

# 第3章

## 离散傅里叶变换(DFT)

离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)是数字信号处理课程两大知识点之一。本章首先介绍周期序列的离散傅里叶级数,从离散傅里叶级数引出离散傅里叶变换,随后介绍离散傅里叶变换的性质。本章还将介绍用于分析窄带信号的线性调频 $z$ 变换(Chirp  $z$ -Transform, CZT)算法,以及时域采样定理的对偶定理——频域采样定理。

### 3.1 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)



200多年前,法国科学家傅里叶(Fourier)在研究热传导方程时提出“任何周期函数都可以表示成正弦函数和余弦函数之和的形式”,这即为傅里叶级数的雏形。傅里叶当时并没有严格证明该结论成立的条件,后面经过柯西(Cauchy)、泊松(Poisson),尤其是狄利克雷(Dirichlet)和黎曼(Riemann)等人的努力,才逐渐给出了傅里叶级数收敛的严格证明,从而开创了数学物理学\*的新时代。

对于级数的概念我们并不陌生,在高等数学中已经学习过幂级数、泰勒级数和麦克劳林级数等。本章将从离散傅里叶级数(Discrete Fourier Series, DFS)出发,引出离散傅里叶变换的概念。

#### 3.1.1 离散傅里叶级数的定义

在“信号与系统”课程中已经学习过周期信号的傅里叶级数,即连续时间傅里叶级数(Continuous Time Fourier Series, CTFS),在此简要回顾。如果周期信号 $x(t)$ 满足狄利克雷条件,那么该周期信号就能分解为三角形式的傅里叶级数,即

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_0 t + b_k \sin k\Omega_0 t) \quad (3.1.1)$$

其中, $k=1,2,3,\dots,\Omega_0=2\pi/T$ 表示基波频率,简称基频; $T$ 为信号周期; $a_0, a_k, b_k$ 分别表示信号 $x(t)$ 的直流分量、余弦分量和正弦分量的幅度,可由三角函数信号集的正交性计算:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (3.1.2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\Omega_0 t dt \quad (3.1.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\Omega_0 t dt \quad (3.1.4)$$

其中, $(t_0, t_0+T)$ 表示时长为 $T$ 的任意区间。

图3.1.1给出了周期矩形信号的CTFS示意图。从时域的视角来观察,周期矩形信号是由无穷多余弦信号叠加而成的;从频域的视角来观察,周期信号映射成了无穷多的线段,这些线段的位置表示余弦信号的频率,线段的长度表示余弦信号的幅度。

\* 注:数学物理学是以研究物理问题为目标的数学理论和数学方法。



教学视频



动图

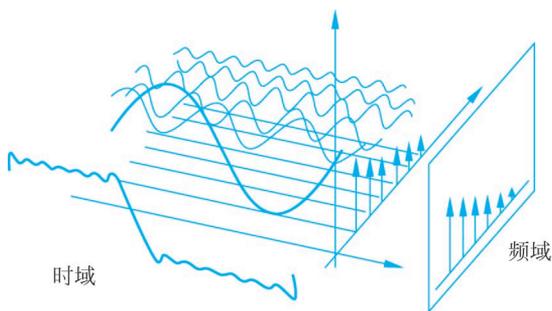


图 3.1.1 从时域和频域同时观察信号(CTFS)

根据欧拉公式,也可以将  $x(t)$  分解为指数形式的傅里叶级数,即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.1.5)$$

其中  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $X_k$  表示傅里叶复系数,

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.1.6)$$

设  $\tilde{x}(n)$  表示周期为  $N$  的周期序列,即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN) \quad (3.1.7)$$

其中,  $r$  为任意整数,周期  $N$  为使等式成立的最小正整数。

也可以将周期序列  $\tilde{x}(n)$  表示为离散傅里叶级数的形式,即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\omega_0 kn} \quad (3.1.8)$$

其中,  $\omega_0 = 2\pi/N$  表示基频,  $\tilde{X}(k)$  表示第  $k$  次谐波的系数。

为便于学习和比较,表 3.1 将连续时间周期信号和离散时间周期信号的傅里叶级数进行了归纳。

表 3.1 CTFS 和 DTFS

连续/离散时间 傅里叶级数	周期	基频	基频序 列/信号	$k$ 次 谐波	备注
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$	$T$	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$e^{j\Omega_0 t}$	$e^{jk\Omega_0 t}$	无穷多个谐波分量
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\omega_0 kn}$	$N$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{j\omega_0 n}$	$e^{jk\omega_0 n}$	$N$ 个独立谐波分量

接下来计算  $k$  次谐波的系数  $\tilde{X}(k)$ ,这需要用下面的关系式

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } r \end{cases} \quad (3.1.9)$$

将式(3.1.8)两端同时乘以  $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$  后在  $n=0$  到  $n=N-1$  的周期内求和,代入式(3.1.9)的结论可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \\
&= \tilde{X}(r)
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

将变量  $r$  替换为  $k$ , 可得  $k$  次谐波的系数  $\tilde{X}(k)$  的计算公式如下:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{3.1.11}$$

式(3.1.11)表示时域到频域的变换,称为离散傅里叶级数的正变换,用  $\text{DFS}[\cdot]$  表示;式(3.1.8)表示频域到时域的变换,称为离散傅里叶级数的反变换,用  $\text{IDFS}[\cdot]$  表示。DFS 和 IDFS 的关系如下:

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.12}$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.13}$$

$\tilde{X}(k)$  也是一个以  $N$  为周期的周期序列,即

$$\tilde{X}(k+rN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k) \tag{3.1.14}$$

因为  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{X}(k)$  都是离散周期序列,只需要  $N$  个样本即可代表  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{X}(k)$  的形状,其余部分均是这  $N$  个样本的重复出现,故只需要研究它们一个完整周期的样本值即可。

### 3.1.2 离散傅里叶级数的性质

DFS 的性质与 CTFT、DTFT 的性质有许多相似之处,可以对照参考,但最大的不同点在于:DFS 的时域序列  $\tilde{x}(n)$  和频域序列  $\tilde{X}(k)$  都是周期的,在 DFS 性质的证明和使用中要格外注意其周期特性,故 DFS 的性质中加以“周期”二字来强调,如“周期移位”“周期卷积”。

#### 1. 线性

$$\text{DFS}[a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)] = a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k) \tag{3.1.15}$$

其中,  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{y}(n)$  都是周期为  $N$  的周期序列,它们各自的 DFS 分别为  $\tilde{X}(k)$  和  $\tilde{Y}(k)$ ,  $a$  和  $b$  为任意常数。

#### 2. 周期时频翻转

$$\text{DFS}[\tilde{x}(-n)] = \tilde{X}(-k) \tag{3.1.16}$$

证明:

$$\text{DFS}[\tilde{x}(-n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{-(N-1)} \tilde{x}(m) e^{j\frac{2\pi}{N}km}$$

因为  $\tilde{x}(m)$  与  $e^{j\frac{2\pi}{N}km}$  都是以  $N$  为周期的, 即

$$\sum_{m=0}^{-(N-1)} \tilde{x}(m) e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \tilde{X}(-k)$$

因此

$$\text{DFS}[\tilde{x}(-n)] = \tilde{X}(-k)$$

### 3. 周期时移特性

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = e^{j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}(k) \quad (3.1.17)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} \end{aligned}$$

因为  $\tilde{x}(i)$  与  $e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}$  都是以  $N$  为周期的, 即

$$\sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} = \tilde{X}(k)$$

因此

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = e^{j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}(k)$$

### 4. 周期频移特性

$$\text{DFS}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+r) \quad (3.1.18)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFS}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} \tilde{x}(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+r)n} \\ &= \tilde{X}(k+r) \end{aligned}$$

### 5. 对偶性

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k) \quad (3.1.19)$$

证明: 根据 IDFS 变换公式可得

$$N\tilde{x}(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

上式等号右边与 DFS 变换公式相同, 故将变量  $n$  和  $k$  互换,

$$N\tilde{x}(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

把上式与 DFS 变换关系结合起来对照,可以看出周期序列  $\tilde{X}(n)$  的  $k$  次谐波系数为  $N\tilde{x}(-k)$ ,也就是说  $\tilde{X}(n)$  和  $N\tilde{x}(-k)$  为 DFS 变换关系对,即  $\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k)$ 。

### 6. 周期共轭对称特性

$$\text{DFS}[\tilde{x}^*(n)] = \tilde{X}^*(-k) \quad (3.1.20)$$

**证明:** 对于复序列  $\tilde{x}(n)$ , 其共轭序列  $\tilde{x}^*(n)$  的 DFS 为

$$\text{DFS}[\tilde{x}^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]^* = \tilde{X}^*(-k)$$

同理可以证明

$$\text{DFS}[\tilde{x}^*(-n)] = \tilde{X}^*(k)$$

进一步可证

$$\text{DFS}[\text{Re}(\tilde{x}(n))] = \text{DFS}\left[\frac{1}{2}(\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(n))\right] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)] = \tilde{X}_e(k)$$

其中,把  $\tilde{X}_e(k)$  称为  $\tilde{X}(k)$  的共轭偶对称分量(下标 e 表示 even)。

同理可证

$$\text{DFS}[\text{Im}(\tilde{x}(n))] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)] = \tilde{X}_o(k)$$

其中,把  $\tilde{X}_o(k)$  称为  $\tilde{X}(k)$  的共轭奇对称分量(下标 o 表示 odd)。

式(3.1.21)归纳了周期序列  $\tilde{x}(n)$  的实(虚)部与其 DFS 系数共轭偶(奇)对称分量的对偶关系。

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \text{Re}[\tilde{x}(n)] + j\text{Im}[\tilde{x}(n)] \\ \downarrow & \quad \quad \downarrow & \quad \quad \downarrow \\ \tilde{X}(k) &= \tilde{X}_e(k) + \tilde{X}_o(k) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

