CHAPTER 1 第一章

线性规划及单纯形法

第一节　线性规划问题及其数学模型

一、问题的提出

在生产和经营等管理工作中，需要经常进行计划或规划。虽然各行各业计划和规划的内容千差万别，但其共同点均可归结为：在现有各项资源条件的限制下，如何确定方案，使预期目标达到最优；或为了达到预期目标，确定使资源消耗为最少的方案。

例 1　美佳公司计划制造Ⅰ、Ⅱ两种家电产品。已知各制造一件时分别占用设备 A 和设备 B 的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况，如表 1-1 所示。问：该公司应制造两种家电各多少件，使获取的利润最大？

表　1-1

项目	Ⅰ	Ⅱ	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

例 2　捷运公司在下一年度 1 月至 4 月的 4 个月内拟租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积列于表 1-2。仓库租借费用随合同期而定，期限越长，折扣越大，具体数字见表 1-3。租借仓库的合同每月初都可办理，每份合同具体规定租用面积和期限。因此该公司可根据需要，在任何一个月初办理租借合同。每次办理时可签一份合同，也可签若干份租用面积和租借期限不同的合同。试确定该公司签订租借合同的最优决策，目的是使所付租借费用最小。

表　1-2　　100 m^2

月份	1	2	3	4
所需仓库面积	15	10	20	12

表　1-3　　元/100 m^2

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费	2 800	4 500	6 000	7 300

二、线性规划问题的数学模型

用数学语言对例 1 和例 2 进行描述。

例 1 中先用变量 x_1 和 x_2 分别表示美佳公司制造家电Ⅰ和家电Ⅱ的数量。这时该公司可获取的利润为（$2x_1+x_2$）元，令 $z=2x_1+x_2$，因问题中要求获取的利润为最大，即 max z。又 z 是该公司能获取的利润的目标值，它是变量 x_1，x_2 的函数，称为目标函数。x_1，x_2 的取值受到设备 A、B 和调试工序能力的限制，用于描述限制条件的数学表达式称为约束条件。由此例 1 的数学模型可表示为

目标函数
$$\max z=2x_1+x_2$$

约束条件
$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_2\leqslant 15 & (1.1a)\\ 6x_1+2x_2\leqslant 24 & (1.1b)\\ x_1+x_2\leqslant 5 & (1.1c)\\ x_1,\ x_2\geqslant 0 & (1.1d)\end{cases}$$

模型中式（1.1a）和式（1.1b）分别表示家电Ⅰ、Ⅱ的制造件数受设备 A、B 的能力限制，式（1.1c）表示受调试工序能力的限制；式（1.1d）称为变量的非负约束，表明家电Ⅰ、Ⅱ制造数量不可能为负值。符号 s.t.（subject to 的缩写）表示“约束于”。

例 2 中若用变量 x_{ij} 表示捷运公司在第 $i(i=1,\cdots,4)$个月初签订的租借期为 $j(j=1,\cdots,4)$ 个月的仓库面积的合同（单位为 100 m^2）。因 5 月份起该公司不需要租借仓库，故 x_{24}，x_{33}，x_{34}，x_{42}，x_{43}，x_{44} 均为零。该公司希望总的租借费用为最小，则有如下数学模型：

目标函数
$$\min z=2\,800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4\,500(x_{12}+x_{22}+x_{32})+6\,000(x_{13}+x_{23})+7\,300x_{14}$$

约束条件
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\geqslant 15\\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\geqslant 10\\ x_{13}+x_{14}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}\geqslant 20\\ x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41}\geqslant 12\\ x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,\cdots,4;\ j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

这个模型中的约束条件分别表示当月初签订的租借合同的面积加上该月前签订的未到期合同的租借面积总和，应不少于该月所需的仓库面积。（注：本例的最优解为 $x_{11}=3$，$x_{31}=8$，$x_{14}=12$，其他变量取值均为零，$z^*=118\,400$）

上述两个例子表明，规划问题的数学模型由三个要素组成：（1）变量，或称决策变量，是问题中要确定的未知量，它用于表明规划中的用数量表示的方案、措施，可由决策者决定和控制；（2）目标函数，它是决策变量的函数，按优化目标分别在这个函数前加上 max 或 min；（3）约束条件，指决策变量取值时受到的各种资源条件的限制，通常表达为含决策变量函数的等式或不等式。如果规划问题的数学模型中，决策变量的取值是连续的，目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是含决策变量的线性等式或不等式，则该类规划问题的数学模型称为线性规划的数学模型。

