

内容概要

一、随机事件之间的关系与运算

1. 随机事件的相关概念

(1) 随机试验 概率论中的随机试验满足 3 个条件:

①在相同条件下试验可重复进行; ②每次试验的结果不止一个; ③试验前不能确定哪一个结果会出现.

(2) 样本空间 随机试验的所有可能结果所组成的集合. 集合中的每一个元素称为样本点.

(3) 随机事件 样本空间的子集.

(4) 基本事件 一个样本点组成的单点集称为基本事件.

(5) 必然事件 Ω 每一次试验中一定发生的事件.

(6) 不可能事件 $\emptyset$ 每一次试验中一定不发生的事件.

2. 事件的关系及运算

(1) 包含关系 $A \subset B$, 表示 A 发生, 则 B 必发生.

(2) 和事件 $A+B$ 或 $A \cup B$, 表示 A, B 至少有一个发生.

(3) 积事件 AB 或 $A \cap B$, 表示 A, B 同时发生.

(4) 差事件 $A-B$, 表示 A 发生, 且 B 不发生.

(5) A, B 为互斥(互不相容)事件 表示 A, B 不同时发生, 即 $AB = \emptyset$.

(6) A 的对立事件 $\bar{A}$ 表示 A 不发生. 对立事件一定是互斥事件, 但互斥事件不一定是对立事件.

(7) 德摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

3. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则 A, B 相互独立.

注 (1) 若 A, B 相互独立, 则 $\bar{A}$ 与 B, A 与 $\bar{B}, \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

(2) 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 A, B 相互独立 $\Rightarrow A, B$ 相容; A, B 不相容 $\Rightarrow A, B$ 不相

互独立.

二、概率的性质

- (1) $P(\bar{A})=1-P(A)$; (2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;
 (3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

三、古典概型

古典概率 设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, (1) 若 n 为有限的正整数;
 (2) 每个基本事件的发生是等可能的, 则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{A \text{ 包含基本事件的个数}}{\Omega \text{ 包含基本事件的个数}}.$$

四、条件概率与全概率公式

1. 条件概率 设 A, B 是两个事件, $P(A)>0$, 称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率为条件概率.

2. 乘法公式

若 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$;

若 $P(B)>0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$;

若 $P(A_1)>0, P(A_1A_2)>0, \dots, P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为一完备事件组, 即 $B_iB_j=\emptyset, i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n$, 且 $\bigcup_{i=1}^n B_i=\Omega$, $P(B_i)>0$, 则对于任一事件 $A, P(A)>0$, 成立:

$$\text{全概率公式} \quad P(A)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i);$$

$$\text{贝叶斯公式} \quad P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}.$$

题型归纳与例题精解

题型 1-1 关于事件的关系及运算

【例 1】 在电炉上安装 4 个温控器, 各温控器显示温度的误差是随机的. 在使用过程中, 只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0 , 电炉就断电. 以 A 表示事件“电炉断电”, 设 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的由低到高的温度值, 则事件 A 等于().

$$A \quad \{T_{(1)} \geq t_0\} \quad B \quad \{T_{(2)} \geq t_0\} \quad C \quad \{T_{(3)} \geq t_0\} \quad D \quad \{T_{(4)} \geq t_0\}$$

解 选 C. 因为事件 A 是“电炉断电”, 而电炉断电的条件是只要有两个温控器显示的温

度不低于 t_0 , 即当 $T_{(3)} \geq t_0$ 时, 必有 $t_0 \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$. 所以选 C.

【例 2】 对于任意两事件 A 与 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是().

- A $A \subset B$ B $\bar{B} \subset \bar{A}$ C $A\bar{B} = \emptyset$ D $\bar{A}B = \emptyset$

解 选 D. 因 $A \cup B = B$ 等价于 $A \subset B$, 或 $\bar{B} \subset \bar{A}$, 或 $A\bar{B} = \emptyset$, 故不选 A, B, C; 取 $B = \Omega$, $A = \emptyset$, 有 $A \cup B = B$, 但 $\bar{A}B = \Omega$. 所以选 D.

题型 1-2 关于事件概率的性质

【例 3】 已知事件 A 及 B 的概率都是 $\frac{1}{2}$, 则下列结论一定正确的是().