式(3.1.22)归纳了周期序列  $\tilde{x}(n)$  的共轭偶(奇)对称分量与其 DFS 系数实(虚)部的对偶关系。

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n) \\ \downarrow & \quad \quad \downarrow & \quad \quad \downarrow \\ \tilde{X}(k) &= \text{Re}[\tilde{X}(k)] + j\text{Im}[\tilde{X}(k)] \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

其中,  $\tilde{x}(n)$  的共轭偶对称分量为  $\tilde{x}_e(n)$ , 共轭奇对称分量为  $\tilde{x}_o(n)$ , 定义如下:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_e(n) &= \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] \\ \tilde{x}_o(n) &= \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] \end{aligned}$$

### 7. 时域周期卷积定理

若  $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$ , 则

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \quad (3.1.23)$$

证明:

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

代入  $\tilde{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$  可得

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}_2(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{X}_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \end{aligned}$$

上式为两个周期序列的卷积,故卷积结果也为周期的,且求和只在一个周期上进行( $m=0$ 到 $m=N-1$ ),故把这种卷积称为周期卷积,这与非周期序列的线性卷积不同。

### 8. 频域周期卷积定理

若  $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$ , 则

$$\tilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}_1(r) \tilde{X}_2(k-r) \quad (3.1.24)$$

**例 3.1** 试计算周期序列  $x(n) = 4\cos(2.4\pi n) + 2\sin(3.2\pi n)$  的 DFS, 并画出一个周期内的幅度谱和相位谱。

解: 设余弦序列  $\cos(2.4\pi n)$  的周期为  $N_1$ , 则

$$\cos[2.4\pi(n + N_1)] = \cos(2.4\pi n) = \cos(2.4\pi n + 2m\pi)$$

可得

$$N_1 = \frac{2\pi}{2.4\pi} m = \frac{5}{6} m$$

取  $m=6$  可使  $\frac{5}{6}m$  成为最小正整数, 故余弦序列的周期  $N_1=5$ 。

同理可得, 正弦序列  $\sin(3.2\pi n)$  的周期  $N_2=5$ , 取  $N_1$  和  $N_2$  的最小公倍数, 可知整个序列  $x(n)$  的周期  $N=5$ , 基波频率  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = 0.4\pi$ 。

解法一: 根据定义来计算 DFS。

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^4 [4\cos(2.4\pi n) + 2\sin(3.2\pi n)] e^{-j0.4\pi kn} \\ &= \sum_{n=0}^4 [4\cos(0.4\pi n) - 2\sin(0.8\pi n)] e^{-j0.4\pi kn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^4 \left[ 4 \frac{1}{2} (e^{j0.4\pi n} + e^{-j0.4\pi n}) - 2 \frac{1}{2j} (e^{j0.8\pi n} - e^{-j0.8\pi n}) \right] e^{-j0.4\pi kn} \\
&= 2 \sum_{n=0}^4 e^{j0.4\pi n(1-k)} + 2 \sum_{n=0}^4 e^{-j0.4\pi n(1+k)} + j \sum_{n=0}^4 e^{j0.4\pi n(2-k)} - j \sum_{n=0}^4 e^{-j0.4\pi n(2+k)}
\end{aligned}$$

根据等比数列求和公式\*

$$2 \sum_{n=0}^4 e^{j0.4\pi n(1-k)} = \begin{cases} 2 \times 5 = 10, & k = 1 \\ \frac{1 - e^{j2\pi(1-k)}}{1 - e^{j0.4\pi(1-k)}} = \frac{1-1}{1 - e^{j0.4\pi(1-k)}} = 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
2 \sum_{n=0}^4 e^{-j0.4\pi n(1+k)} &= \begin{cases} 10, & k = 4 \\ 0, & k \neq 4 \end{cases} \\
j \sum_{n=0}^4 e^{j0.4\pi n(2-k)} &= \begin{cases} 5j, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases} \\
-j \sum_{n=0}^4 e^{-j0.4\pi n(2+k)} &= \begin{cases} -5j, & k = 3 \\ 0, & k \neq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

因此,  $\tilde{X}(0) = 0, \tilde{X}(1) = 10, \tilde{X}(2) = 5j, \tilde{X}(3) = -5j, \tilde{X}(4) = 10$ 。

解法二: 根据 IDFS 表达式来计算 DFS。

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\omega_0 kn}$$

$$= 0.2\tilde{X}(0) + 0.2\tilde{X}(1)e^{j0.4\pi n} + 0.2\tilde{X}(2)e^{j0.8\pi n} + 0.2\tilde{X}(3)e^{j1.2\pi n} + 0.2\tilde{X}(4)e^{j1.6\pi n}$$

根据欧拉公式, 序列  $x(n)$  可以展开为

$$\begin{aligned}
x(n) &= 4 \left[ \frac{1}{2} (e^{j2.4\pi n} + e^{-j2.4\pi n}) \right] + 2 \left[ \frac{1}{2j} (e^{j3.2\pi n} - e^{-j3.2\pi n}) \right] \\
&= 2e^{j2.4\pi n} + 2e^{-j2.4\pi n} - je^{j3.2\pi n} + je^{-j3.2\pi n}
\end{aligned}$$

根据周期关系, 如  $e^{j2.4\pi n} = e^{j(2.4\pi n - 2\pi n)} = e^{j0.4\pi n}$ , 可将上式改写如下:

$$\begin{aligned}
x(n) &= 2e^{j0.4\pi n} + 2e^{j1.6\pi n} - je^{j1.2\pi n} + je^{j0.8\pi n} \\
&= 2e^{j0.4\pi n} + je^{j0.8\pi n} - je^{j1.2\pi n} + 2e^{j1.6\pi n}
\end{aligned}$$

将上式与 DFS 表达式逐项对比可知

$$\begin{cases} 0.2\tilde{X}(0) = 0 \\ 0.2\tilde{X}(1) = 2 \\ 0.2\tilde{X}(2) = j \\ 0.2\tilde{X}(3) = -j \\ 0.2\tilde{X}(4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{X}(0) = 0 \\ \tilde{X}(1) = 10 \\ \tilde{X}(2) = 5j \\ \tilde{X}(3) = -5j \\ \tilde{X}(4) = 10 \end{cases}$$

\* 注: 等比数列前  $N$  项求和结果为  $\sum_{n=0}^{N-1} aq^n = \frac{a(1-q^N)}{1-q}, q \neq 1$ 。

图 3.1.2 给出了周期序列 DFS 在一个周期内的幅度谱和相位谱。

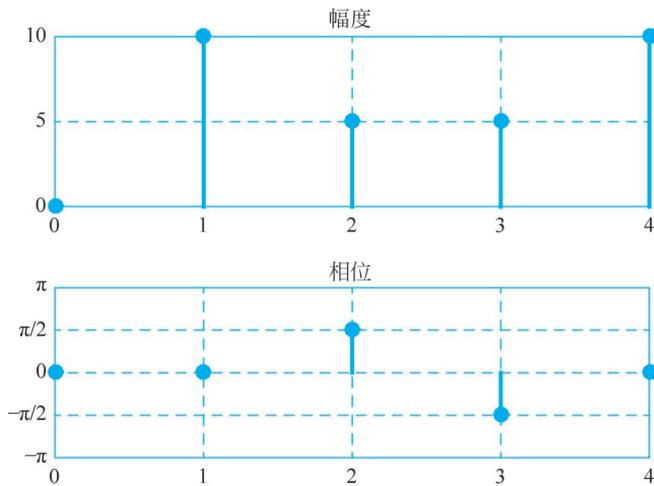


图 3.1.2 周期序列 DFS 的幅度谱和相位谱(一个周期内)

为便于学习,表 3.2 归纳了离散傅里叶级数的性质。

表 3.2 离散傅里叶级数的性质

周期序列(周期 $N$ )	DFS 系数(周期 $N$ )	备注
$a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)$	$a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k)$	线性
$\tilde{x}(-n)$	$\tilde{X}(-k)$	周期时频翻转
$\tilde{x}(n+m)$	$e^{j\frac{2\pi}{N}km}\tilde{X}(k)$	周期时移特性
$e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k+r)$	周期频移特性
$\tilde{X}(n)$	$N\tilde{x}(-k)$	对偶性
$\tilde{x}^*(n)$	$\tilde{X}^*(-k)$	周期共轭对称特性
$\tilde{x}^*(-n)$	$\tilde{X}^*(k)$	
$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$	$\text{Re}[\tilde{X}(k)]$	
$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]$	$j\text{Im}[\tilde{X}(k)]$	
$\text{Re}[\tilde{x}(n)]$	$\tilde{X}_e(k) = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)]$	
$j\text{Im}[\tilde{x}(n)]$	$\tilde{X}_o(k) = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)]$	
$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$	$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$	时域周期卷积定理
$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}_1(r)\tilde{X}_2(k-r)$	频域周期卷积定理

## 3.2 有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)



## 3.2.1 离散傅里叶变换的定义

3.1节学习了用离散傅里叶级数表示周期序列的方法,该方法同样适用于有限长序列。对于一个长度为 $N$ 的有限长序列 $x(n)$ ,可以把它看作周期为 $N$ 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期,即

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (3.2.1)$$

如果引入矩形序列 $R_N(n)$ ,式(3.2.1)还可以写为

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3.2.2)$$

也可以把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的周期延拓,即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+kN) \quad (3.2.3)$$

为方便起见,把第一个周期( $n=0 \sim n=N-1$ )称为 $\tilde{x}(n)$ 的“主值区间”,或者称 $x(n)$ 为 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”,即主值区间上的序列。

此时引入符号 $((n))_N$ 表示 $n$ 对 $N$ 求余数,令 $n=n_1+n_2N$ ,其中 $0 \leq n_1 \leq N-1$ ,则 $n_1$ 为 $n$ 对 $N$ 的余数,记作 $n_1 = ((n))_N$ 。这样,式(3.2.3)又可以写为

