例子可以说明多相分解的使用方法,这意味着采样率从 48kHz 到 32kHz 的转换。图 3.6 和图 3.7 显示了因子为  $2/3$  时采样率转换多相分解的两种不同解决方案。图 3.7 上采样的进一步分解如图 3.8 所示。首先,通过多相分解实现插值,将延迟  $z^{-1}$  分解为  $z^{-1} = z^2 z^{-3}$ 。然后,因子 3 的下采样器通过加法器移动到两条路径[图 3.8(b)],延迟按照图 3.4 的恒等式移动。在图 3.8(c)中,上采样器与下采样器交换。在最后一步[图 3.8(d)], $E_0(z)$  和  $E_1(z)$  进行再一次多相分解,实际的滤波器操作  $E_{0k}(z)$  和  $E_{1k}(z)$ ,  $k=0, 1, 2$ , 在输入采样率的  $1/3$  上进行。

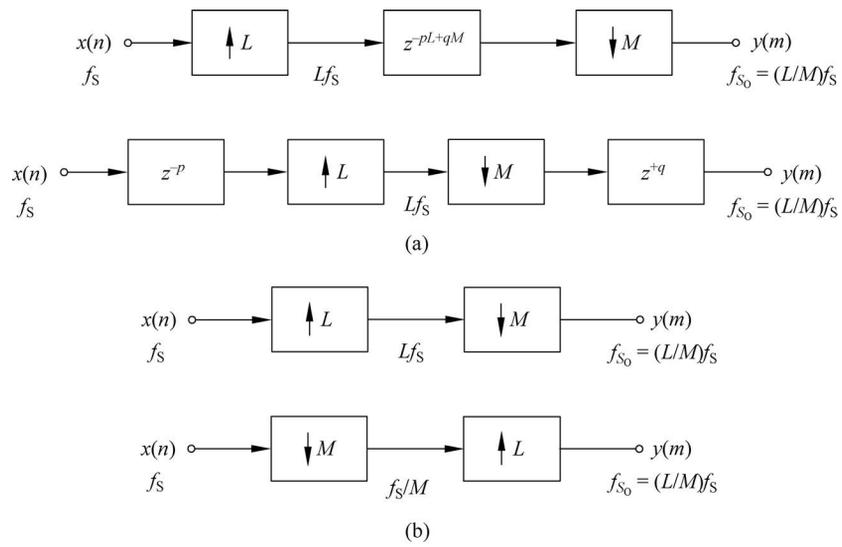


图 3.5 欧几里得定理分解图

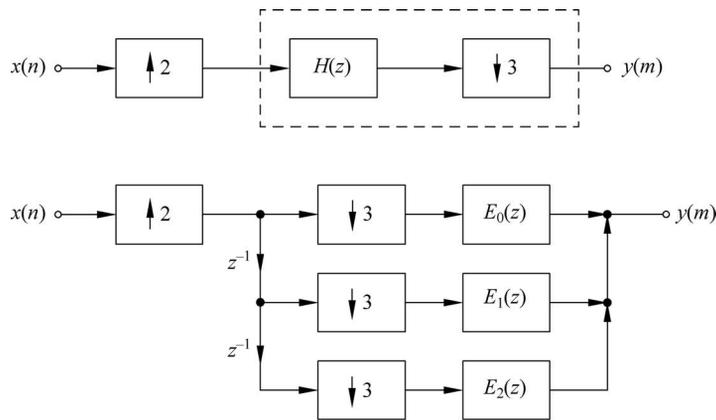


图 3.6  $L/M=2/3$  下采样的多相分解

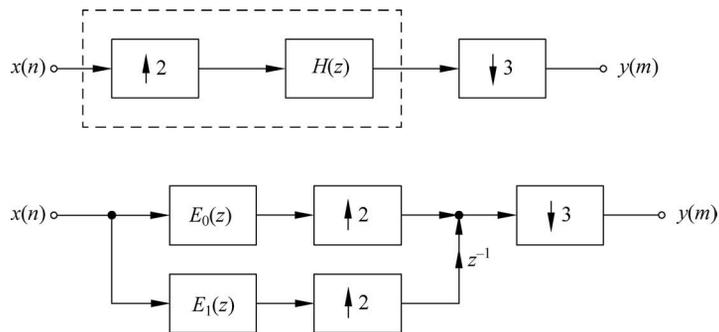
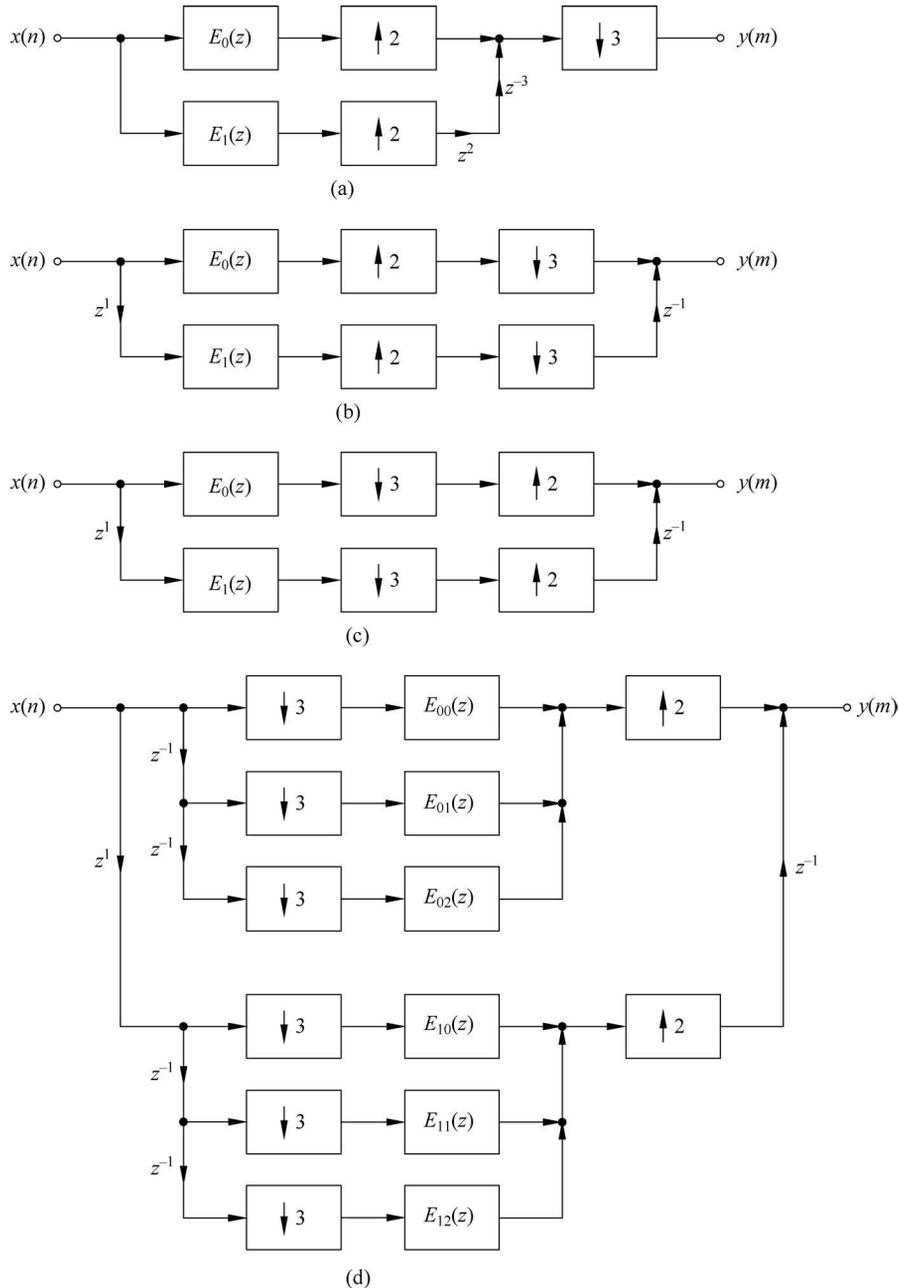