- A $P(A \cup B) = 1$ B $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4}$
C $P(AB) = \frac{1}{4}$ D $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

解 因为事件 A 及 B 不一定互不相容, 即 $P(A \cup B)$ 并不一定等于 $P(A) + P(B) = 1$, 所以 A 错;

因为事件 A 及 B 不一定相互独立, $P(AB)$ 并不一定等于 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 且 $P(\bar{A}\bar{B})$ 并不一定等于 $P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 所以 B, C 错;

因为 $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$, 而 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 故有 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 故选 D.

【例 4】 设事件 A, B, C 同时发生必导致事件 D 发生, 则

$$P(A) + P(B) + P(C) \leq 2 + P(D).$$

证明 方法 1 由题设可知 $ABC \subset D$, 得 $P(ABC) \leq P(D)$.

$$\text{而 } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \leq 1,$$

(1)

$$P(AB \cup AC \cup BC) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - 2P(ABC) \leq 1.$$

(2)

(1)式+(2)式得 $P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC) \leq 2$, 从而有

$$P(A) + P(B) + P(C) \leq P(ABC) + 2 \leq 2 + P(D).$$

方法 2 由 $P(A \cup B) \leq 1$ 可得 $P(A) + P(B) \leq 1 + P(AB)$.

(3)

(3)式两边加 $P(C)$ 得

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) + P(C) &\leq 1 + P(AB) + P(C) \\ &= 1 + P(AB \cup C) + P(ABC) \\ &\leq 2 + P(ABC) \leq 2 + P(D). \end{aligned}$$

题型 1-3 古典概率的计算

【例 5】 从 $0, 1, \dots, 9$ 十个数字中每次任意读一个数字, 先后读 7 次, 假定各数字每次被读到的概率都是 $1/10$. 求下列事件的概率:

- (1) 读到的数字按先后次序组成一个指定的 7 位数;
- (2) 7 个数字全不相同;

(3) 7 个数字中不含 9 和 1;

(4) 数字 9 恰好出现两次.

解 将从 $0, 1, \dots, 9$ 的十个数字中先后读 7 个数字(可重复地读 7 个)看成一个试验, 则试验的样本空间中基本事件总数为 10^7 . 再记(1)~(4)的事件分别为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 则:

(1) A_1 是一个指定的 7 位数, 只含一个基本事件, 故 $P(A_1) = 1/10^7 = 10^{-7}$.

(2) A_2 包含的基本事件数是 P_{10}^7 , 故 $P(A_2) = P_{10}^7/10^7$.

(3) 这时只需在 $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 这 8 个数字中每次任意读一个数字, 先后读 7 次, 故 A_3 包含 8^7 个基本事件, 故 $P(A_3) = 8^7/10^7 = 0.8^7$.

(4) 9 可出现在 7 位数字的任意两位上, 有 C_7^2 种选择方法, 其余 5 位上可出现剩下的 9 个数字中的任意一个, 有 9^5 种选择方法, 所以 A_4 中含有 $C_7^2 9^5$ 个基本事件, 故 $P(A_4) = C_7^2 9^5/10^7$.

【例 6】 50 只铆钉被随机地取来用在 10 个部件上, 其中有 3 只铆钉强度太弱. 假设每个部件用 3 只铆钉, 若将 3 只强度太弱的铆钉用在一部件上, 则该部件强度太弱. 求发生一个部件强度太弱的概率.

解 将部件从 1~10 编号, 并以 A_i 表示事件“第 i 个部件强度太弱”. 依题意, 仅当 3 只强度太弱的铆钉装在第 i 个部件上时, A_i 才会发生. 由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第 i 个部件上共有 C_{50}^3 种方法; 强度太弱的铆钉仅有 3 只, 都装在第 i 个部件上只有 1 种, 所以

$$P(A_i) = \frac{1}{C_{50}^3} = \frac{1}{19600} \quad (i = 1, 2, \dots, 10),$$

且知 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 两两互斥, 因此, 10 个部件中有一个强度太弱的概率为

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i) = \frac{10}{19600} = \frac{1}{1960}.$$

题型 1-4 乘法公式和条件概率的应用

【例 7】 小王忘记了朋友家电话号码的最后一位数, 他只能随意拨最后一个号, 共拨了三次. 求第三次才拨通的概率.