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (3.2.4)$$

同理,有限长序列 $X(k)$ 也可以看作周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,即

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3.2.5)$$

从式(3.1.12)和式(3.1.13)可以看出,DFS和IDFS的求和只限定在主值区间,故变换关系也完全适用于主值序列 $x(n)$ 和 $X(k)$ 。因此,可得到有限长序列离散傅里叶变换(DFT)及其反变换(IDFT)的定义如下:

$$\text{正变换: } X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (3.2.6)$$

$$\text{反变换: } x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (3.2.7)$$

式(3.2.6)和式(3.2.7)构成了离散傅里叶变换对关系,已知 $x(n)$ 就能唯一地确定 $X(k)$ ,同样,已知 $X(k)$ 也就唯一地确定了 $x(n)$ 。但是应该记住:在DFT关系中,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的,即DFT具有隐含的周期特性。

也可以在DFT运算中引入矩形序列来代替对 $k$ (或 $n$ )取值范围的声明,即

$$\text{正变换: } X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \quad (3.2.8)$$

$$\text{反变换: } x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(n) \quad (3.2.9)$$



教学视频

### 3.2.2 离散傅里叶变换与其他变换的关系

#### 1. DFT 与 DFS: 主值序列与周期延拓

DFT 具有隐含的周期特性,也就是在 DFT 的讨论中,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的。对于 DFT 的任何处理,都是先把有限长序列进行周期延拓,再做相应的处理,然后取主值序列后得到处理结果。

换句话说,在频域,DFT 结果是 DFS 的主值序列,DFS 是 DFT 的周期延拓;在时域,IDFT 结果是 IDFS 的主值序列,IDFS 是 IDFT 的周期延拓,具体关系如图 3.2.1 所示。

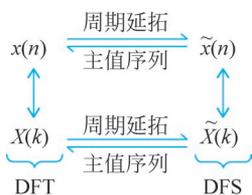


图 3.2.1 DFT 与 DFS 的关系

#### 2. DFT 与 DTFT: 频域均匀采样

周期序列  $\tilde{x}(n)$  的主值序列为  $x(n)$ ,根据式(2.3.1)可知  $x(n)$  的 DTFT 结果为

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3.2.10)$$

将式(3.2.10)与式(3.2.6)对比可知,当  $\omega = \frac{2\pi}{N}k$  时,DFT 与 DTFT 结果相同,即

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2.11)$$

$X(e^{j\omega})$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数,式(3.2.11)的结论表明:  $X(k)$  是对  $X(e^{j\omega})$  在频域上的一个周期内的均匀采样,采样间隔为  $2\pi/N$ 。这个关系意味着取得了信号在频域上离散且有限长的一段样本,这就为计算机分析信号频谱打开了通道。

#### 3. DFT 与 $z$ 变换: 单位圆上均匀采样

$X(e^{j\omega})$  是单位圆上的  $z$  变换,结合式(3.2.10)可知,DFT 是  $z$  变换在单位圆上的均匀采样,即

$$X(k) = X(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2.12)$$

需要注意的是,在学习和应用 DFT 与其他变换的关系时,都不要忘记了 DFT 隐含的周期特性,即强调  $k$  的取值范围为  $k=0, 1, \dots, N-1$ 。如果  $k$  的取值为所有整数,那么 DFT 的结果就会周期性出现(即周期延拓);对于 DTFT 而言,相当于在若干  $2\pi$  周期内均匀采样,得到的结果为 DFS;对于  $z$  变换而言,相当于在单位圆上一圈又一圈地逆时针均匀采样,得到的结果仍然是 DFS。

图 3.2.2 给出了有限长序列 DFT 与其他变换关系的示意图,可从“三横两纵”来理解有限长序列 DFT 的推导过程。

“三横”指三种变换关系,即 DTFT、DFS 和 DFT。仍然可用 2.3.2 节的两句话来深刻理解这三种变换关系,即“傅里叶变换是时域到频域的桥梁”以及“一个域的离散对应另一个域的周期延拓”。对于  $N$  点的 DFT 变换关系对,在时域和频域都是  $N$  点长的样本序列,其周期特性被取主值操作给“隐含”了。

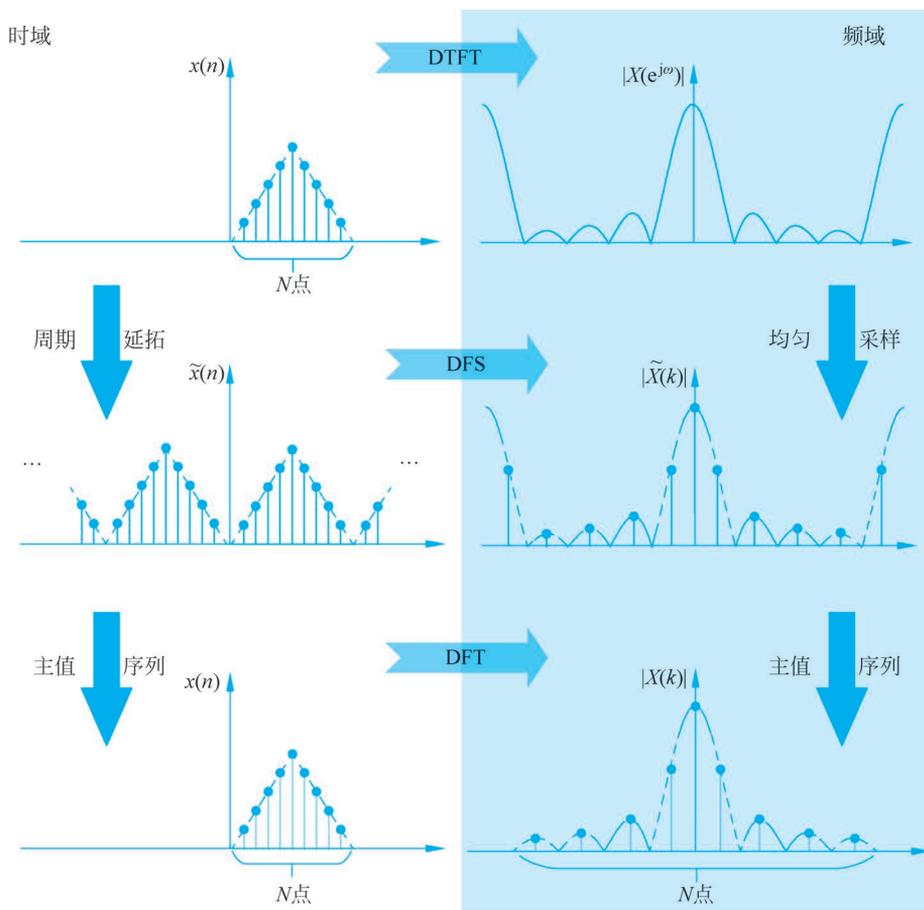


图 3.2.2 DFT 与其他变换关系示意图(“三横两纵”)

“两纵”指在时、频两个域同时进行的操作。在时域经过了“均匀采样→周期延拓→取主值序列”操作,对应于在频域进行的“周期延拓→均匀采样→取主值序列”操作。通过 DFT,从时域的  $N$  点样本序列出发,得到频域的  $N$  点样本序列。

**例 3.2** 试计算  $N$  点矩形序列的 DTFT 和 DFT 结果,并画出它们的幅度谱。

**解:** 根据定义, $N$  点矩形序列的 DTFT 结果为

$$W_N(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

令  $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ , 即可得 DFT 结果为

$$W_N(k) = W_N(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = \frac{1 - e^{-j2k\pi}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$$

$N$  点矩形序列的 DTFT 和 DFT 幅度谱如图 3.2.3 所示,从图中可以形象地看出,



彩图

DFT 是 DTFT 在  $[0, 2\pi)$  区间上的均匀采样。DTFT 的包络形状与长度  $N$  是密切相关的： $N$  取值越大，幅度谱中的“小山包”（旁瓣）数量越多，宽度越窄；如果  $N$  值确定了，DTFT 的包络形状就确定了。

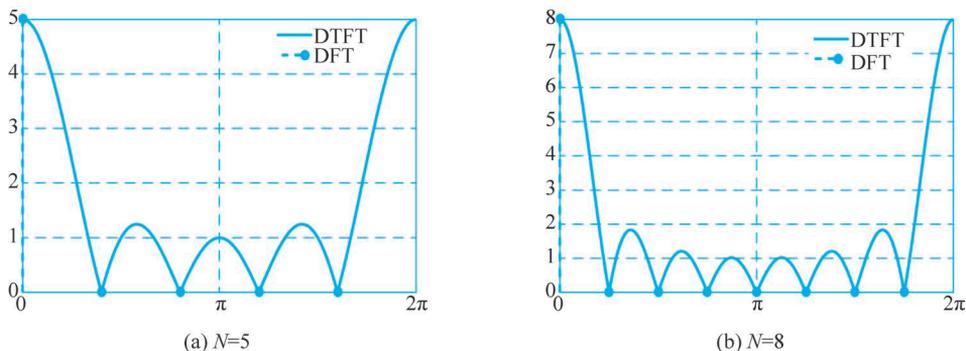


图 3.2.3  $N$  点矩形序列的 DTFT 和 DFT 幅度谱

当 DTFT 的包络形状确定以后，DFT 就只能在这个确定的包络上进行均匀采样。从图 3.2.3 还可以看出，除了  $k=0$  这点，DFT 在其他采样点上都“很不幸”地采到了零值，这个结果与理论分析也是吻合的。这些零值都是有意义的，它们如实反映了 DTFT 包络的变化规律。