图 3.7  $L/M=2/3$  上采样的多相分解

图 3.8 使用因子  $2/3$  的采样率转换

### 3.3 异步转换

异步系统由采样率不同且不耦合的子系统组成。这些系统之间可以通过使用第一系统的采样率进行 DA 转换,然后使用第二系统的采样率进行 AD 转换。对一个多速率系统可用该方法进行数字逼近。图 3.9(a)显示了一个系统,它使用因子  $L$  上采样,后跟抗镜像滤波器  $H(z)$ 和对内插信号  $y(k)$ 的重采样。采样值  $y(k)$ 保持一个时钟周期[见图 3.9(c)],然后以输出时钟周期  $T_{S_o} = 1/f_{S_o}$  被采样。为了使

两个连续采样值  $y(k)$  的差值小于量化步长  $Q$ , 必须提高内插采样率。应用于  $y(k)$  的采样保持函数可以抑制出现在  $Lf_s$  倍频处的谱镜像[见图 3.9(b)], 得到的信号是一个带限连续时间信号, 可以用输出采样率  $f_{s_0}$  对其进行采样。

为了计算所需的过采样率, 在频域内考虑该问题。采样保持系统[见图 3.9(b)]在频率  $\tilde{f} = \left(L - \frac{1}{2}\right) f_s$  处的 sinc 函数为

$$E(\tilde{f}) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\tilde{f}}{Lf_s}\right)}{\frac{\pi\tilde{f}}{Lf_s}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\left(L - \frac{1}{2}\right)f_s}{Lf_s}\right)}{\frac{\pi\left(L - \frac{1}{2}\right)f_s}{Lf_s}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2L}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2L}} \quad (3.28)$$

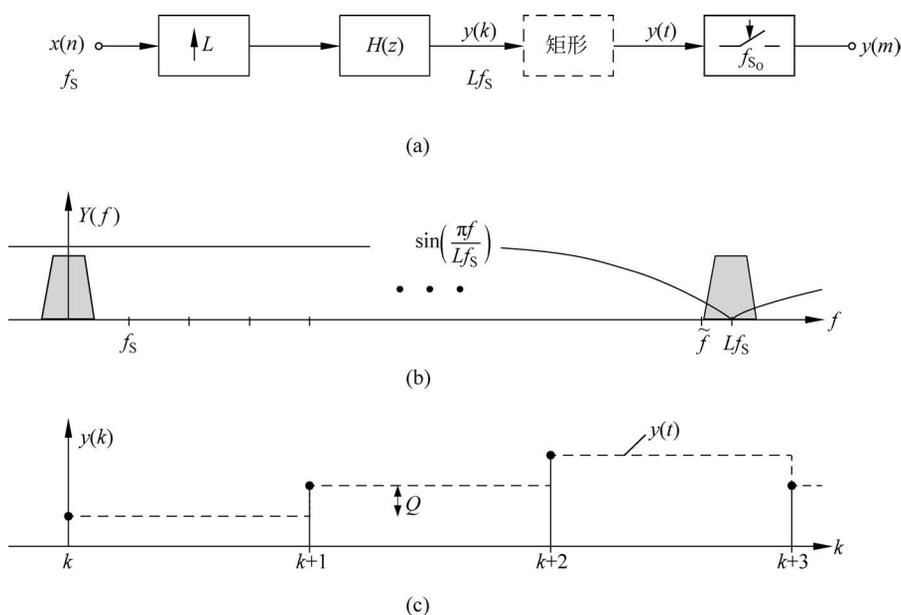


图 3.9 DA/AD 转换的逼近

因为  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ , 推导可得

$$E(\tilde{f}) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2L}\right)}{\pi\left(1 - \frac{1}{2L}\right)} \approx \frac{\pi/2L}{\pi\left(1 - \frac{1}{2L}\right)} \approx \frac{1}{2L - 1} \approx \frac{1}{2L} \quad (3.29)$$

式(3.29)的值应该小于  $Q/2$ , 由此可计算插值因子  $L$ 。对于给定的字长  $w$  和量化步长  $Q$ , 所需的插值率  $L$  计算如下

$$\frac{Q}{2} \geq \frac{1}{2L} \quad (3.30)$$

$$\frac{2^{-(w-1)}}{2} \geq \frac{1}{2L} \quad (3.31)$$

$$\hookrightarrow L \geq 2^{w-1} \quad (3.32)$$

对于上采样值  $y(k)$  之间的线性插值,可推导出式(3.35)。

$$E(\tilde{f}) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi\tilde{f}}{Lf_s}\right)}{\left(\frac{\pi\tilde{f}}{Lf_s}\right)^2} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\sin^2\left[\frac{\pi\left(L - \frac{1}{2}\right)f_s}{Lf_s}\right]}{\left[\frac{\pi\left(L - \frac{1}{2}\right)f_s}{Lf_s}\right]^2} \quad (3.34)$$

$$\approx \frac{1}{(2L)^2} \quad (3.35)$$

因此,有可能降低插值率为

$$L_1 \geq 2^{\frac{w}{2}-1} \quad (3.36)$$

图 3.10 用两阶段框图说明了插值方法。首先,通过常规滤波实现采样率  $L_1 f_s$  的插值,第二阶段采用线性插值的方法进行因子  $L_2$  的上采样。两阶段法必须满足采样率要求  $L f_s = (L_1 L_2) f_s$ 。第二阶段插值算法的选择有可能降低第一阶段的过采样因子值。

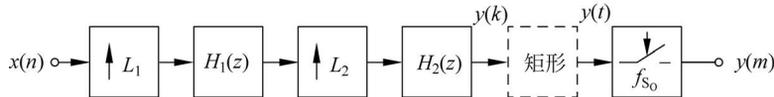


图 3.10 采样-保持函数前的线性插值

### 3.3.1 单级方法

图 3.9(a)所示的框图显示了直接转换方法的实现。设输入  $x(n)$  的采样率为  $f_{s_1}$ , 输出信号的采样率为  $f_{s_0}$ , 从  $x(n)$  计算其延迟  $\alpha$  时的 DFT 为

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(n-\alpha)] &= X(e^{j\Omega})e^{-j\alpha\Omega} \\ &= X(e^{j\Omega})H_\alpha(e^{j\Omega}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中,  $0 < \alpha < 1$ , 传递函数为

$$H_\alpha(e^{j\Omega}) = e^{-j\alpha\Omega} \quad (3.38)$$

并具有特性

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (3.39)$$

脉冲响应为

$$h_\alpha(n) = h(n-\alpha) = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin[\Omega_c(n-\alpha)]}{\Omega_c(n-\alpha)} \quad (3.40)$$

对应式(3.37)的频域表示,可以将时域延迟信号  $x(n-\alpha)$  表示为  $x(n)$  和  $h(n-\alpha)$  的卷积,如式(3.41)和式(3.42)所示。

$$x(n-\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-\alpha-m) \quad (3.41)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin[\Omega_c(n-\alpha-m)]}{\Omega_c(n-\alpha-m)} \quad (3.42)$$

图 3.11 显示了  $\alpha$  固定时利用式(3.42)的时域卷积,图 3.12 显示了离散  $\alpha_i$  ( $i=0,1,2,3$ )时的时域卷积,其中的系数  $h(n-\alpha_i)$  由 sinc 函数与离散样点  $x(n)$  的交点得到。