解 设事件 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次拨通}\} (i = 1, 2, 3)$.

由乘法公式可得第三次才拨通的概率

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}.$$

注 “第三次才拨通”, 意味着前两次没拨通的同时, 第三次拨通了; 而不是已知前两次都未拨通的条件下, 第三次拨通.

【例 8】 某冰箱厂甲、乙两条生产线分别生产了 520 台和 480 台冰箱, 它们的次品率分别为 0.005 和 0.007. 现从这 1000 台冰箱中任抽一台, 求抽到的冰箱是甲生产线生产的且为正品的概率.

解 设 $A = \{\text{甲生产线生产}\}, B = \{\text{正品}\}$, 则由题意得

$$P(A) = 520/1000 = 0.52, \quad P(B | A) = 1 - 0.005 = 0.995.$$

根据乘法公式有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.52 \times 0.995 = 0.5174.$$

题型 1-5 利用全概率公式与贝叶斯公式的计算问题

【例 9】 设盒中 9 个乒乓球, 其中有 6 个新的, 3 个旧的, 第一次比赛时任取两个, 用完放回盒中; 第二次比赛时从中任取一个, 用完放回盒中. 求第二次取到的是新球的概率.

解 设事件 $A_i = \{\text{第一次取到的是 } i \text{ 个新球}\} (i=0, 1, 2)$, $B = \{\text{第二次取到的是新球}\}$. 显然, A_0, A_1, A_2 为样本空间的一个划分, 则

$$P(A_0) = \frac{C_3^2}{C_9^2}, \quad P(A_1) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_9^2}, \quad P(A_2) = \frac{C_6^2}{C_9^2},$$

$$P(B|A_0) = \frac{C_6^1}{C_9^1}, \quad P(B|A_1) = \frac{C_5^1}{C_9^1}, \quad P(B|A_2) = \frac{C_4^1}{C_9^1},$$

故所求的概率为

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{C_3^2}{C_9^2} \cdot \frac{C_6^1}{C_9^1} + \frac{C_3^1 C_6^1}{C_9^2} \cdot \frac{C_5^1}{C_9^1} + \frac{C_6^2}{C_9^2} \cdot \frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{14}{27}.$$

【例 10】 设某地区成年居民中肥胖者占 10%, 不胖不瘦者占 82%, 瘦者占 8%. 又知肥胖者患高血压病的概率为 20%, 不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%, 瘦者患高血压病的概率为 5%. 若在该地区任选一人, 发现此人患高血压病, 则他属于肥胖者的概率有多大?

解 设 A_i 分别表示居民为肥胖者、不胖不瘦者、瘦者 ($i=1, 2, 3$), $B = \{\text{居民患高血压病}\}$, 则 $P(A_1) = 0.1, P(A_2) = 0.82, P(A_3) = 0.08$,

$$P(B|A_1) = 0.2, \quad P(B|A_2) = 0.1, \quad P(B|A_3) = 0.05.$$

由全概率公式, 有
$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = 0.106,$$

由贝叶斯公式, 有
$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.02}{0.106} \approx 0.189.$$

【例 11】 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一地区的报名表, 从中先后抽取两份. (1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p ; (2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率 q .

解 设 $H_i = \{\text{报名表是第 } i \text{ 个地区考生的}\} (i=1, 2, 3)$, $A_j = \{\text{第 } j \text{ 次抽到的报名表是男生的}\} (j=1, 2)$. 则

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(A_1|H_1) = \frac{7}{10}, \quad P(A_1|H_2) = \frac{8}{15}, \quad P(A_1|H_3) = \frac{20}{25}.$$

$$(1) \quad p = P(\bar{A}_1) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(\bar{A}_1|H_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25} \right) = \frac{29}{90}.$$

$$(2) \quad \text{由 } P(A_1|H_1) = \frac{7}{10}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned}
 P(A_2 | H_1) &= \frac{P(A_2 H_1)}{P(H_1)} = \frac{P(A_1 A_2 H_1) + P(\bar{A}_1 A_2 H_1)}{P(H_1)} \\
 &= \frac{P(A_2 | A_1 H_1)P(A_1 H_1) + P(A_2 | \bar{A}_1 H_1)P(\bar{A}_1 H_1)}{P(H_1)} \\
 &= \frac{P(A_2 | A_1 H_1)P(A_1 | H_1)P(H_1) + P(A_2 | \bar{A}_1 H_1)P(\bar{A}_1 | H_1)P(H_1)}{P(H_1)} \\
 &= P(A_1 | H_1)P(A_2 | A_1 H_1) + P(\bar{A}_1 | H_1)P(A_2 | \bar{A}_1 H_1) \\
 &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{10}.
 \end{aligned}$$