如果能让 DFT 在其他非零值的时刻进行采样，需要提高频域采样的密集程度，可以通过在数据后面补零的方式来实现，例 3.3 将进行简要介绍。

**例 3.3** 在  $N$  点矩形序列后面补  $M$  个零，再计算补零后序列的 DTFT 和 DFT 结果，并画出它们的幅度谱。

**解：**在  $N$  点矩形序列后面补  $M$  个零，得到  $N+M$  点的数据序列，根据 DTFT 的定义可得

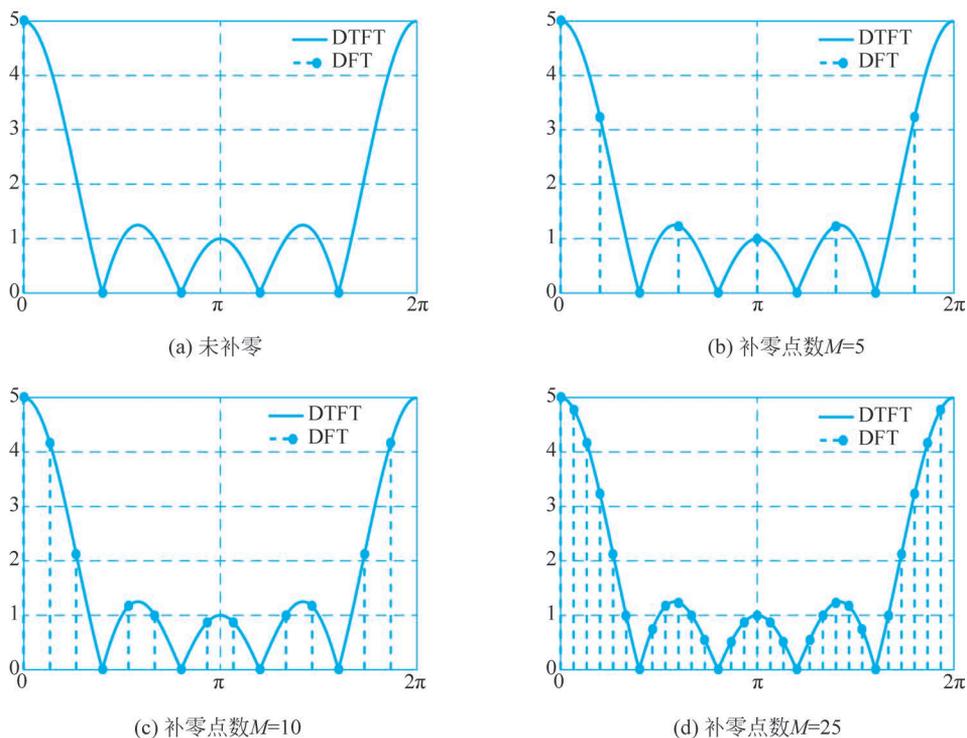
$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N+M-1} R_N(n) e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = W_N(e^{j\omega})$$

与例 3.2 的结果相比较可以看出，补零前后 DTFT 的表达式是相同的。此时令  $\omega = \frac{2\pi}{M+N}k$ ，即可得补零后序列的 DFT 结果

$$X(k) = W_N(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{M+N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, M+N-1$$

为便于比较，设  $N=5$ ，图 3.2.4 给出了不同补零点数的 DTFT 和 DFT 幅度谱。

从图 3.2.4 看出，数据长度  $N$  决定了 DTFT 包络形状，而 DFT 变换点数  $N+M$  决定了采样密集程度。也就是说，只要矩形序列长度确定以后 ( $N=5$ )，DTFT 的包络随即固定下来，此时在序列后面补零，只会增加采样的密集程度，但并不能改变 DTFT 的包络形状。

图 3.2.4  $N=5$  点矩形序列补零后的 DTFT 和 DFT 幅度谱

### 3.2.3 圆周移位与圆周卷积

DFT 中的运算与 CTFT、DTFT 和 DFS 中的运算有所不同,根本原因就在于 DFT 具有隐含的周期特性,在此介绍 DFT 的两个典型运算,即圆周移位和圆周卷积。

#### 1. 圆周移位

圆周移位在有的教材中也称为“循环移位”,可以用“先周期延拓,再线性移位,最后取主值序列”来概括圆周移位。

$N$  点长序列  $x(n)$  的  $m$  点圆周移位是指:以  $N$  为周期对  $x(n)$  进行周期延拓,得到周期序列  $\tilde{x}(n)$ ,将周期序列  $\tilde{x}(n)$  进行  $m$  点线性移位,然后取主值区间 ( $n=0$  到  $n=N-1$ ) 上的序列值,即  $x((n+m))_N R_N(n)$ 。

圆周移位后得到的结果仍然是一个  $N$  点长的序列。 $x((n+m))_N$  表示周期序列  $\tilde{x}(n)$  的  $m$  点线性移位, $m$  为正表示左移, $m$  为负表示右移,即

$$x((n+m))_N = \tilde{x}(n+m) \quad (3.2.13)$$

线性移位、周期移位和圆周移位这三种“移位”是有区别的。线性移位可以在时间轴上任意移动;周期移位移动的对象是周期序列  $\tilde{x}(n)$ ,也可以在时间轴上任意移动;圆周移位移动的对象是有限长序列  $x(n)$ ,最终受到主值区间的“约束”。

**例 3.4** 计算有限长序列  $x(n)=\{1,2,3,4,5\}_0$  的圆周移位结果  $x((n+3))_5 R_5(n)$ 。

**解:** 用图示法来分析圆周移位会更加方便。

图 3.2.5 给出了序列圆周移位的 3 个过程,即“周期延拓→线性移位→取主值序列”,可以看出, $x((n+3))_5 R_5(n)$ 表示将周期序列  $\tilde{x}(n)$  左移 3 位后的主值序列,即

$$x((n+3))_5 R_5(n) = \{4, 5, 1, 2, 3\}_0$$

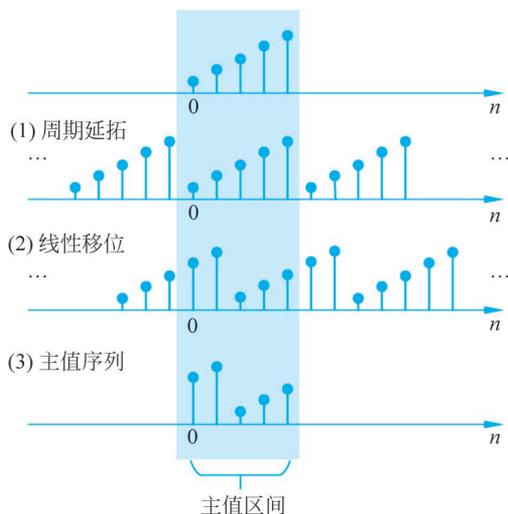


图 3.2.5 序列的圆周移位过程

从图 3.2.5 还可以看出,当对周期序列线性移位时,从主值区间一端移出的一段序列值,同时也从主值区间的另一端移进来相同的一段序列值。借用数据结构中“先进先出”的概念,可以用“左进右出,右进左出”来描述圆周移位的过程,还可以把这个过程想象成在圆周上旋转的过程,这也就是圆周移位中“圆周”二字的缘由,如图 3.2.6 所示。

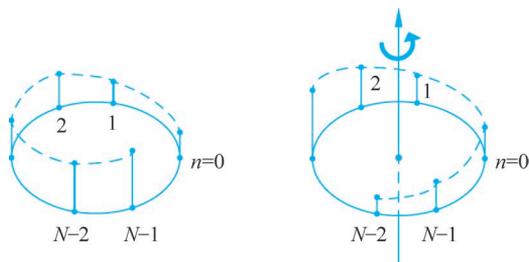


图 3.2.6 圆周移位示意图

## 2. 圆周卷积

设  $x_1(n)$  为  $N_1$  点长序列 ( $0 \leq n \leq N_1 - 1$ ),  $x_2(n)$  为  $N_2$  点长序列 ( $0 \leq n \leq N_2 - 1$ ), 则  $y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n)$  表示  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的  $L$  点圆周卷积, 定义如下:

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[ \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \\ &= \left[ \sum_{m=0}^{L-1} x_2(m) x_1((n-m))_L \right] R_L(n) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

其中圆周卷积长度  $L \geq \max(N_1, N_2)$ 。一般用符号  $\textcircled{L}$  表示  $L$  点圆周卷积, 有的教材也把



动图



动图

圆周卷积称为“循环卷积”。

式(3.2.14)中的  $x_2((n-m))_L$  或  $x_1((n-m))_L$  只在主值区间取值,表明  $L$  点圆周卷积是以  $L$  为周期的周期卷积的主值序列。 $L$  的取值不同,则延拓的周期就不同,取主值序列得到的圆周卷积结果也就不同。

圆周卷积运算中是圆周移位,线性卷积运算中是线性移位,满足一定条件时,可以用圆周卷积来计算线性卷积,这部分内容将在第4章进行讲解。

**例 3.5** 计算序列  $x_1(n)=\{1,2,3,4\}_0$  和  $x_2(n)=\{3,2,1\}_0$  的  $L$  点圆周卷积,分别取  $L=4$  和  $L=6$ 。

**解法一:** 可根据定义来计算圆周卷积,按照“翻转→周期延拓→移位→相乘→求和”的步骤。图 3.2.7 给出了 4 点圆周卷积图解法,阴影部分表示 4 点长的主值区间。

	1 2 3 4	$x_1(n)$
补零	3 2 1 0	$x_2(n)$
翻转	0 1 2 3	
周期延拓	0 1 2 3 0 1 2 3	
相乘求和	$x(0)$	$x(0)=1\times 3+2\times 0+3\times 1+4\times 2=14$
右移1位	0 1 2 3 0 1 2 3	
相乘求和	$x(1)$	$x(1)=1\times 2+2\times 3+3\times 0+4\times 1=12$
右移1位	0 1 2 3 1 2 3	
相乘求和	$x(2)$	$x(2)=1\times 1+2\times 2+3\times 3+4\times 0=14$
右移1位	0 1 2 3 0 1 2 3	
相乘求和	$x(3)$	$x(3)=1\times 0+2\times 1+3\times 2+4\times 3=20$

图 3.2.7 圆周卷积图解法

其中,  $x(0)=1\times 3+2\times 0+3\times 1+4\times 2=14$  表示  $x_1(n)$  与主值区间内的  $\{3,0,1,2\}_0$  逐位相乘求和的结果,而  $\{3,0,1,2\}_0$  是将  $x_2(n)$  “补零→翻转→周期延拓→移位”得到的。