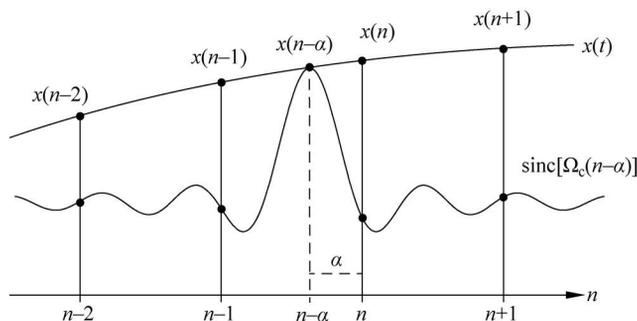


图 3.11  $\alpha$  固定时式(3.42)的时域卷积

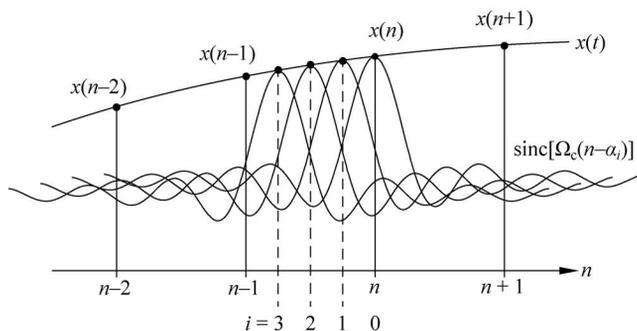


图 3.12  $\alpha_i$  ( $i=0,1,2,3$ )离散时式(3.42)的时域卷积

为了限制卷积和,对脉冲响应加窗,得到

$$h_W(n-\alpha_i) = w(n) \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin[\Omega_c(n-\alpha_i)]}{\Omega_c(n-\alpha_i)} \quad n=0,1,\dots,2M \quad (3.43)$$

由此,可得到延迟样点的估计结果

$$\hat{x}(n-\alpha_i) = \sum_{m=-M}^M x(m)h_W(n-\alpha_i-m) \quad (3.44)$$

依赖于  $\alpha_i$  的时变脉冲响应的图形解释如图 3.13 所示。将两个输入样本间的区间细分为  $N$  个小区间,得到长度为  $2M+1$  的  $N$  个子脉冲响应。

如果输出采样率小于输入采样率( $f_{S_0} < f_{S_1}$ ),则对输出采样率必须进行限带(抗混叠)操作。这可以

通过傅里叶变换的缩放定理,用因子  $\beta = \frac{f_{S_0}}{f_{S_1}}$  来实现,得到

$$h(n-\alpha) = \frac{\beta\Omega_c}{\pi} \frac{\sin[\beta\Omega_c(n-\alpha)]}{\beta\Omega_c(n-\alpha)} \quad (3.45)$$

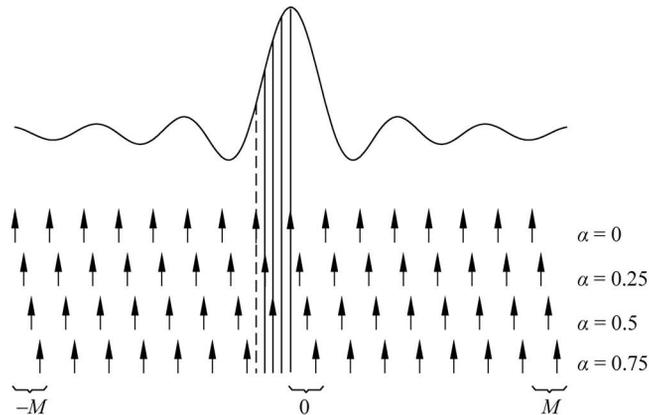


图 3.13 sinc 函数和不同的脉冲响应

这种脉冲响应的时域缩放结果导致时变子脉冲响应的系数数量增加,所需的状态数也增加了。图 3.14 显示了时域缩放的脉冲响应,并说明了系数数量  $M$  的增加。

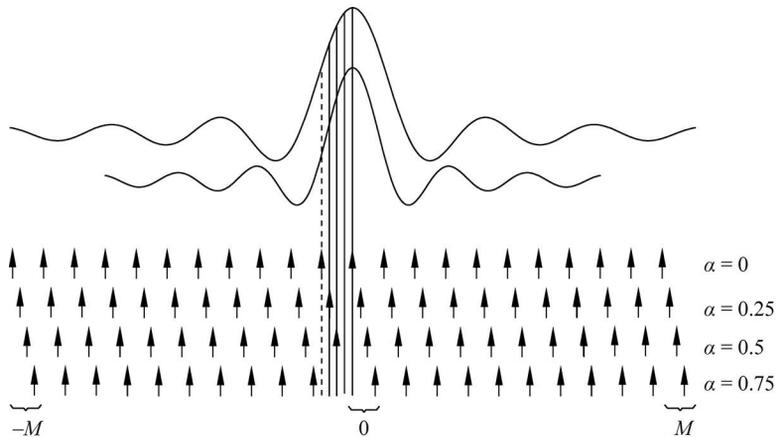


图 3.14 时间缩放的脉冲响应

### 3.3.2 多级方法

多级转换方法的基础框图如图 3.15(a)所示,其频域解释如图 3.15(b)~(d)所示。在采样-保持函数之前采样率被提高到  $Lf_s$ ,其过程分四个阶段完成。在前两个阶段,每阶段采样率乘以 2,后跟一个抗镜像滤波器[见图 3.15(b)、图 3.15(c)],结果得到 4 倍的过采样频谱[图 3.15(d)]。第三阶段通过乘因子 32 对信号进行上采样,并对镜像谱进行抑制[图 3.15(d)、图 3.15(e)]。在第四阶段[图 3.15(e)],通过乘因子 256 对信号进行上采样,并使用线性插值器,得到采样率  $Lf_s$ 。线性插值器的  $\text{sinc}^2$  函数抑制了在  $128f_s$  倍频处的镜像,直到  $Lf_s$  处的频谱。模拟的采样-保持函数如图 3.15(f)所示,执行输出采样率下的重采样。这种级联插值结构的直接转换,要求在每次上采样后以相应的采样率进行抗镜像滤波。虽然由于滤波器设计要求的降低,需要的滤波器阶数会减少,但在第三阶段和第四阶段的滤波器是不可能直接实现的。有专家建议,通过测量输入输出速率之比来控制第三和第四阶段的多相滤波器[见图 3.16(a)],以降低复杂度。图 3.16(b)~(d)说明了这种方法在时域中的解释。图 3.16(b)显示了在第一和第二插值阶段,当输入  $x(n)$  的两个样本间插入三个样本时的插值情况,横坐标表示输入采

样间隔,插值后采样率提升为原来的4倍。图3.16(c)显示了4倍过采样的信号,假设输出样本 $y(m=0)$ 和输入样本 $x(n=0)$ 相同,则输出样本 $y(m=1)$ 可以这样确定,即在第三阶段使用插值器,只需要计算输出样本之前和之后的两个多相滤波器。因此,在总共31个可能的多相滤波器中,只有两个在第三阶段需要进行计算。图3.16(d)显示了这两个多相输出样本,在这两个样本之间,通过对255个值的网格进行线性插值得到输出样本 $y(m=1)$ 。