类似地有 $P(A_2 | H_2) = \frac{8}{15}$, $P(A_2 | H_3) = \frac{20}{25}$,

$$P(\bar{A}_1 A_2 | H_1) = \frac{7}{30}, \quad P(\bar{A}_1 A_2 | H_2) = \frac{8}{30}, \quad P(\bar{A}_1 A_2 | H_3) = \frac{5}{30}.$$

于是再由全概率公式有

$$P(A_2) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A_2 | H_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25} \right) = \frac{61}{90},$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(\bar{A}_1 A_2 | H_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{30} + \frac{8}{30} + \frac{5}{30} \right) = \frac{2}{9}.$$

因此

$$q = P(\bar{A}_1 | A_2) = P(\bar{A}_1 A_2) / P(A_2) = \frac{2}{9} / \frac{61}{90} = \frac{20}{61}.$$

【例 12】 袋中有 6 张相同的卡片,上面分别标有数 0,1,2,3,4,5. 先后从袋中任意摸出两张卡片,已知其上数字之和大于 6,试判断先摸出的一张卡片上的数字最可能是几?

解 设事件 $A = \{\text{两张卡片上的两数之和大于 } 6\}$, $B_i = \{\text{先摸出的卡片上的数字为 } i\}$ ($i=0,1,2,3,4,5$). 依题意可知

$$P(B_i) = \frac{1}{6} \quad (i=0,1,2,3,4,5), \quad P(A | B_0) = P(A | B_1) = 0,$$

$$P(A | B_2) = \frac{1}{5}, \quad P(A | B_3) = P(A | B_4) = \frac{2}{5}, \quad P(A | B_5) = \frac{3}{5}.$$

由全概率公式,得

$$P(A) = \sum_{i=0}^5 P(B_i)P(A | B_i) = \frac{1}{6} \times \frac{1+2+2+3}{5} = \frac{4}{15}.$$

又由贝叶斯公式,得

$$P(B_5 | A) = \frac{P(B_5)P(A | B_5)}{P(A)} = \frac{3}{8}, \quad P(B_4 | A) = P(B_3 | A) = \frac{2}{8},$$

$$P(B_2 | A) = \frac{1}{8}, \quad P(B_1 | A) = P(B_0 | A) = 0.$$

因为 $P(B_5 | A) > P(B_k | A)$ ($k=0,1,2,3,4$), 所以先摸出的卡片上的数字最可能是 5.

题型 1-6 关于事件的独立性的判断与应用

【例 13】 设 A, B, C 是三个相互独立的随机事件, 且 $0 < P(C) < 1$, 则在下列给定的四对事件中不相互独立的是().

- A $\overline{A+B}$ 与 C B $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ C $\overline{A-B}$ 与 C D $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

解 选 B. 因为 A, B, C 是三个相互独立的随机事件, 所以

$$P((\overline{A+B})C) = P(\overline{ABC}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) = P(\overline{A+B})P(C),$$

即 $\overline{A+B}$ 与 C 相互独立.

同样可证 $\overline{A-B}$ 与 C 相互独立; $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立.

因为 $\overline{C} \subset \overline{AC}$, 所以 $P((\overline{AC})\overline{C}) = P(\overline{C})$, 又已知 $0 < P(C) < 1$, 得 $0 < P(AC) \leq P(C) < 1$, 即 $0 < P(\overline{AC}) < 1$.

所以 $P((\overline{AC})\overline{C}) = P(\overline{C}) \neq P(\overline{AC})P(\overline{C})$, 即 $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 不相互独立. 故选 B.

【例 14】 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\overline{A})$, 则下列结论一定成立的是().