继续“移位→相乘→求和”,可以得到  $x(1)=12, x(2)=14, x(3)=20$ 。因此,  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的 4 点圆周卷积结果为

$$x_1(n) \textcircled{4} x_2(n) = \{14, 12, 14, 20\}_0$$

同理可得,  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的 6 点圆周卷积结果为(此时主值区间长度为 6 点)

$$x_1(n) \textcircled{6} x_2(n) = \{3, 8, 14, 20, 11, 4\}_0$$

此外,也可以利用 MATLAB 函数 `cconv` 来计算两个序列的圆周卷积。

**解法二:** 也可以用矩阵相乘的形式来计算圆周卷积,矩阵的行数和列数取决于圆周卷积长度,不足部分补零即可。

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(L-1) & x_1(L-2) & \cdots & x_1(1) \\ x_1(1) & x_1(0) & x_1(L-1) & \cdots & x_1(2) \\ x_1(2) & x_1(1) & x_1(0) & \cdots & x_1(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(L-1) & x_1(L-2) & x_1(L-3) & \cdots & x_1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ \vdots \\ x_2(L-1) \end{bmatrix}$$

利用上述矩阵计算 4 点圆周卷积结果,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

同理,可计算 6 点圆周卷积结果,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \\ 20 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

### 3.3 离散傅里叶变换的性质

DFS 在时域和频域都是周期的,其性质一般加以“周期”二字强调,如“周期移位”“周期卷积”; DFT 在时域和频域都是有限长的,通过对 DFS 取主值序列获得,具有隐含的周期特性,其性质一般加以“圆周”二字强调,如“圆周移位”“圆周卷积”等。除此之外, DFT 和 DFS 的性质是非常相似的,可以对照参考。

#### 1. 线性

$$\text{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k) \quad (3.3.1)$$

其中,  $x(n)$  和  $y(n)$  都是  $N$  点长序列,各自的 DFT 分别为  $X(k)$  和  $Y(k)$ ,  $a$  和  $b$  为任意常数。

如果  $x(n)$  和  $y(n)$  的点数不相等,设  $x(n)$  为  $N_1$  点 ( $0 \leq n \leq N_1 - 1$ ),  $y(n)$  为  $N_2$  点 ( $0 \leq n \leq N_2 - 1$ ), 如果对  $ax(n) + by(n)$  进行 DFT,则需要分别对  $x(n)$  和  $y(n)$  进行补零,补到都是  $N$  点长序列,且  $N \geq \max(N_1, N_2)$ 。

#### 2. 圆周时频翻转

$$\text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] = X((-k))_N R_N(k) \quad (3.3.2)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= \left[ \sum_{n=-(N-1)}^0 x((n))_N e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= X((-k))_N R_N(k) \end{aligned}$$

该性质表明,有限长序列在时域的圆周翻转,对应着频域的圆周翻转。圆周时域翻转是指:有限长序列由圆周对称中心在时域进行翻转后取主值序列,对称中心为  $n=0$  或



教学视频

$n = N/2$ , 根据定义可知,  $x(n)$  的圆周时域翻转序列为  $x((-n))_N R_N(n)$ 。

根据圆周时域翻转的定义, 表达式  $x((-n))_N R_N(n)$  和  $x(N-n)$  是相同的(注意: 两种表达式都是在主值区间上取值), 故圆周时频翻转性质还可写成

$$\text{DFT}[x(N-n)] = X(N-k) \quad (3.3.3)$$

为便于读者理解, 表 3.3 给出了有限长序列  $x(n)$  圆周时域翻转前后对照表。

表 3.3 圆周时域翻转前后对照表

$n$	0	1	2	...	$N-2$	$N-1$
$x(n)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	...	$x(N-2)$	$x(N-1)$
$x((-n))_N R_N(n)$ 或 $x(N-n)$	$x(0)$	$x(N-1)$	$x(N-2)$	...	$x(2)$	$x(1)$

圆周时域翻转后的序列不能写成  $x(-n)$ , 这是因为 DFT 中的“移位”“翻转”等操作都是在圆周上进行的, 观测/取值区间必须在主值区间上,  $x(-n)$  显然不在主值区间范围内。

### 3. 圆周时移特性

$$\text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k) R_N(k) \quad (3.3.4)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{p=m}^{N+m-1} x((p))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}k(p-m)} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \sum_{p=m}^{N+m-1} x((p))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \sum_{p=0}^{N-1} x((p))_N e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k) R_N(k) \end{aligned}$$

圆周时移特性表明, 序列在时域上的圆周移位, 在频域中只引入了一个与频率  $(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k)$  呈正比的线性相移因子, 对幅度是没有影响的。

### 4. 圆周频移特性

$$\text{DFT}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} x(n)] = X((k+r))_N R_N(k) \quad (3.3.5)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} x(n)] &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k) \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+r)n} \right] R_N(k) \\ &= X((k+r))_N R_N(k) \end{aligned}$$

序列的圆周频移特性和圆周时移特性是对偶的。圆周频移特性表明,序列在频域上的圆周移位,等效于在时域的调制(相乘),因此该特性也称为“调制特性”。

### 5. 对偶性

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k) \quad (3.3.6)$$

**证明:** 根据 IDFT 公式可得

$$Nx(N-n) = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-n)} \right] R_N(n) = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(n)$$

上式等号右边与 DFT 变换公式相同,故将变量  $n$  和  $k$  互换,

$$Nx(N-k) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(k)$$

把上式与 DFT 变换关系结合起来对照,可以看出有限长序列  $X(n)$  的  $k$  次谐波系数为  $Nx(N-k)$ ,即  $X(n)$  和  $Nx(N-k)$  为 DFT 变换关系对,故  $\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$ 。

要形成对偶关系,时频变量必须都是离散的或者都是连续的才行。故在 CTFT、DFS 和 DFT 中都存在对偶关系,在 DTFT 中无对偶关系,这是因为 DTFT 中时域变量是离散的,频域变量是连续的,无法交换变量,当然就不可能存在对偶关系。

### 6. 圆周共轭对称特性

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k) \quad (3.3.7)$$

**证明:**

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} R_N(k) \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) \\ &= X^*((N-k))_N R_N(k) \\ &= X^*(N-k) \end{aligned}$$

结合圆周时频翻转特性,亦可证明

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$$

进一步可证

$$\text{DFT}[\text{Re}(x(n))] = \text{DFT} \left[ \frac{1}{2}(x(n) + x^*(n)) \right] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{\text{ep}}(k)$$

其中,把  $X_{\text{ep}}(k)$  称为  $X(k)$  的圆周共轭偶对称分量,与 DFS 中的共轭偶对称分量  $\tilde{X}_e(k)$  相比,多了一个下标  $p$  ( $p$  表示周期 peroid)。

同理可证

$$\text{DFT}[j\text{Im}(x(n))] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{\text{op}}(k)$$

其中,把  $X_{\text{op}}(k)$  称为  $X(k)$  的圆周共轭奇对称分量。

式(3.3.8)归纳了有限长序列  $x(n)$  实(虚)部与其 DFT 的圆周共轭偶(奇)对称分量的对偶关系。

$$\begin{aligned} x(n) &= \operatorname{Re}[x(n)] + j\operatorname{Im}[x(n)] \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ X(k) &= X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

式(3.3.9)归纳了有限长序列  $x(n)$  圆周共轭偶(奇)对称分量与其 DFT 实(虚)部的对偶关系。

$$\begin{aligned} x(n) &= x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ X(k) &= \operatorname{Re}[X(k)] + j\operatorname{Im}[X(k)] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

其中,  $x(n)$  的圆周共轭偶对称分量为  $x_{\text{ep}}(n)$ , 圆周共轭奇对称分量为  $x_{\text{op}}(n)$ , 定义如下:

$$\begin{aligned} x_{\text{ep}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\ x_{\text{op}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \end{aligned}$$

### 7. 时域圆周卷积定理

设  $x_1(n)$  为  $N_1$  点长序列 ( $0 \leq n \leq N_1 - 1$ ),  $x_2(n)$  为  $N_2$  点长序列 ( $0 \leq n \leq N_2 - 1$ ), 取  $L \geq \max(N_1, N_2)$ , 将序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  分别补零到  $L$  点长序列, 再分别做  $L$  点的 DFT, 结果分别为  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$ 。若

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) \quad (3.3.10)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = X_1(k)X_2(k) \quad (3.3.11)$$

**证明:**

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{L-1} \left[ \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L R_L(n) \right] e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{L-1} x_2((n-m))_L e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{L}km} X_2(k) \\ &= X_1(k)X_2(k) \end{aligned}$$

证明的倒数第 2 步用到了圆周时移特性。该定理表明, 两个有限长序列在时域的圆周卷积, 等价于在频域的相乘运算。

### 8. 频域圆周卷积定理

有限长序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的定义同上, 将它们分别补零到  $L$  点长序列, 再分别做  $L$  点的 DFT, 结果分别为  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$ 。若

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \quad (3.3.12)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{L} X_1(k) \textcircled{L} X_2(k) \quad (3.3.13)$$

该定理表明,两个有限长序列在时域的相乘运算,等价于在频域的圆周卷积(提醒:乘法运算中有一个比例因子)。

### 9. DFT 形式下的帕塞瓦尔定理

对长度  $N$  的有限长序列  $x(n)$  和  $y(n)$ ,  $N$  点 DFT 结果分别为  $X(k)$  和  $Y(k)$ , 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (3.3.14)$$

若  $x(n)=y(n)$ , 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3.3.15)$$

若  $x(n)=y(n)$  且都是实序列, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^2(k) \quad (3.3.16)$$

DFT 形式下的帕塞瓦尔定理与其他形式的帕塞瓦尔定理类似, 都是表明信号能量在时域计算的结果与频域计算的结果是相等的, 只不过 DFT 形式下的帕塞瓦尔定理, 时域和频域都是离散且有限长的。