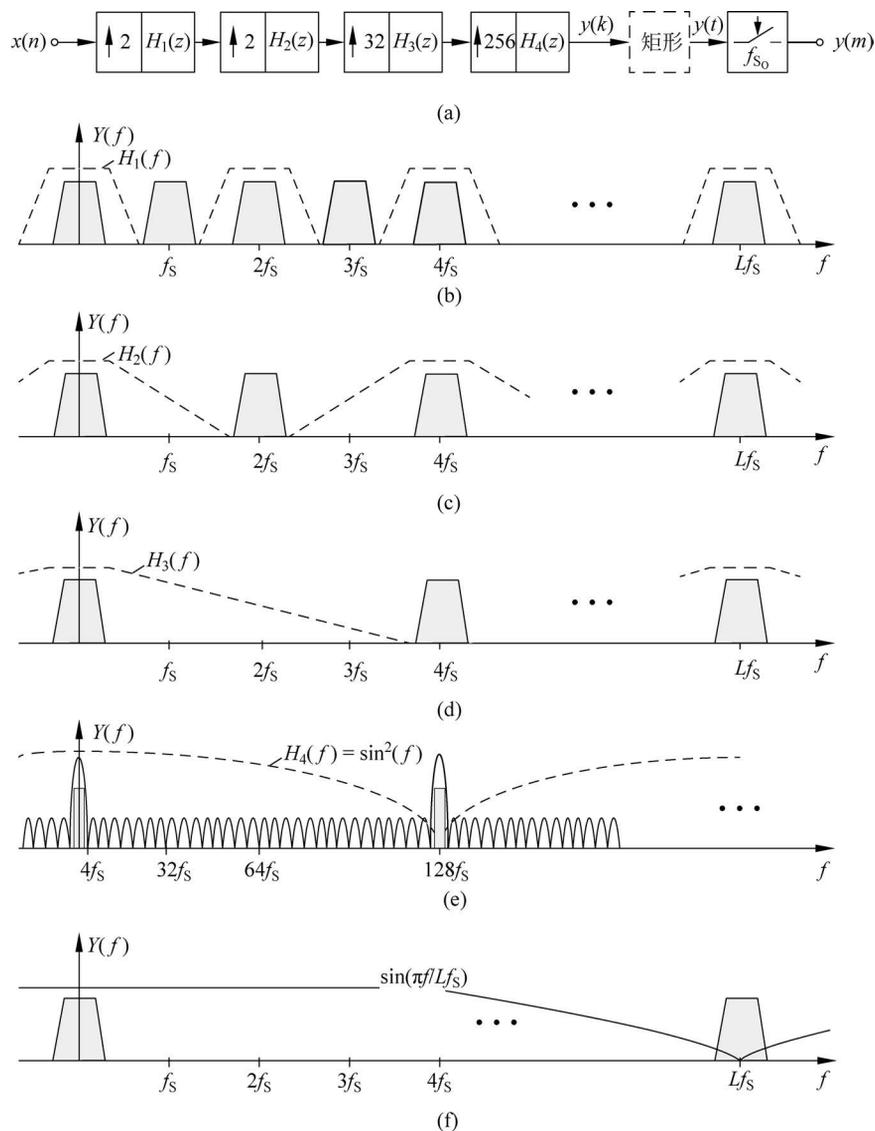


图 3.15 多级转换-频域解释

代替第三阶段和第四阶段,可以使用特殊的插值方法直接从4倍过采样的输入信号中计算输出 $y(m)$ (见图3.17)。根据 $L=2^{w-1}=L_1L_2L_3=2^2L_3$ ,可以计算出最后一级上采样因子 $L_3=2^{w-3}$ 。3.4节介绍了不同的插值方法,可以实时计算滤波器系数。这可以解释为时变滤波器,其中滤波器系数是由采样率的比值导出的。通过测量输入与输出采样率的比值,可以用输出速率对输出样本计算滤波器的系数集。

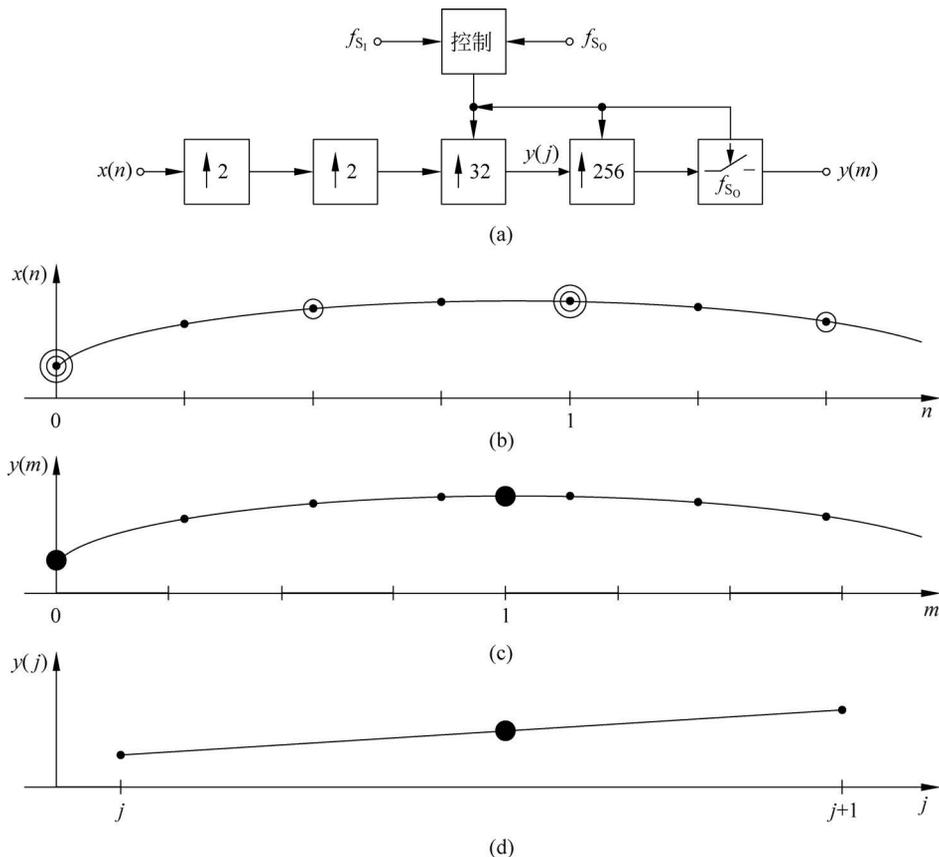


图 3.16 时域解释

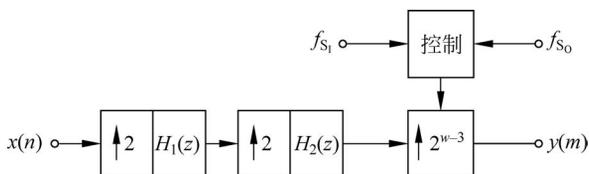


图 3.17 时变插值滤波器系数计算时的采样率转换

### 3.3.3 插值滤波器的控制

通过测量输入和输出采样率的比值来控制插值滤波器。将采样率提升到  $L$  倍, 信号字长  $w = 16$ , 则输入采样周期就被划分为  $L = 2^{w-1} = 2^{15}$  个部分(网格)。根据测量的采样周期比值  $T_{S_0}/T_{S_1}$ , 在这些网格上计算输出样本的时刻, 如下所述。

计数器时钟为  $Lf_{S_1}$ , 每当有一个新的输入采样时钟时, 计数器就被复位。计数器输出随时间变化的锯齿波如图 3.18 所示。计数器在一个输入采样周期内从 0 运行到  $L-1$ 。在  $t_{i-2}$  时刻, 对应计数器输出  $z_{i-2}$ , 输出采样周期  $T_{S_0}$  开始, 并在  $t_{i-1}$  时刻停止, 同时计数器输出  $z_{i-1}$ 。两次计数器测量的差值可用于计算输出采样周期  $T_{S_0}$  和分辨率  $Lf_{S_1}$ 。