- A $P(A|B) = P(\overline{A}|B)$ B $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$
C $P(AB) = P(A)P(B)$ D $P(AB) \neq P(A)P(B)$

解 据题设, 有 $P(B|A) = P(B|\overline{A})$, 即 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$, 从而

$$P(A)P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(AB) = [1 - P(A)]P(AB) = P(AB) - P(A)P(AB),$$

即 $P(AB) = P(A)P(\overline{A}B) + P(A)P(AB)$

$$= P(A)[P(\overline{A}B) + P(AB)] = P(A)P(B),$$

所以 C 成立, 即 A 与 B 相互独立, D 不成立.

进一步, 由 C 成立, 有 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$,

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A})P(B)}{P(B)} = P(\overline{A}).$$

如果 $P(A) = P(\overline{A})$, 则 A 成立, 否则 B 成立, 所以 A, B 不一定成立.

故选 C.

【例 15】 设三事件 A, B, C 两两相互独立, $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$, $P(A \cup B \cup C) = 9/16$, 则 $P(A) =$ _____.

解 根据题意, 有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= 3P(A) - 3P^2(A) + 0 = \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

故 $P^2(A) - P(A) + \frac{3}{16} = 0$. 解方程, 得 $P(A) = 1/4$ 或 $3/4$. 再由 $P(A) < 1/2$, 知 $P(A) = 1/4$.

测试题及其答案

一、填空题

1. 设有事件运算式 $(AB) \cup (A\bar{B})(\bar{A}B)(\bar{A}\bar{B})$, 则化简式为_____.
2. 设 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$, 如果 A 与 B 互不相容, 则 $P(B\bar{A}) =$ _____.
3. 设 $P(B) = 0.7, P(\bar{A}B) = 0.3$, 则 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$ _____.
4. 将两封信随机地投入 4 个邮筒中, 则未向前面两个邮筒投信的概率为_____.
5. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, 且 A, B, C 相互独立, 则 A, B, C 至少有一个出现的概率为_____.

二、单项选择题

6. 设 $AB \subset C$, 则().
 A $\bar{A}\bar{B} \supset \bar{C}$ B $A \subset C$ 且 $B \subset C$ C $\bar{A} \cup \bar{B} \supset \bar{C}$ D $A \subset C$ 或 $B \subset C$
7. 设 A, B 为随机事件, $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有().
 A $P(A \cup B) = P(A)$ B $A \subset B$
 C $P(A) = P(B)$ D $P(AB) = P(A)$
8. 将一枚硬币独立地掷两次: $A_1 = \{\text{掷第一次出现正面}\}, A_2 = \{\text{掷第二次出现正面}\}, A_3 = \{\text{正、反面各出现一次}\}, A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$, 则事件().
 A A_1, A_2, A_3 相互独立 B A_2, A_3, A_4 相互独立
 C A_1, A_2, A_3 两两独立 D A_2, A_3, A_4 两两独立
9. 设 $P(A) = a, P(B) = b, P(A \cup B) = c$, 则 $P(A\bar{B})$ 为().
 A $a(1-b)$ B $a(1-c)$ C $c-b$ D $a-b$
10. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则 A 与 B ().
 A 互斥 B 对立 C 不独立 D 独立

三、计算题及应用题

11. 袋中共有 5 个球, 其中 3 个新球, 2 个旧球, 每次取一个, 无放回地取 2 次, 则第二次取到新球的概率是多少?
12. 一批产品共有 100 件, 对其抽样调查, 整批产品不合格的条件是: 在被检查的 4 件中至少有一件是废品. 如果该批产品中有 5% 是废品, 问: 该批产品因不合格被拒收的概率是多少?
13. 设一批产品中一、二、三等品各占 60%, 30%, 10%, 从中随意取出一件, 结果不是三等品, 求取到的是一等品的概率.
14. 四个人独立地猜一个谜语, 他们能够猜出的概率为 $\frac{1}{4}$, 求谜语被猜出的概率.

15. 某校射击队共有 20 名射手,其中一级射手 4 人,二级射手 8 人,三级射手 7 人,四级射手 1 人,一、二、三、四级射手能通过预选赛进入正式比赛的概率分别为 0.9、0.7、0.5、0.2.
(1)求任选一名射手能进入正式比赛的概率.(2)已知抽到的选手能参加正式比赛,问抽到一级选手的概率.

16. 电路由电池 A 与 2 个并联电池 B 及 C 串联而成,设电池 A, B, C 损坏的概率分别是 0.3, 0.2, 0.2, 求电路发生断路的概率.