**例 3.6** 设  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  都是  $N$  点长实序列, 试只用一次  $N$  点的 DFT 运算就给出各自的 DFT 结果。

**解:** 可利用 DFT 的圆周共轭对称特性, 仅用一次  $N$  点的 DFT 运算计算出两个  $N$  点实序列的 DFT 结果, 从而减少运算量。在此设  $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$ ,  $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$ 。

首先, 将  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  组合为一个  $N$  点的复序列, 即

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

故

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[x_1(n) + jx_2(n)] \\ &= \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] \\ &= X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

根据式(3.3.8)可知

$$X_1(k) = Y_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

同理

$$X_2(k) = \frac{1}{j} Y_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2j}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

也就是说, 利用一次 DFT 运算求出  $N$  点复序列的 DFT 结果, 再按照上式即可求出两个  $N$  点长实序列的 DFT 结果。

**例 3.7** 设  $x(n)$  为  $N=8$  点的有限长实序列,  $x(n) = \{1, 2, 3, -2, 4, 0, 1, 3\}_0$ ,  $X(k)$

为  $N$  点 DFT 结果, 试计算以下表达式的值。

$$(1) X(0) \quad (2) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \quad (3) \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

解: (1) 根据 DFT 的公式可得

$$X(0) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \Big|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$\text{故 } X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 1 + 2 + 3 - 2 + 4 + 0 + 1 + 3 = 12。$$

(2) 根据 IDFT 公式  $x(n) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] R_N(n)$ , 令  $n=0$  可得

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

$$\text{故 } \sum_{k=0}^{N-1} X(k) = Nx(0) = 8 \times 1 = 8。$$

(3) 根据 DFT 形式下的帕塞瓦尔定理可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 &= N \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \\ &= 8 \times [1^2 + 2^2 + 3^2 + (-2)^2 + 4^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2] \\ &= 352 \end{aligned}$$

为便于学习, 表 3.4 归纳了离散傅里叶变换的性质。

表 3.4 离散傅里叶变换的性质

N 点序列	N 点 DFT	备注
$ax(n) + by(n)$	$aX(k) + bY(k)$	线性
$x((-n))_N R_N(n)$ 或 $x(N-n)$	$X((-k))_N R_N(k)$ 或 $X(N-k)$	圆周时频翻转
$x((n+m))_N R_N(n)$	$e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k)$	圆周时移特性
$e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} x(n)$	$X((k+r))_N R_N(k)$	圆周频移特性
$X(n)$	$Nx(N-k)$	对偶性
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$	圆周共轭对称特性
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$	
$x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]$	$\text{Re}[X(k)]$	
$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$	$j\text{Im}[X(k)]$	
$\text{Re}[x(n)]$	$X_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)]$	
$j\text{Im}[x(n)]$	$X_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)]$	

续表

N 点序列	N 点 DFT	备注
$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$	时域圆周卷积定理
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{L}X_1(k) \textcircled{L} X_2(k)$	频域圆周卷积定理
$\sum_{n=0}^{N-1}  x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  X(k) ^2$		DFT 形式下的帕塞瓦尔定理

### 3.4 频域采样定理

一个域的离散,对应另外一个域的周期延拓,这个关系是对偶的。在时域采样,频域会产生周期延拓,延拓的周期就是采样率;在频域采样,时域也会产生周期延拓,延拓的周期就是频域采样点数。

2.1 节介绍了时域采样定理与插值重构,本节将学习频域采样定理与插值重构。

#### 3.4.1 频域采样

**频域采样定理:** 设  $M$  点有限长序列  $x(n)$  的离散时间傅里叶变换为  $X(e^{j\omega})$ , 对  $X(e^{j\omega})$  在区间  $[0, 2\pi)$  上作  $N$  点均匀采样, 得到频域样本  $X_N(k)$ 。只有当  $N > M$  时, 才能由频域样本值无失真地重构原时域序列  $x(n)$ 。

可以根据 DFT 与其他变换的关系来理解频域采样定理, 图 3.4.1 给出了“频域采样, 时域周期延拓”的示意图。

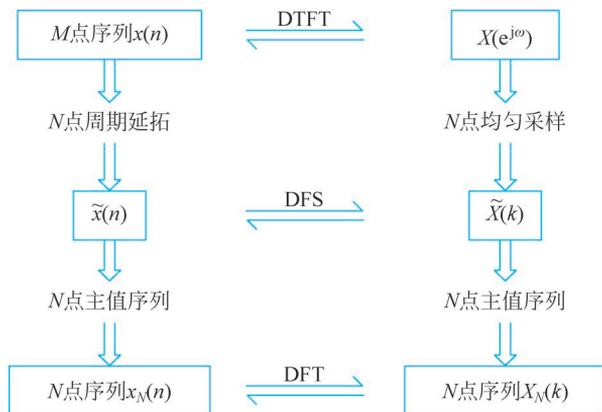


图 3.4.1 频域采样, 时域周期延拓

对  $X(e^{j\omega})$  在区间  $[0, 2\pi)$  上作  $N$  点均匀采样, 对应着时域的周期延拓, 延拓周期为  $N$ , 得到周期序列

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + kN) \quad (3.4.1)$$



教学视频

在主值区间 $[0, N-1]$ 取值, 可得时域序列  $x_N(n)$  为

$$x_N(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+kN)R_N(n) \quad (3.4.2)$$

很显然, 并不能保证  $N$  点的  $x_N(n)$  与  $M$  点的原始序列  $x(n)$  完全相同。只有当采样点数  $N > M$  时, 在时域周期延拓的过程中才不会发生混叠现象, 此时才能用  $N$  点的  $x_N(n)$  去完全(无失真)重构出  $M$  点的  $x(n)$ 。

图 3.4.2 所示为时域周期延拓过程中未发生混叠的情况, 此时频域采样点数大于原始序列长度。与原始序列  $x(n)$  相比,  $x_N(n)$  在后端多出来  $(N-M)$  个零。

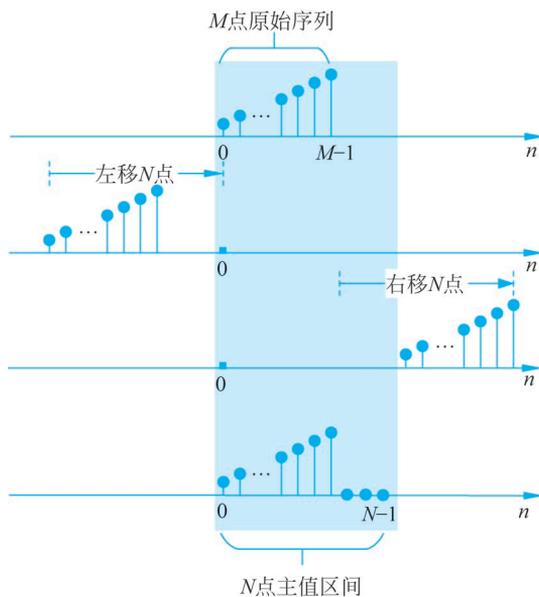


图 3.4.2 时域周期延拓(无混叠)

图 3.4.3 所示为时域周期延拓过程中发生混叠的情况, 此时频域采样点数小于原始序列长度。只有在  $M-N \leq n \leq N-1$  范围内未发生混叠, 在这个区间内, 才有  $x_N(n) = x(n)$ 。

**例 3.8** 设  $x(n)$  为  $M=11$  点的三角形序列, 即

$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 5 \\ -n + 10, & 6 \leq n \leq 10 \end{cases}$$

若对  $x(n)$  的离散时间傅里叶变换结果  $X(e^{j\omega})$  在区间  $[0, 2\pi)$  上作  $N$  点均匀采样, 得到频域采样值  $X_N(k)$ , 试计算序列  $x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]$ , 分别选  $N=15$  和  $N=8$ 。

**解:** 可根据图 3.4.2 和图 3.4.3 的过程来直接计算序列  $x_N(n)$ 。

$N=15$ , 频域采样点数大于原始序列长度, 此时时域周期延拓的过程无混叠, 在  $x(n)$  后面直接补  $N-M=4$  个零即可。

$$x_{15}(n) = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}}_{\text{原始序列}} \underbrace{\{0, 0, 0, 0\}}_{\text{补零}}$$



彩图



彩图

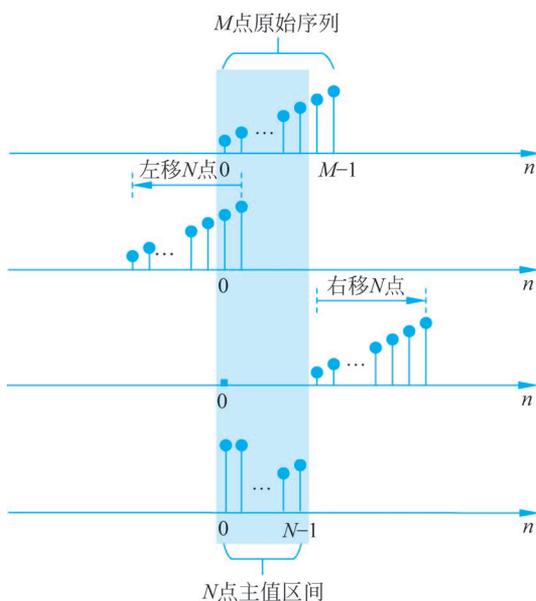


图 3.4.3 时域周期延拓(有混叠)

$N=8$ , 频域采样点数小于原始序列长度, 在时域周期延拓时会发生混叠, 且重构出来的序列长度为 8。

$$x_8(n) = \{ \underbrace{2, 2, 2}_{\text{混叠部分}}, \underbrace{3, 4, 5, 4, 3}_{\text{未混叠部分}} \}_0$$