实际问题中线性的含义：一是严格的比例性，如生产某产品对资源的消耗量和可获取的利润，同其生产数量严格成比例；二是可叠加性，如生产多种产品时，可获取的总利润是各项产品的利润之和，对某项资源的消耗量应等于各产品对该项资源的消耗量的和。三是可分性，即模型中的变量可以取值为小数、分数或某一实数。四是确定性，指模型中的参数 c_j，a_{ij}，b_i 均为确定的常数。很多实际问题往往不符合上述条件，例如每件产品售价 3 元，但成批购买就可得到折扣优惠。又如购一张从北京到纽约的机票为 6 000 元，从哈尔滨到北京的机票为 700 元，两者总计 6 700 元。但如果购同一航空公司的联程机票，国内

部分就可以优惠甚至免费。因此对一些不符合线性条件的情况，在基本合理条件下，为处理问题方便，可看作近似满足线性条件。对三、四两种情况，将在随后的第二章、第五章中阐述。

假定线性规划问题中含 n 个变量，分别用 $x_j(j=1,\cdots,n)$表示，在目标函数中 x_j 的系数为 c_j（c_j 通常称为价值系数），x_j 的取值受 m 项资源的限制，用 $b_i(i=1,\cdots,m)$表示第 i 种资源的拥有量，用 a_{ij} 表示变量 x_j 取值为 1 个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量，通常称 a_{ij} 为技术系数或工艺系数。则一般线性规划问题的数学模型可表示为

$$\begin{aligned}&\max(\text{或 }\min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\&\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_2\\\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant0\end{cases}\end{aligned}\tag{1.2}$$

上述模型的简写形式为

$$\begin{aligned}&\max(\text{或}\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\&\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_i & (i=1,\cdots,m)\\x_j\geqslant0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}\end{aligned}\tag{1.3}$$

用向量形式表达时，上述模型可写为

$$\begin{aligned}&\max(\text{或 }\min)z=\boldsymbol{CX}\\&\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\end{aligned}\tag{1.4}$$

式（1.4）中，$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n);\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix};\boldsymbol{P}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix};\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$

用矩阵和向量形式来表示可写为

$$\begin{aligned}&\max(\text{或 }\min)z=\boldsymbol{CX}\\&\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant(\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 称为约束方程组（约束条件）的系数矩阵。

变量 x_j 的取值一般为非负，即 $x_j\geqslant0$；从数学意义上可以有 $x_j\leqslant0$。又如果变量 x_j 表示

第 j 种产品本期内产量相对于前期产量的增加值，则 x_j 的取值范围为（$-\infty$，$+\infty$），称 x_j 取值不受约束，或 x_j 无约束。

三、线性规划问题的标准形式

由于目标函数和约束条件在内容和形式上的差别，线性规划问题可以有多种表达式。为了便于讨论和制定统一的算法，规定线性规划问题的标准形式如下：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

标准形式的线性规划模型中，目标函数为求极大值（有些书上规定是求极小值），约束条件全为等式，约束条件右端常数项 b_i 全为非负值，变量 x_j 的取值全为非负值。对不符合标准形式（或称非标准形式）的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式。

1. 目标函数为求极小值，即为

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

因为求 $\min z$ 等价于求 $\max(-z)$，令 $z'=-z$，即化为

$$\max z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

2. 约束条件的右端项 $b_i<0$ 时，只需将等式或不等式两端同乘（–1），则等式右端项必大于零。

3. 约束条件为不等式。当约束条件为“≤”时，如 $6x_1+2x_2\leqslant 24$，可令 $x_3=24-6x_1-2x_2$，得 $6x_1+2x_2+x_3=24$，显然 $x_3\geqslant 0$。当约束条件为“≥”时，如有 $10x_1+12x_2\geqslant 18$，可令 $x_4=10x_1+12x_2-18$，得 $10x_1+12x_2-x_4=18$，$x_4\geqslant 0$。x_3 和 x_4 是新加上去的变量，取值均为非负，加到原约束条件中去的变量，其目的是使不等式转化为等式，其中 x_3 称为松弛变量，x_4 一般称为剩余变量，但也有称松弛变量的。松弛变量或剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源数和超出的资源数，均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为零。