17. 已知随机事件 A, B, C 满足 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.5$, 且 A, B 独立, A, C 互不相容, 求概率 $P(A-C|(AB \cup C))$.

四、证明题

18. 设 A, B, C 三事件相互独立, 证明: $A+B$ 与 C 相互独立.

答案

一、1. $\emptyset$; 2. $\frac{1}{2}$; 3. 0.6; 4. $\frac{1}{4}$; 5. $\frac{19}{27}$.

二、6. C; 7. A; 8. C; 9. C; 10. D.

三、11. 解 设 A 表示“第一次取到新球”, B 表示“第二次取到新球”, 则所求事件的概率为

$$P(B) = P(AB + \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} + \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{5}.$$

12. 解 设 A_i 表示“被检查的第 i 件产品是正品” ($i=1, 2, 3, 4$), A 表示“该批产品被接收”, 则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) P(A_4 | A_1 A_2 A_3) \\ &= \frac{95}{100} \times \frac{94}{99} \times \frac{93}{98} \times \frac{92}{97} \approx 0.812, \end{aligned}$$

于是, 该批产品被拒收的概率为 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.812 = 0.188$.

13. 解 设 A_i 表示“取到的产品是 i 等品” ($i=1, 2, 3$), 显然 A_1, A_2, A_3 互不相容, 则所求的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 | (A_1 + A_2)) &= \frac{P(A_1(A_1 + A_2))}{P(A_1 + A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 + A_2)} \\ &= \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)} = \frac{0.6}{0.6 + 0.3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

14. 解 设 A_i 表示“第 i 人猜出谜语” ($i=1, 2, 3, 4$), 则谜语被猜出的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) &= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) P(\bar{A}_4) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{175}{256}. \end{aligned}$$

15. 解 设 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 级选手被选中}\} (k=1, 2, 3, 4), B = \{\text{任选一名射手能通过预选赛进入正式比赛}\}$, 则

$$P(A_1) = \frac{4}{20}, \quad P(A_2) = \frac{8}{20}, \quad P(A_3) = \frac{7}{20}, \quad P(A_4) = \frac{1}{20},$$

$$P(B | A_1) = 0.9, \quad P(B | A_2) = 0.7, \quad P(B | A_3) = 0.5, \quad P(B | A_4) = 0.2.$$

由全概率公式,有

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^4 P(A_k)(B | A_k) \\ &= \frac{4}{20} \times 0.9 + \frac{8}{20} \times 0.7 + \frac{7}{20} \times 0.5 + \frac{1}{20} \times 0.2 = 0.645. \end{aligned}$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{20} \times 0.9}{0.645} = 0.279.$$

16. 解 用事件 A, B, C 分别表示电池 A, B, C 损坏,则题目所求概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup BC) &= P(A) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(A) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.3 + 0.2 \times 0.2 - 0.3 \times 0.2 \times 0.2 \\ &= 0.34 - 0.012 = 0.328. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \text{ 解 } P(A - C | (AB \cup C)) &= \frac{P(A\bar{C} \cap (AB \cup C))}{P(AB \cup C)} = \frac{P(AB\bar{C})}{P(AB \cup C)} \\ &= \frac{P(AB) - P(ABC)}{P(AB) + P(C) - P(ABC)} = \frac{0.4 \times 0.5 - 0}{0.4 \times 0.5 + 0.5 - 0} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

四、18. 证明 由于 A, B, C 相互独立,从而 A, B, C 两两独立,则

$$\begin{aligned} P((A+B)C) &= P(AC+BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) = P(A+B)P(C), \end{aligned}$$

从而 $A+B$ 与 C 独立.

课后习题解答

习题 1-1

基础题

1. 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 掷两颗骰子,观察出现的点数;
- (2) 连续抛一枚硬币,直至出现正面为止,正面用“1”表示,反面用“0”表示;
- (3) 一超市在正常营业的情况下,某一天内接待顾客的人数;
- (4) 某城市一天内的用电量.

解 (1) $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$;

(2) $\Omega = \{(1), (0,1), (0,0,1), (0,0,0,1), \dots\}$;

(3) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$;

(4) $\Omega = \{t | t \geq 0\}$.