如果严格按照题目要求, 即首先计算  $X(e^{j\omega})$ , 再对  $X(e^{j\omega})$  进行  $N$  点均匀采样得到频域样本值  $X_N(k)$ , 最后计算  $x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]$ , 但这个过程过于烦琐, 其实可以利用 MATLAB 来编程求解本题。MATLAB 中无 DTFT 函数(计算机不可能给出连续结果), 只能借助 DFT 函数来实现。在编程实现中, 需要先对  $M$  点序列  $x(n)$  进行补零操作, 然后对补零序列进行 DFT 运算, 从 DFT 的离散输出中均匀抽取  $N$  个样本值, 具体实验流程如图 3.4.4 所示, 序列重构结果如图 3.4.5 所示。

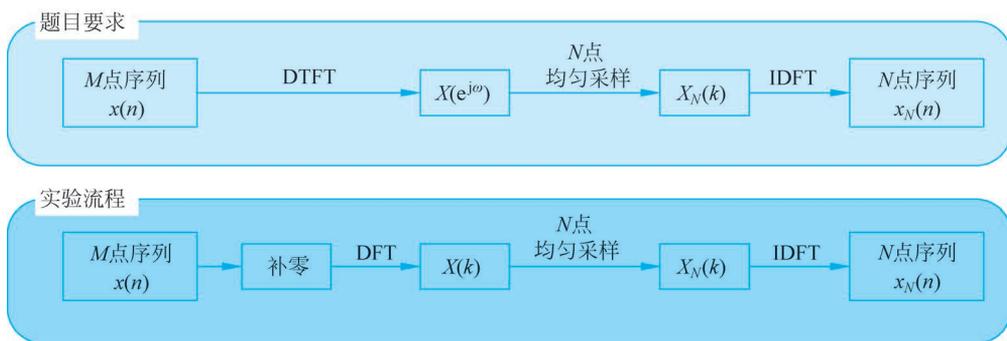


图 3.4.4 例 3.8 实验流程

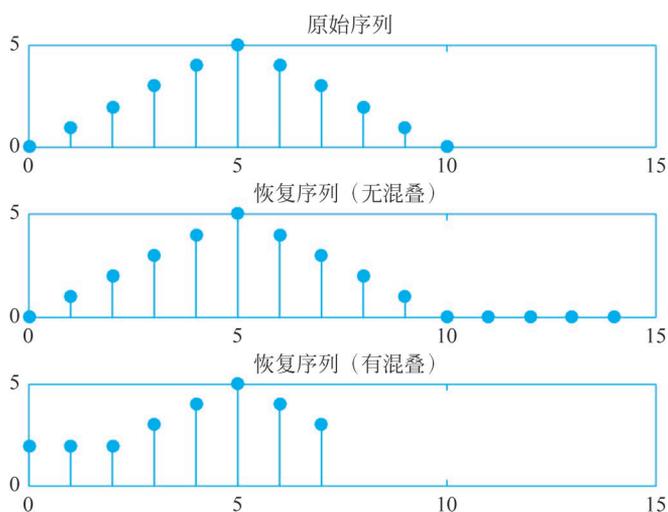


图 3.4.5 序列重构结果

### 3.4.2 频域插值重构

频域插值重构与时域插值重构的基本思路是一致的,都是利用有限个采样值来重构之前的连续函数。所谓频域插值重构,就是通过采样插值公式,由  $N$  个频域采样值  $X_N(k)$  来重构出连续频率函数,如果频域采样过程满足频域采样定理要求,就可以无失真地重构出采样前的  $X(e^{j\omega})$  或  $X(z)$ 。

可由  $z$  变换的计算过程推导频域样本值  $X_N(k)$  与  $X(z)$  的关系。

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] z^{-n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} z^{-n} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

将上式整理可得

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \Phi_k(z) \tag{3.4.4}$$

其中,把  $\Phi_k(z)$  称为插值函数,

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \tag{3.4.5}$$

代入  $z = e^{j\omega}$ , 可得  $X_N(k)$  与  $X(e^{j\omega})$  的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \tag{3.4.6}$$

此时插值函数为

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} \quad (3.4.7)$$

根据欧拉公式可得

$$\begin{aligned} \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j[\omega(N-1)/2 + k\pi/N]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[N(\omega/2 - k\pi/N)]}{\sin(\omega/2 - k\pi/N)} e^{jk\pi(N-1)/N} e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

令  $\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$ , 可以进一步化简插值函数为

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.4.9)$$

故由频域样本值  $X_N(k)$  插值重构  $X(e^{j\omega})$  的公式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) \Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.4.10)$$

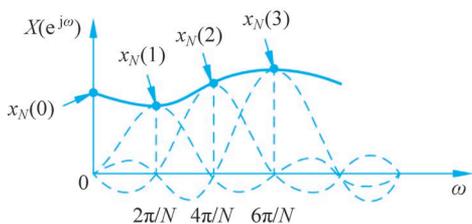


图 3.4.6 频域插值重构示意图

可以看出, 频域插值重构的过程与时域插值重构的过程非常相似, 如图 3.4.6 所示(可对照图 2.1.6 时域插值重构过程)。  $X(e^{j\omega})$  是由频域样本值  $X_N(k)$  对各个频率采样点的插值函数  $\Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$  加权后求和得到。在每个频率

采样点  $\omega = 2\pi k/N$  上, 插值函数取值为 1, 保证了输出结果在各个频率采样点取值与采样值完全相等, 即  $X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = X_N(k)$ 。在频率采样点之间, 输出结果的波形由各插值函数波形叠加而成。

### 3.5 线性调频 $z$ 变换(CZT)

从 3.2 节可知, DFT 是 DTFT 在  $[0, 2\pi)$  区间上的均匀采样, 也是  $z$  变换在单位圆上的均匀采样, 但在许多实际应用中, 对整个  $[0, 2\pi)$  区间(单位圆)进行均匀采样是没必要的。比如窄带信号, 其信号特征集中在某一频段, 如果采用 DFT 算法, 对整个  $[0, 2\pi)$  区间均匀采样后只有短短一截数据有价值, 而且为了提高计算分辨率, 必须提高窄带内的采样点数, 但 DFT 的运算方式决定了它必须以“撒胡椒面”的方式对整个  $[0, 2\pi)$  区间均匀采样, 因此用 DFT 分析窄带信号是非常“不划算”的。此外, 有时也对  $z$  平面上非单位圆上的采样值感兴趣, 比如语音信号处理中常常需要知道极点所在处的复频率, 如果极点距单位圆较远, 此时 DFT 就很难计算这种极点所在处的复频率。

本节将要介绍的线性调频  $z$  变换(Chirp  $z$ -Transform, CZT)算法就可以克服 DFT

的上述局限性,在一个更一般的周线上求  $z$  变换,在  $z$  平面上更加灵活地采样,既不必均匀采样,也不必在单位圆上采样。

对于一个  $N$  点长序列  $x(n)$ ,  $z_k$  表示  $z$  平面上任意位置,

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5.1)$$

这里的  $M$  可以是任意整数(不必和  $N$  相等)。

参数  $A$  表示起始点位置,其中  $A_0$  和  $\theta_0$  分别表示采样起始点处的矢量半径和相角,

$$A = A_0 e^{j\theta_0} \quad (3.5.2)$$

参数  $W$  可以表示为

$$W = W_0 e^{-j\phi_0} \quad (3.5.3)$$

式中,  $W_0$  表示螺旋线的伸展率。随着  $k$  的增加,  $W_0 > 1$  表示螺旋线内旋,  $W_0 < 1$  表示螺旋线外旋,  $W_0 = 1$  表示是半径为  $A_0$  的一段圆弧。  $\phi_0$  表示相邻样本点之间的角度差,  $\phi_0 > 0$  表示螺旋线是逆时针旋转,  $\phi_0 < 0$  表示螺旋线是顺时针旋转。

采样点  $z_k$  的轨迹如图 3.5.1 所示。如果  $M = N$ ,  $A = A_0 e^{j\theta_0} = 1$ ,  $W = W_0 e^{j\phi_0} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ,  $z_k$  均匀分布在单位圆上,此时的 CZT 算法就简化为 DFT 算法。

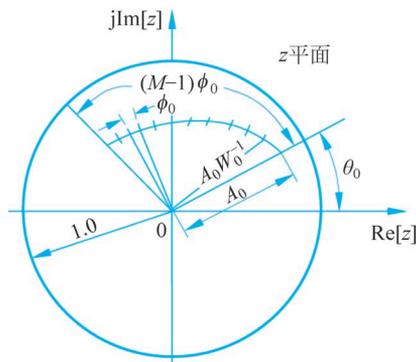


图 3.5.1 CZT 在  $z$  平面上采样的螺旋线轨迹

更一般地,  $X(z)$  在  $z_k$  处的采样值为

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5.4)$$

代入  $z_k = AW^{-k}$  可得

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5.5)$$

根据布鲁斯坦等式

$$nk = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (k-n)^2] \quad (3.5.6)$$

可知  $X(z_k)$  可以通过求  $g(n)$  与  $h(n)$  的线性卷积,再乘以  $W^{\frac{k^2}{2}}$  得到

$$\begin{aligned}
 X(z_k) &= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \\
 &= W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \quad k=0, 1, \dots, M-1
 \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

其中,

$$g(n) = x(n) A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} \tag{3.5.8}$$

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}} \tag{3.5.9}$$

CZT 算法的流程如图 3.5.2 所示,输入的是  $N$  点有限长序列  $x(n)$ ,输出的是  $z$  平面上的  $M$  个采样值  $X(z_k)$ 。由于  $h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}} = (W_0 e^{j\phi_0})^{-\frac{n^2}{2}} = W_0^{-\frac{n^2}{2}} e^{-j\frac{n^2}{2}\phi_0}$ ,其相位为  $-\frac{n^2}{2}\phi_0 = \left(-\frac{\phi_0}{2}n\right)n$ ,故  $h(n)$  的数字频率  $\left(-\frac{\phi_0}{2}n\right)$  是随时间  $n$  线性变化的,在雷达系统中这种信号称为线性调频信号\*,故这种变换称为线性调频  $z$  变换,常用于雷达和声呐信号的脉冲压缩处理。