4. 取值无约束的变量。如果变量 x 代表某产品当年计划数与上一年计划数之差，显然 x 的取值可能是正也可能为负，这时可令 $x=x'-x''$，其中 $x'\geqslant 0$，$x''\geqslant 0$，将其代入线性规划模型即可。

5. 对 $x\leqslant 0$ 的情况，令 $x'=-x$，显然 $x'\geqslant 0$。

例 3 将下述线性规划化为标准形式：

$$\min z=x_1+2x_2+3x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3\leqslant 9\\ -3x_1+x_2+2x_3\geqslant 4\\ 4x_1-2x_2-3x_3=-6\\ x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 取值无约束}\end{cases}$$

解　上述问题中令 $z'=-z$，$x_1'=-x_1$，$x_3=x_3'-x_3''$，其中 $x_3'\geqslant 0$，$x_3''\geqslant 0$，并按上述规则，该问题的标准形式为

$$\max z'=x_1'-2x_2-3x_3'+3x_3''+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1'+x_2+x_3'-x_3''+x_4=9\\3x_1'+x_2+2x_3'-2x_3''-x_5=4\\4x_1'+2x_2+3x_3'-3x_3''=6\\x_1',x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

第二节　图　解　法

对模型中只含两个变量的线性规划问题，可以通过在平面上作图的方法求解。一个线性规划问题有解，是指能找出一组 $x_j(j=1,\cdots,n)$，满足约束条件，称这组 x_j 为问题的可行解。通常线性规划问题总是含有多个可行解，称全部可行解的集合为可行域，可行域中使目标函数值达到最优的可行解称为最优解。对不存在可行解的线性规划问题，称该问题无解。图解法求解的目的，一是判别线性规划问题的求解结局；二是在存在最优解的条件下，把问题的最优解找出来。

一、图解法的步骤

图解法的步骤可概括为：在平面上建立直角坐标系；图示约束条件，找出可行域或判别是否存在可行域；图示目标函数和寻找最优解。下面通过上述例 1 来具体说明。先将例 1 的数学模型重列如下：

$$\max z=2x_1+x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2\leqslant 15 & (1.5a)\\6x_1+2x_2\leqslant 24 & (1.5b)\\x_1+x_2\leqslant 5 & (1.5c)\\x_1,x_2\geqslant 0 & (1.5d)\end{cases}$$

1. 以变量 x_1 为横坐标轴，x_2 为纵坐标轴画出直角平面坐标系，并适当选取单位坐标长度。由变量的非负约束条件（1.5d）知，满足该约束条件的解（对应坐标系中的一个点）均在第Ⅰ象限内。

2. 图示约束条件，找出可行域。约束条件（1.5a）可分解为 $5x_2=15$ 和 $5x_2<15$，前者是平行于坐标轴 x_1 的直线 $x_2=3$，后者为位于这条直线下方的半平面，由此 $5x_2\leqslant 15$ 是位于含直线 $x_2=3$ 的点及其下方的半平面，见图 1-1。类似地，约束条件（1.5b）在坐标系中是含 $6x_1+2x_2=24$ 这条直线上的点及其左下方的半平面，约束条件（1.5c）是含直线 $x_1+x_2=5$ 上的点及其左下方的半平面。同时满足约束条件（1.5a）～（1.5d）的点如图 1-2 所示，图中凸多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 所包含的区域（用阴影线标示）是例 1 线性规划问题的可行域。

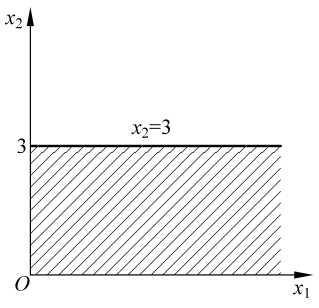


图　1-1

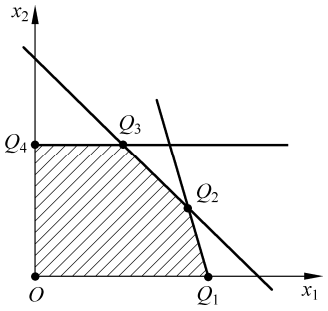


图　1-2

3. 图示目标函数。由于 z 是一个要优化的目标函数值，随 z 的变化，$z=2x_1+x_2$ 是斜率为（－2）的一组平行的直线，见图 1-3，图中向量 $\boldsymbol{P}$ 代表目标函数值 z 的增大方向。