新的计数器测量值添加到以前的计数器测量值的差值中, 得到新的计数器测量结果为

$$t_i = (t_{i-1} + T_{S_0}) \oplus T_{S_1} \quad (3.46)$$

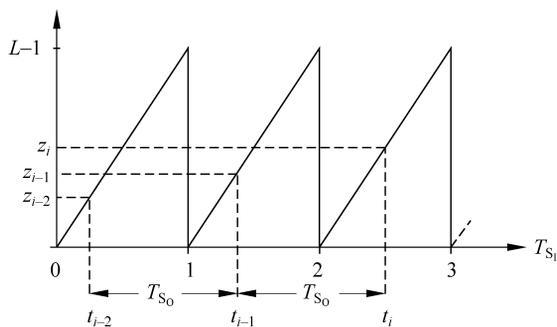


图 3.18 计数器输出随时间变化的锯齿波

取模运算可以用字长为  $w-1=15$  的累加器进行,得出的时刻  $t_i$  决定了在输出采样率下输出样本的时刻,因此就决定了单级转换中多相滤波器的选择或多级转换中时刻的选择。

$T_{S_0}/T_{S_1}$  的测量如图 3.19 所示。

(1) 输入采样率为  $f_{S_1}$ ,使用频率乘法器增加到  $M_Z f_{S_1}$ ,其中  $M_Z=2^w$ 。乘以  $M_Z$  的输入时钟触发一个  $w$  位计数器,计数器输出  $z$  在每  $M_O$  个输出采样周期内被评估。

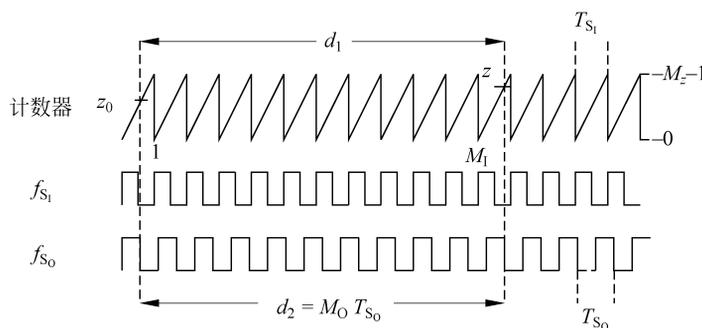
(2) 对  $M_O$  输出采样周期计数。

(3) 对  $M_1$  输入采样周期计数。

时间间隔  $d_1, d_2$  (见图 3.19) 分别为

$$d_1 = M_1 T_{S_1} + \frac{z - z_0}{M_Z} T_{S_1} = \left( M_1 + \frac{z - z_0}{M_Z} \right) T_{S_1} \quad (3.47)$$

$$d_2 = M_O T_{S_0} \quad (3.48)$$


 图 3.19  $T_{S_0}/T_{S_1}$  的测量

当  $d_1 = d_2$  时,可以推导出

$$M_O T_{S_0} = \left( M_1 + \frac{z - z_0}{M_Z} \right) T_{S_1}$$

$$\frac{T_{S_0}}{T_{S_1}} = \frac{M_1 + \frac{z - z_0}{M_Z}}{M_O} = \frac{M_Z M_1 + (z - z_0)}{M_Z M_O} \quad (3.49)$$

例:  $w=0 \rightarrow M_Z=1$

$$\frac{T_{S_0}}{T_{S_1}} = \frac{M_1}{2^{15}} \quad (3.50)$$

在 15 位的精度下,取平均数  $M_O = 2^{15}$ ,需要确定数字  $M_1$ 。

例:  $\omega = 8 \rightarrow M_Z = 2^8$

$$\frac{T_{S_0}}{T_{S_1}} = \frac{2^8 M_1 + (z - z_0)}{2^8 2^7} \quad (3.51)$$

在 15 位的精度下,取平均数  $M_O = 2^7$ ,需要确定数字  $M_1$  及计数器的输出。

采样率转换器的输入和输出采样率可以通过对每个输出时钟计数器的 8 位 ( $2^8 = 256$ ) 增量来计算,从式(3.52)可计算出  $T_{S_0}/T_{S_1}$  的值。不同采样率转换的计数器 8 位增量列在表 3.1 中。

$$z = \frac{T_{S_0}}{T_{S_1}} M_Z = \frac{f_{S_1}}{f_{S_0}} 256 \quad (3.52)$$

表 3.1 不同采样率转换的计数器增量

转换/kHz	8 位计数器增量	转换/kHz	8 位计数器增量
32→48	170	48→44.1	278
44.1→48	235	48→32	384
32→44.1	185	44.1→32	352

### 3.4 插值方法

本节将讨论几种特殊的插值方法。这些方法可以用来计算采样率转换过程中时变滤波器的系数,以及需要用到过采样的输入序列和输出样本的时刻。过采样的输入序列与时变滤波器系数卷积可得到输出采样率下的输出样本。这种实时计算滤波器系数的方法并不是基于流行的滤波器设计方法,相反,它是对每个输入时钟周期计算滤波器的系数集。从输出样本间的距离到过采样输入序列的时间网格可以推导出滤波器的系数。

#### 3.4.1 多项式插值

多项式插值的目的是确定一个  $N$  阶多项式

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i \quad (3.53)$$

能准确表示在  $N+1$  个均匀间隔处  $x_i$  的函数  $f(x)$ ,即  $p_N(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, N$ 。这可以用一组线性方程表示

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

多项式系数  $a_i$  是  $y_0 y_1 \cdots y_N$  的函数,可以根据克莱姆法则(Cramer's Rule)求出,得到的  $a_i$  如式(3.55)所示。

$$a_i = \frac{\begin{matrix} \text{第 } i \text{ 列} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & y_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & y_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & y_N & \cdots & x_N^N \end{array} \right| \end{matrix}}{\begin{matrix} \left| \begin{array}{cccc} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{array} \right| \end{matrix}}, \quad i=0,1,\dots,N \quad (3.55)$$

对于均匀间距的  $x_i=i, i=0,1,\dots,N$ , 一个距离为  $\alpha$  的输出样本的插值为

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=0}^N a_i (n+\alpha)^i \quad (3.56)$$

为了确定输出样本  $y(n+\alpha)$  与  $y_i$  之间的关系, 需要确定式(3.57)中的一组时变系数  $c_i$ 。

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_i(\alpha) y(n+i) \quad (3.57)$$

时变系数  $c_i(\alpha)$  的计算将用一个例子来说明。

图 3.20 给出了一个  $N=2$  距离为  $\alpha$  的输出样本, 使用三个样本进行插值, 可以写成

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=0}^2 a_i (n+\alpha)^i \quad (3.58)$$

样本  $y(n+j), j=-1,0,1$ , 可以表示为

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \sum_{i=0}^2 a_i (n+1)^i, \quad \alpha=1 \\ y(n) &= \sum_{i=0}^2 a_i n^i, \quad \alpha=0 \\ y(n-1) &= \sum_{i=0}^2 a_i (n-1)^i, \quad \alpha=-1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

或者用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & (n+1) & (n+1)^2 \\ 1 & n & n^2 \\ 1 & (n-1) & (n-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n) \\ y(n-1) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

系数  $a_i$  是  $y_i$  的函数, 可以表示为

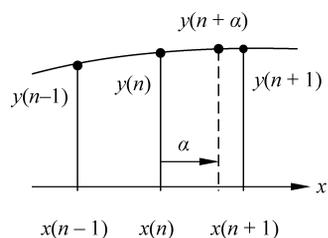


图 3.20 三样本多项式插值

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n(n-1)}{2} & 1-n^2 & \frac{n(n+1)}{2} \\ -\frac{2n-1}{2} & 2n & -\frac{2n+1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n) \\ y(n-1) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