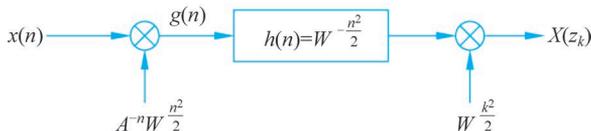


图 3.5.2 CZT 算法流程图

在图 3.5.2 中,  $g(n)$  与  $h(n)$  线性卷积的过程可由圆周卷积实现,而圆周卷积的过程可由 DFT 算法来解决(第 4 章内容),而 DFT 算法还可用 FFT 算法来快速实现(第 5 章内容),因此整个 CZT 算法流程完全可以由 FFT 算法快速实现。

## 习题

1. 图 T3.1 中所示的序列周期为 4,请确定该序列的 DFS 系数。

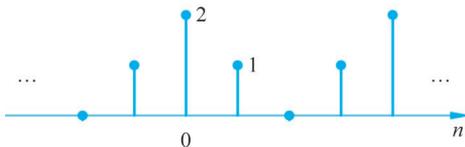


图 T3.1

2. 如果  $\tilde{x}(n)$  是一个周期为  $N$  的周期序列,则它也是周期为  $2N$  的周期序列。将  $\tilde{x}(n)$  看作周期为  $N$  的周期序列,用  $\tilde{X}_1(k)$  表示其 DFS 系数,再将  $\tilde{x}(n)$  看作周期为  $2N$

\* 注: 这种信号听起来像鸟叫声,因此又称为啁啾信号(chirp signal)。

的周期序列,用  $\tilde{X}_2(k)$  表示其 DFS 系数,试用  $\tilde{X}_1(k)$  来表示  $\tilde{X}_2(k)$ 。

3. 周期序列  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{y}(n)$  的周期分别为  $N$  和  $M$ ,且

$$\tilde{w}(n)\tilde{x}(n) = \tilde{y}(n)$$

(1) 试证明  $\tilde{w}(n)$  也是周期序列,且周期为  $MN$ 。

(2) 设周期序列  $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{y}(n)$  和  $\tilde{w}(n)$  的 DFS 系数分别为  $\tilde{X}(k)$ 、 $\tilde{Y}(k)$  和  $\tilde{W}(k)$ ,试用  $\tilde{X}(k)$  和  $\tilde{Y}(k)$  来表示  $\tilde{W}(k)$ 。

4. 计算以下序列的 DFT。

(1)  $\{1, 1, -1, -1\}_0$

(2)  $\{1, j, -1, -j\}_0$

(3)  $x(n) = c^n R_N(n)$

(4)  $x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)R_N(n)$

5. 请给出以下序列的 DFT 闭合表达式。

(1)  $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$

(2)  $x(n) = \cos(\omega_0 n) R_N(n)$

(3)  $x(n) = \sin(\omega_0 n) R_N(n)$

(4)  $x(n) = n R_N(n)$

6. 已知序列  $x(n)$  如下所示,请计算其 10 点和 20 点的 DFT 结果。

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 6 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

7. 已知序列  $x(n)$  的 DFT 结果如下,求其 IDFT 结果,其中  $m$  为正整数,且  $0 < m < N/2$ 。

$$(1) X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases} \quad (2) X(k) = \begin{cases} -\frac{N}{2} j e^{j\theta}, & k = m \\ \frac{N}{2} j e^{-j\theta}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$$

8. 已知序列  $x(n)$  的 DFT 为  $X(k)$ ,请用  $X(k)$  表示下面序列的 DFT 结果,其中  $0 < m < N$ 。

(1)  $x(n) \cos\left(\frac{2\pi m}{N}n\right)$

(2)  $x(n) \sin\left(\frac{2\pi m}{N}n\right)$

9. 已知  $N=7$  点的实序列的 DFT 在偶数时刻的取值如下所示,求该序列在奇数时刻的取值。

$$X(0) = 4.8, X(2) = 3.1 + j2.5, X(4) = 2.4 + j4.2, X(6) = 5.2 + j3.7$$

10. 已知序列  $x(n)$  的长度为  $N$ ,其  $N$  点 DFT 结果为  $X(k)$ ,试证明:

(1) 若  $x(n)$  为奇对称,即  $x(n) = -x(N-1-n)$ ,则  $X(0) = 0$ ;

(2) 若  $x(n)$  为偶对称,即  $x(n) = x(N-1-n)$ ,设  $N$  为偶数,则  $X(N/2) = 0$ 。

11. 已知序列  $x(n) = 0.5^n u(n)$ ,该序列的 DTFT 为  $X(e^{j\omega})$ 。另外有一序列  $y(n)$ ,

在  $0 \leq n \leq 9$  之外均有  $y(n)=0$ , 且  $y(n)$  的 10 点 DFT 等于  $X(e^{j\omega})$  在其主值区间内等间隔取 10 个采样点, 请计算  $y(n)$ 。

12. 已知序列  $x(n)$  的长度为  $N$ , 其  $N$  点 DFT 为  $X(k)$ 。现将  $x(n)$  的长度扩大  $r$  倍, 得到长度为  $rN$  的有限长序列  $y(n)$ , 其 DFT 为  $Y(k)$ ,

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

请用  $X(k)$  来表示  $Y(k)$ 。

13. 已知序列  $x(n)$  的长度为  $N$ , 其  $N$  点 DFT 为  $X(k)$ 。现将  $x(n)$  的每两点之间补  $r-1$  个零值, 得到长度为  $rN$  的有限长序列  $y(n)$ ,

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n=kr, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

设  $y(n)$  的 DFT 为  $Y(k)$ , 请用  $X(k)$  来表示  $Y(k)$ 。

14. 设  $x(n) = \{1, 2, 4, 3, 0, 5\}_0$ , 其  $N=6$  点的 DFT 为  $X(k)$ , 试确定以下表达式的值。

$$(1) X(0) \quad (2) X(3) \quad (3) \sum_{k=0}^5 X(k) \quad (4) \sum_{k=0}^5 |X(k)|^2$$

15. 已知  $X(k)$  为实序列  $x(n)$  的 8 点 DFT, 且已知  $X(0)=6, X(1)=4+j3, X(2)=-3-j2, X(3)=2-j, X(4)=4$ , 试确定以下表达式的值。

$$(1) x(0) \quad (2) x(4) \quad (3) \sum_{n=0}^7 x(n) \quad (4) \sum_{n=0}^7 |x(n)|^2$$

16. 已知  $N$  点序列  $x(n)$  的  $N$  点 DFT 为  $X(k)$ , 即  $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。  $X(k)$  本身也是一个  $N$  点长序列, 如果对  $X(k)$  继续进行 DFT 运算, 得到序列  $Y(k) = \text{DFT}[X(k)]$ , 请给出  $x(n)$  与  $Y(k)$  的关系。

17. 已知  $N$  点序列  $x(n)$  的  $N$  点 DFT 为  $X(k)$ , 新序列  $x_1(n)$  是由  $x(n)$  重复出现  $M$  次得到, 即对  $x(n)$  作  $M$  个周期延拓,  $x_1(n)$  的 DFT 为  $X_1(k)$ , 请用  $X(k)$  来表示  $X_1(k)$ 。

18. 已知  $N$  点序列  $x(n)$ ,  $N$  点 DFT 为  $X(k)$ , 请给出下列序列的 DFT。

$$(1) x(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$(2) (-1)^n x(n), \quad 0 \leq n \leq N-1, N \text{ 为偶数}$$

$$(3) x(2n), \quad 0 \leq n < N/2, N \text{ 为偶数}$$

$$(4) g(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

$$(5) g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

$$(6) g(n) = \begin{cases} x(n) + x(n+N/2), & 0 \leq n < N/2, n \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

19. 已知序列  $x(n) = a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ , 其  $z$  变换为  $X(z)$ , 对  $X(z)$  在单位圆上进行  $N$  等分采样, 采样值为  $X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}}$ , 请给出有限长序列  $\text{IDFT}[X(k)]$  的表达式。

20. 请用 MATLAB 编程复现例 3.3 中图 3.2.4 的结果(提示: MATLAB 中无 DTFT 函数, 可通过补零用 DFT/FFT 函数来近似)。

21. 请用 MATLAB 编程复现例 3.5 的结果(提示: 可用函数 `cconv` 计算圆周卷积)。

22. 请用 MATLAB 编程复现例 3.8 的结果(提示: 可用函数 `ifft` 计算 IDFT)。

23. 设线性调频信号  $x(t)$  的模型如下:

$$x(t) = \cos \left[ 2\pi \left( \frac{1000 - 10}{5} t + 10 \right) t \right], \quad 0 \leq t \leq 5$$

(1) 请绘制该信号的时域波形。

(2) 请绘制该信号频率特性随着时间变化的关系(提示: 可用函数 `chirp` 产生线性调频信号, 用函数 `spectrogram` 来演示频率与时间的变化关系, 即短时傅里叶变换)。

24. 设信号  $x(t) = 3\cos(2\pi f_1 t) + 5\cos(2\pi f_2 t)$ , 其中  $f_1 = 431.1\text{Hz}$ ,  $f_2 = 433.3\text{Hz}$ ,  $f_s = 2048\text{Hz}$ , 试分别用 DFT 算法和 CZT 算法分析该信号的频谱, 其中 DFT 点数取 4096, CZT 点数取 1024,  $A = \exp(j2\pi \cdot 428/f_s)$ ,  $W = \exp(-j2\pi \cdot 0.01/f_s)$ (提示: 可用函数 `czt` 计算线性调频  $z$  变换)。

25. 已知信号  $x(n)$  为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试用 CZT 算法计算该信号前 30 点的频谱, 假设  $A_0 = 0.8$ ,  $W_0 = 1.2$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\phi_0 = \frac{2\pi}{20}$ 。