4. 最优解的确定。因最优解是可行域中使目标函数值达到最优的点，将图 1-2 和图 1-3 合并得到图 1-4，可以看出，当代表目标函数的那条直线由原点开始向右上方移动时，z 的值逐渐增大，一直移动到目标函数的直线与约束条件包围成的凸多边形相切时为止，切点就代表最优解的点。因为再继续向右上方移动，z 值仍然可以增大，但在目标函数的直线上找不出一个点位于约束条件包围成的凸多边形内部或边界上。

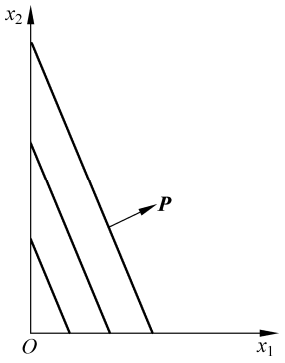


图　1-3

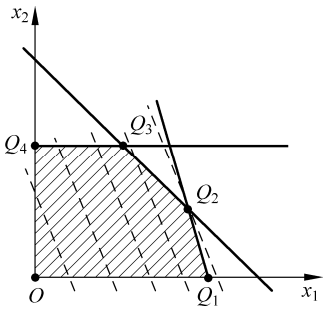


图　1-4

本例中目标函数直线与凸多边形的切点是 Q_2，该点坐标可由求解直线方程 $6x_1+2x_2=24$ 和 $x_1+x_2=5$ 得到，为（x_1, x_2）=（3.5,1.5）。将其代入目标函数得 $z=8.5$，即美佳公司每天制造 3.5 件家电Ⅰ、1.5 件家电Ⅱ，能获得最大利润。

二、线性规划问题求解的几种可能结局

例 1 用图解法得到的最优解是唯一的。但对线性规划问题的求解还可能出现下列结果。

1. 无穷多最优解。如将例 1 中的目标函数改变为 $\max z=3x_1+x_2$，则表示目标函数的直线族恰好与约束条件（1.5b）平行。当目标函数向优化方向移动时，与可行域不是在一个点上，而是在 Q_1Q_2 线段上相切，见图 1-5。这时点 Q_1、Q_2 及 Q_1 与 Q_2 之间的所有点都使目标函数 z 达到最大值，即有无穷多最优解，或多重最优解。

2. 无界解。如果例 1 中只包含约束条件（1.5a）和（1.5d），这时可行域可伸展到无穷，即变量 x_1 的取值也可无限增大，不受限制，由此目标函数值也可增大至无穷（见图 1-6）。这种情况下问题的最优解无界。产生无界解的原因是在建立实际问题的数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件。

3. 无解，或无可行解。例如下述线性规划模型：

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解时看出不存在满足所有约束的公共区域（可行域），见图 1-7，说明问题无解。其原因是模型的约束条件之间存在矛盾，建模时有错误。

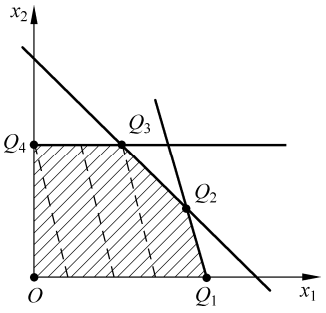


图　1-5

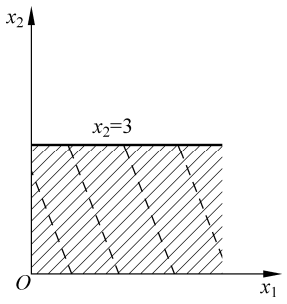


图　1-6

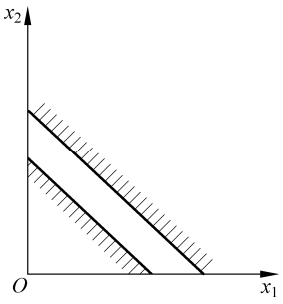


图　1-7

三、由图解法得到的启示

图解法虽只能用来求解只具有两个变量的线性规划问题，但它的解题思路和从几何上直观得到的一些概念判断，对下面要讲的求解一般线性规划问题的单纯形法有很大启示。

1. 求解线性规划问题时，解的情况有：唯一最优解、无穷多最优解、无界解、无可行解。

2. 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。

3. 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定是可行域的凸集的某个顶点。

4. 解题思路是，先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值。比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大，如果为否，则该顶点就是最优解的点或最优解的点之一，否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点，重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止。