将式(3.58)展开,则有式(3.62)成立。

$$y(n+\alpha) = a_0 + a_1(n+\alpha) + a_2(n+\alpha)^2 \quad (3.62)$$

输出样本  $y(n+\alpha)$  可以写成

$$\begin{aligned} y(n+\alpha) &= \sum_{i=-1}^1 c_i(\alpha)y(n+i) \\ &= c_{-1}y(n-1) + c_0y(n) + c_1y(n+1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

由式(3.61)得到的  $a_i$  代入式(3.62),得

$$\begin{aligned} y(n+\alpha) &= \left[ \frac{1}{2}y(n+1) - y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) \right] (n+\alpha)^2 + \\ &\quad \left[ -\frac{2n-1}{2}y(n+1) + 2ny(n) - \frac{2n+1}{2}y(n-1) \right] (n+\alpha) + \\ &\quad \frac{n(n-1)}{2}y(n+1) + (1-n^2)y(n) + \frac{n(n+1)}{2}y(n-1) \end{aligned} \quad (3.64)$$

比较式(3.63)和式(3.64)的系数,当  $n=0$  时,可得到如下结果

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1) \\ c_0 &= -(\alpha-1)(\alpha+1) = 1-\alpha^2 \\ c_1 &= \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) \end{aligned}$$

### 3.4.2 拉格朗日插值

$N+1$  个样本的拉格朗日插值需要利用多项式  $l_i(x)$ , 该多项式具有如下性质(见图 3.21)。

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.65)$$

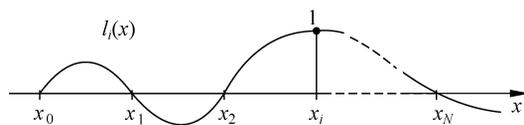


图 3.21 拉格朗日多项式

基于多项式  $l_i(x)$  的零点,它可以表示为

$$l_i(x) = a_i(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_N) \quad (3.66)$$

当  $l_i(x_i)=1$  时,系数为

$$a_i(x_i) = \frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_N)} \quad (3.67)$$

插值多项式表示为

$$\begin{aligned}
 p_N(x) &= \sum_{i=0}^N l_i(x) y_i \\
 &= l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1 + \cdots + l_N(x) y_N
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

设  $a = \prod_{j=0}^N (x - x_j)$ , 则式(3.66)可以写成

$$\begin{aligned}
 l_i(x) &= a_i \frac{a}{x - x_i} = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^N x_i - x_j} \frac{\prod_{j=0}^N x - x_j}{x - x_i} \\
 &= \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

对于均匀间隔的输入样本,有

$$x_i = x_0 + ih \tag{3.70}$$

则对于新变量  $\alpha$ , 有

$$x = x_0 + ah \tag{3.71}$$

可以得到

$$\frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x_0 + ah) - (x_0 + jh)}{(x_0 + ih) - (x_0 + jh)} = \frac{\alpha - j}{i - j} \tag{3.72}$$

因此

$$l_i(x(\alpha)) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\alpha - j}{i - j} \tag{3.73}$$

$N$  为偶数时, 可以写成

$$l_i(x(\alpha)) = \prod_{j=-\frac{N}{2}, j \neq i}^{\frac{N}{2}} \frac{\alpha - j}{i - j} \tag{3.74}$$

$N$  为奇数时, 可以写成

$$l_i(x(\alpha)) = \prod_{j=-\frac{N-1}{2}, j \neq i}^{\frac{N+1}{2}} \frac{\alpha - j}{i - j} \tag{3.75}$$

则输出样本的插值表达式如下

$$y(n + \alpha) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} l_i(\alpha) y(n + i) \tag{3.76}$$

例:  $N=2$ , 距离为  $\alpha$  的输出样本, 使用三个样本进行插值, 所得  $l_i(x)$  如下。

$$\begin{aligned}
 l_{-1}(x(\alpha)) &= \prod_{j=-1, j \neq -1}^1 \frac{\alpha - j}{-1 - j} = \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) \\
 l_0(x(\alpha)) &= \prod_{j=-1, j \neq 0}^1 \frac{\alpha - j}{0 - j} = -(\alpha - 1)(\alpha + 1) = 1 - \alpha^2 \\
 l_1(x(\alpha)) &= \prod_{j=-1, j \neq 1}^1 \frac{\alpha - j}{1 - j} = \frac{1}{2} \alpha (\alpha + 1)
 \end{aligned}$$

### 3.4.3 样条插值

使用只存在于有限区间上的分段定义函数的插值被称为样条插值,其目的是从加权样本  $y(n+i)$

$$\text{来计算样本 } y(n+a) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} b_i^N(\alpha)y(n+i)。$$

定义在区间  $[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}]$  的  $m+1$  个样本的  $N$  阶 B-样条  $M_k^N(x)$  为

$$M_k^N(x) = \sum_{i=k}^{k+m} a_i \phi_i(x) \quad (3.77)$$

其截断幂函数为

$$\phi_i(x) = (x - x_i)_+^N = \begin{cases} 0, & x < x_i \\ (x - x_i)^N, & x \geq x_i \end{cases} \quad (3.78)$$

下面讨论  $k=0$  时的  $M_0^N(x) = \sum_{i=0}^m a_i \phi_i(x)$ , 当  $x < x_0$  时,  $M_0^N(x) = 0$ , 当  $x \geq x_m$  时,  $M_0^N(x) = 0$ 。

图 3.22 显示了截断的幂函数和  $N$  阶 B-样条。根据截断幂函数的定义,可以写出

$$\begin{aligned} M_0^N(x) &= a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_m \phi_m(x) \\ &= a_0 (x - x_0)_+^N + a_1 (x - x_1)_+^N + \dots + a_m (x - x_m)_+^N \end{aligned} \quad (3.79)$$

经过计算,可得

$$\begin{aligned} M_0^N(x) &= a_0 (x_0^N + c_1 x_0^{N-1} x + \dots + c_{N-1} x_0 x^{N-1} + x^N) + \\ &\quad a_1 (x_1^N + c_1 x_1^{N-1} x + \dots + c_{N-1} x_1 x^{N-1} + x^N) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_m (x_m^N + c_1 x_m^{N-1} x + \dots + c_{N-1} x_m x^{N-1} + x^N) \end{aligned} \quad (3.80)$$

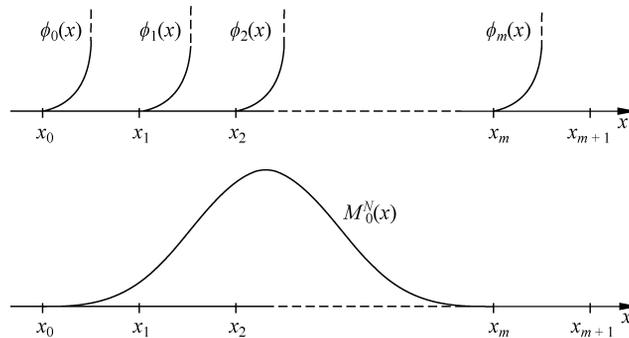


图 3.22 截断幂函数和  $N$  阶 B-样条

根据  $x \geq x_m$  时  $M_0^N(x) = 0$  的条件,用式(3.80)和  $x$  的幂系数可以得到以下线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^N & x_1^N & \dots & x_m^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

当  $m > N$  时这个齐次线性方程组有非零解,最小要求为  $m = N + 1$ 。当  $m = N + 1$  时,得到系数如下:

$$a_i = \frac{\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 列} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & 0 & \cdots & x_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_0^N & x_1^N & x_2^N & \cdots & 0 & \cdots & x_{N+1}^N \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{N+1} & x_1^{N+1} & x_2^{N+1} & \cdots & x_{N+1}^{N+1} \end{array} \right| \end{array}}{i=0,1,\dots,N+1} \quad (3.82)$$

将式(3.82)的分子行列式的第  $i$  列设为 0,相当于删除这一列。计算 Vandermonde(范德蒙德)矩阵的两个行列式并相除,得到系数

$$a_i = \frac{1}{\prod_{j=0, i \neq j}^{N+1} (x_i - x_j)} \quad (3.83)$$

因此,有

$$M_0^N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{(x - x_i)_+^N}{\prod_{j=0, i \neq j}^{N+1} (x_i - x_j)} \quad (3.84)$$

对某个  $k$ ,可得

$$M_k^N(x) = \sum_{i=k}^{k+N+1} \frac{(x - x_i)_+^N}{\prod_{j=0, i \neq j}^{N+1} (x_i - x_j)} \quad (3.85)$$

由于函数  $M_k^N(x)$  随着  $N$  的增加而减小,因此进行形如  $N_k^N = (x_{k+N+1} - x_k)M_k^N$  的归一化,这样对于等距样本,可得

$$N_k^N(x) = (N + 1) \cdot M_k^N(x) \quad (3.86)$$

下面的例子描述了 B-样条的计算过程。

对于  $N = 3, m = 4$ ,使用 5 个输出样本进行 B-样条插值。

根据式(3.83)得到的系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{(x_0 - x_4)(x_0 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ a_1 &= \frac{1}{(x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} \\ a_2 &= \frac{1}{(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\ a_3 &= \frac{1}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)} \\ a_4 &= \frac{1}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_0)} \end{aligned}$$

图 3.23(a)和图 3.23(b)显示了用于计算  $N_0^3(x)$  的截断幂函数及它们的和。图 3.23(c)描绘了水平平移的  $N_i^3(x)$ 。

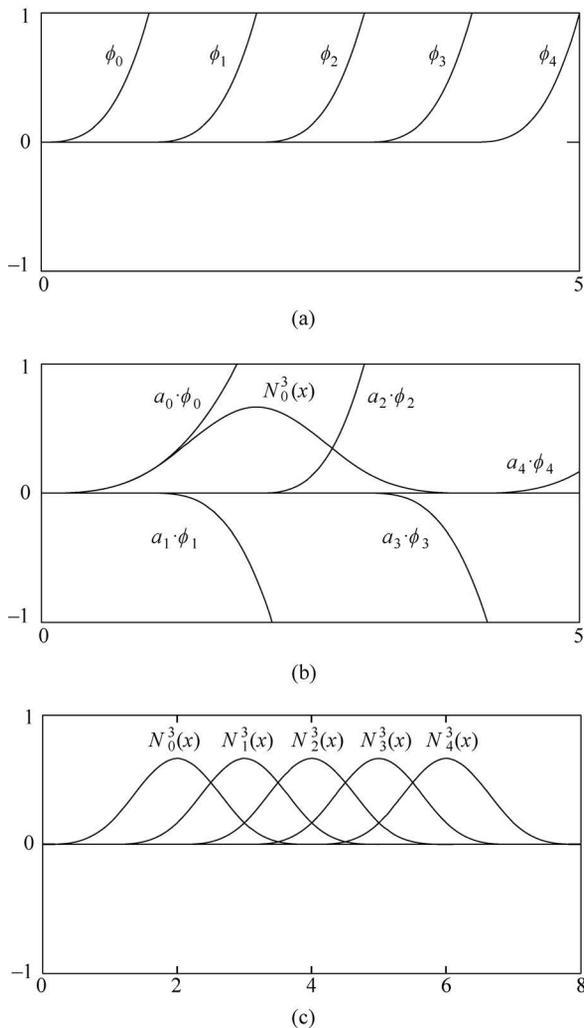


图 3.23 三阶 B-样条插值 ( $N=3, m=4, 5$  个样本)

B-样条的线性组合称为样条。图 3.24 显示了二阶和三阶样条对样本  $y(n+\alpha)$  的插值结果。在垂直线上距离  $\alpha$  处进行 B-样条  $N_i^N(x)$  移位的计算,用样本  $y(n)$  和归一化 B-样条  $N_i^N(x)$  表示二阶和三阶样条如下:

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=-1}^1 y(n+i) N_{n-1+i}^2(\alpha) \quad (3.87)$$

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=-1}^2 y(n+i) N_{n-2+i}^3(\alpha) \quad (3.88)$$

在样本距离  $\alpha$  处,二阶 B-样条的计算是基于 B-样条的对称性完成的,如图 3.25 所示。根据式(3.77)和式(3.86),以及图 3.25 所示的对称性,可以将 B-样条表示为

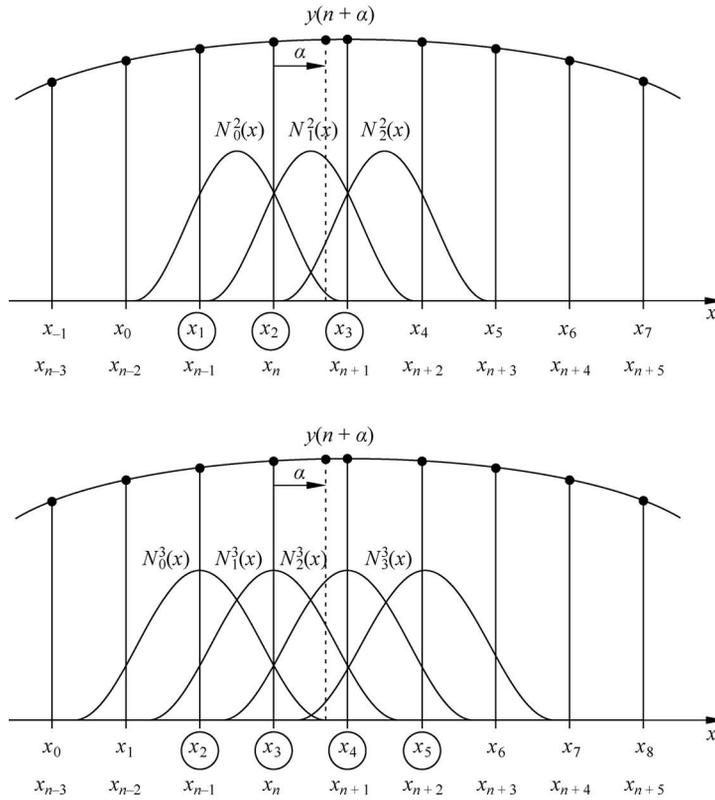


图 3.24 二阶和三阶 B-样条插值

$$\begin{aligned}
 N_2^2(\alpha) &= N_0^2(\alpha) = 3 \sum_{i=0}^3 a_i (\alpha - x_i)_+^2 \\
 N_1^2(1+\alpha) &= N_0^2(1+\alpha) = 3 \sum_{i=0}^3 a_i (1+\alpha - x_i)_+^2 \\
 N_0^2(2+\alpha) &= N_0^2(1-\alpha) = 3 \sum_{i=0}^3 a_i (2+\alpha - x_i)_+^2 \\
 &= 3 \sum_{i=0}^3 a_i (1-\alpha - x_i)_+^2
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

由式(3.83)可以得到系数

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{(0-1)(-2)(-3)} = -\frac{1}{6} \\
 a_1 &= \frac{1}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2} \\
 a_2 &= \frac{1}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