在单纯形法原理一节中，将对上述第 2、3 两点进行证明，并建立起凸集顶点的代数概念特征，然后通过代数计算实现第 4 点的解题思路。

第三节　单纯形法原理

一、线性规划问题的解的概念

给出标准形式的线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.6}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,\cdots,m) & (1.7)\\ x_j \geqslant 0 \qquad\quad (j=1,\cdots,n) & (1.8)\end{cases}$$

可行解 满足上述约束条件（1.7）和（1.8）的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解 使目标函数（1.6）达到最大值的可行解称为最优解。

基 设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组（1.7）的 $m\times n$ 阶系数矩阵（设 $n>m$），其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中的每一个列向量 $\boldsymbol{P}_j$（$j=1,\cdots,m$）称为基向量，与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为基变量。线性规划中除基变量以外的变量称为非基变量。

基解 在约束方程组（1.7）中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又因为有 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，根据克莱姆规则（Cramer rule），由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\boldsymbol{X_B}=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$。将这个解加上非基变量取 0 的值有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基解。显然在基解中变量取非零值的个数不大于方程数 m，故基解的总数不超过 C_n^m 个。

基可行解 满足变量非负约束条件（1.8）的基解称为基可行解。

可行基 对应于基可行解的基称为可行基。

例 4 找出下述线性规划问题的全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解。

$$\max z=2x_1+3x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \quad +x_3 \quad\quad\quad = 5 \\ x_1+2x_2 \quad +x_4 \quad\quad = 10 \\ \quad\ x_2 \quad\quad\ +x_5 = 4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 该线性规划问题的全部基解见表 1-4 中的①～⑧，打√者为基可行解，注*者为最优解，$z^*=19$。

表 1-4

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	是否基可行解
①	0	0	5	10	4	5	√
②	0	4	5	2	0	17	√
③	5	0	0	5	4	10	√
④	0	5	5	0	−1	20	×
⑤	10	0	−5	0	4	15	×
⑥	5	2.5	0	0	1.5	17.5	√
⑦	5	4	0	−3	0	22	×
⑧	2	4	3	0	0	19*	√

二、凸集及其顶点

凸集　对简单的几何形体可以直观地判断其凹凸性，但在高维空间，只能给出点集的解析表达式，因此只能用数学解析式判断。凸集的概念为：如果集合 $\boldsymbol{C}$ 中任意两个点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，其连线上的所有点也都是集合 $\boldsymbol{C}$ 中的点，称 $\boldsymbol{C}$ 为凸集。由于 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的连线可表示为

$$a\boldsymbol{X}_1+(1-a)\boldsymbol{X}_2 \quad (0<a<1)$$

因此，凸集定义用数学解析式可表示为：对任何 $\boldsymbol{X}_1\in\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}_2\in\boldsymbol{C}$，有 $a\boldsymbol{X}_1+(1-a)\boldsymbol{X}_2\in\boldsymbol{C}$（$0<a<1$），则称 $\boldsymbol{C}$ 为凸集，在图 1-8 中，（a）、（b）是凸集，（c）、（d）不是凸集。

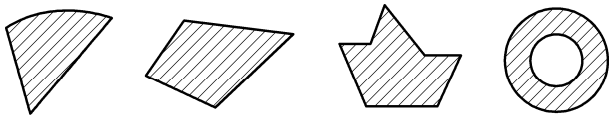


图　1-8

顶点　凸集 $\boldsymbol{C}$ 中满足下述条件的点 $\boldsymbol{X}$ 称为顶点：如果 $\boldsymbol{C}$ 中不存在任何两个不同的点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，使 $\boldsymbol{X}$ 成为这两个点连线上的一个点。或者这样叙述：对任何 $\boldsymbol{X}_1\in\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}_2\in\boldsymbol{C}$，不存在 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_1+(1-a)\boldsymbol{X}_2(0<a<1)$，则称 $\boldsymbol{X}$ 是凸集 $\boldsymbol{C}$ 的顶点。