因此

$$N_2^2(\alpha) = 3[a_0 \alpha^2] = -\frac{1}{2} \alpha^2$$

$$N_1^2(\alpha) = 3[a_0(1+\alpha)^2 + a_1\alpha^2] = -\frac{1}{2}(1+\alpha)^2 + \frac{3}{2}\alpha^2$$

$$N_0^2(\alpha) = 3[a_0(1-\alpha)^2] = -\frac{1}{2}(1-\alpha)^2 \quad (3.91)$$

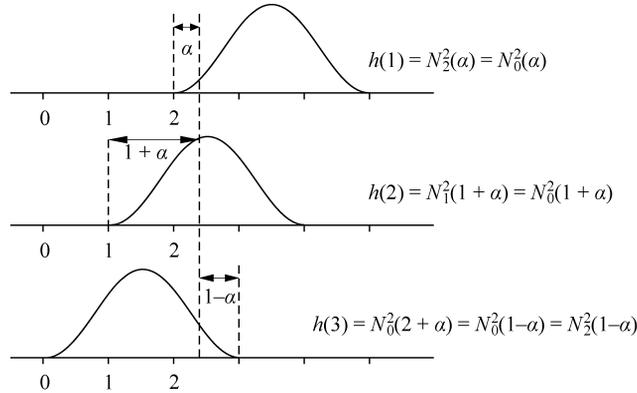


图 3.25 二阶 B-样条的对称性

由于 B-样条的对称性质,可以推导出二阶 B-样条的时变系数为

$$N_2^2(\alpha) = h(1) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \quad (3.92)$$

$$N_1^2(\alpha) = h(2) = -\frac{1}{2}(1+\alpha)^2 + \frac{3}{2}\alpha^2 \quad (3.93)$$

$$N_0^2(\alpha) = h(3) = -\frac{1}{2}(1-\alpha)^2 \quad (3.94)$$

同样,可以推导出三阶 B-样条的时变系数为

$$N_3^3(\alpha) = h(1) = \frac{1}{6}\alpha^3 \quad (3.95)$$

$$N_2^3(\alpha) = h(2) = \frac{1}{6}(1+\alpha)^3 - \frac{2}{3}\alpha^3 \quad (3.96)$$

$$N_1^3(\alpha) = h(3) = \frac{1}{6}(2-\alpha)^3 - \frac{2}{3}(1-\alpha)^3 \quad (3.97)$$

$$N_0^3(\alpha) = h(4) = \frac{1}{6}(1-\alpha)^3 \quad (3.98)$$

高阶 B-样条表示为

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=-2}^2 y(n+i)N_{n-2+i}^4(\alpha) \quad (3.99)$$

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=-2}^3 y(n+i)N_{n-3+i}^5(\alpha) \quad (3.100)$$

$$y(n+\alpha) = \sum_{i=-3}^3 y(n+i)N_{n-3+i}^6(\alpha) \quad (3.101)$$

也可以推导出类似的系数集,图 3.26 说明了四阶和六阶 B-样条的插值情况。

一般来说,对于偶数阶,有

$$y(n + \alpha) = \sum_{i = -\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} N_{N/2+i}^N(\alpha) y(n + i) \quad (3.102)$$

对于奇数阶,有

$$y(n + \alpha) = \sum_{i = -\frac{N-1}{2}}^{\frac{N+1}{2}} N_{(N-1)/2+i}^N(\alpha) y(n + i) \quad (3.103)$$

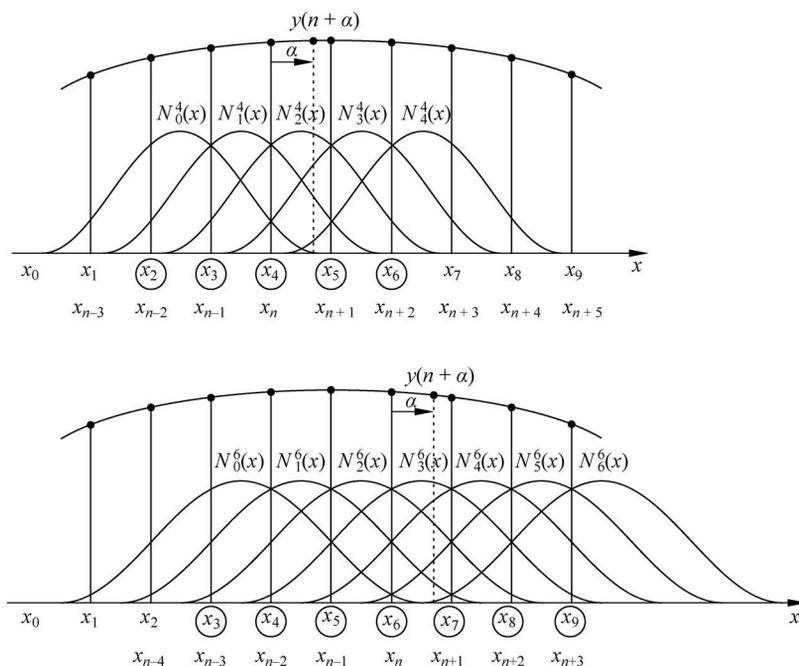


图 3.26 四阶和六阶 B-样条插值

讨论插值应用时,频域特性也是很重要的。

零阶 B-样条可表示为

$$N_0^0(x) = \sum_{i=0}^1 a_i \phi_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3.104)$$

其傅里叶变换是频域的 sinc 函数。

一阶 B-样条为

$$N_0^1(x) = 2 \sum_{i=0}^2 a_i \phi_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases} \quad (3.105)$$

其傅里叶变换是频域的  $\text{sinc}^2$  函数。

通过重复卷积可以得到高阶 B-样条如下:

$$N^N(x) = N^0(x) * N^{N-1}(x) \quad (3.106)$$

因此,其傅里叶变换为

$$\text{FT}[N^N(x)] = \text{sinc}^{N+1}(f) \quad (3.107)$$

利用频域性质,可以确定样条插值需要的阶数。由于  $\text{sinc}^{N+1}(f)$  函数的衰减特性和系数的简单实时计算,样条插值非常适合于多级采样率转换系统中最后阶段的时变转换。

## 3.5 习题

### 基础知识

考虑一个简单的采样率转换系统,其转换率为  $\frac{4}{3}$ 。该系统由两个上采样块和一个下采样块组成,每个上采样块因子为 2,下采样块因子为 3。

1. 什么是抗镜像和抗混叠滤波器? 在系统的什么地方需要它们?
2. 画出框图。
3. 画出输入、中间和输出频谱。
4. 幅度是如何受上采样和下采样影响的? 它从何而来?
5. 画出这个上采样系统所需的抗混叠和抗镜像滤波器的频率响应。

### 同步转换

系统现在将直接用因子 4 进行上采样,再用因子 3 进行下采样,但使用的是线性插值和抽取方法。

输入信号为  $x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ ,  $n=0,1,\dots,48$ 。

1. 两个插值滤波器的脉冲响应是什么? 画出它们的幅度响应。
2. 利用 MATLAB 在时域绘制输入信号、中间信号和输出信号。
3. 因果插值/抽取滤波器导致的延迟是什么?
4. 计算该插值/抽取方法在频域内引入的误差。

### 多相表示

使用插值/抽取滤波器的多相分解来扩展系统。

1. 用方框图表示多相分解的思想。这种分解有什么好处?
2. 计算用于上采样和下采样的多相滤波器(使用插值和抽取方法)。
3. 用 MATLAB 绘制时域和频域的所有信号。

### 异步转换

1. 异步采样率转换的基本概念是什么?
2. 绘制框图并讨论各部分操作。
3. 20 位分辨率的过采样系数  $L$  是多少?
4. 如何简化过采样操作?
5. 如何利用多相滤波?
6. 为什么半带滤波器是上采样操作的有效选择?
7. 在转换的最后阶段,哪些参数决定了插值算法?