三、几个基本定理的证明

定理 1　若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。

证　若满足线性规划约束条件 $\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b}$ 的所有点组成的几何图形 $\boldsymbol{C}$ 是凸集，根据凸集定义，$\boldsymbol{C}$ 内任意两点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 连线上的点也必然在 $\boldsymbol{C}$ 内，下面给予证明。

设 $\boldsymbol{X}_1=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n})^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 内任意两点，即 $\boldsymbol{X}_1\in C$，$\boldsymbol{X}_2\in C$，将 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 代入约束条件有

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_{1j}=\boldsymbol{b},\ \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_{2j}=\boldsymbol{b} \tag{1.9}$$

$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 连线上任意一点可以表示为

$$\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_1+(1-a)\boldsymbol{X}_2 \quad (0<a<1) \tag{1.10}$$

将式（1.9）代入式（1.10）得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j&=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j[ax_{1j}+(1-a)x_{2j}]\\&=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j ax_{1j}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_{2j}-\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j ax_{2j}\\&=a\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-a\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_1+(1-a)\boldsymbol{X}_2\in\boldsymbol{C}$。由于集合中任意两点连线上的点均在集合内，所以 $\boldsymbol{C}$ 为凸集。

引理　线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)$ 为基可行解的充要条件是 $\boldsymbol{X}$ 的正分量所对

应的系数列向量是线性独立的。

证 （1）必要性。由基可行解的定义显然成立。

（2）充分性。若向量 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$ 线性独立，则必有 $k\leqslant m$；当 $k=m$ 时，它们恰好构成一个基，从而 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$ 为相应的基可行解。当 $k<m$ 时，则一定可以从其余列向量中找出（$m-k$）个与 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$ 构成一个基，其对应的解恰为 $\boldsymbol{X}$，所以根据定义它是基可行解。

定理 2 线性规划问题的基可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应线性规划问题可行域（凸集）的顶点。

证 本定理需要证明：$\boldsymbol{X}$ 是可行域顶点 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{X}$ 是基可行解。下面采用的是反证法，即证明：$\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解。下面分两步来证明。

（1）$\boldsymbol{X}$ 不是基可行解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点。

不失一般性，假设 $\boldsymbol{X}$ 的前 m 个分量为正，故有

$$\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

由引理知 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $\delta_i(i=1,\cdots,m)$，使得有

$$\delta_1\boldsymbol{P}_1+\delta_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+\delta_m\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{0} \tag{1.12}$$

式（1.12）乘上一个不为零的数 μ 得

$$\mu\delta_1\boldsymbol{P}_1+\mu\delta_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+\mu\delta_m\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{0} \tag{1.13}$$

式（1.13）+式（1.11）得：$(x_1+\mu\delta_1)\boldsymbol{P}_1+(x_2+\mu\delta_2)\boldsymbol{P}_2+\cdots+(x_m+\mu\delta_m)\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{b}$

式（1.11）−式（1.13）得：$(x_1-\mu\delta_1)\boldsymbol{P}_1+(x_2-\mu\delta_2)\boldsymbol{P}_2+\cdots+(x_m-\mu\delta_m)\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{b}$

令

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=[(x_1+\mu\delta_1),(x_2+\mu\delta_2),\cdots,(x_m+\mu\delta_m),0,\cdots,0]$$

$$\boldsymbol{X}^{(2)}=[(x_1-\mu\delta_1),(x_2-\mu\delta_2),\cdots,(x_m-\mu\delta_m),0,\cdots,0]$$

又 μ 可以这样来选取，使得对所有 $i=1,\cdots,m$ 有

$$x_i\pm\mu\delta_i\geqslant 0$$

由此 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}^{(2)}\in\boldsymbol{C}$，又 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{(2)}$，即 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点。

（2）$\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解。

不失一般性，设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)$ 不是可行域的顶点，因而可以找到可行域内另外两个不同点 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Z}$，有 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{Y}+(1-a)\boldsymbol{Z}(0<a<1)$，或可写为

$$x_j=ay_j+(1-a)z_j\quad(0<a<1;j=1,\cdots,n)$$

因 $a>0$，$1-a>0$，故当 $x_j=0$ 时，必有 $y_j=z_j=0$

因有

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\sum_{j=1}^{r}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b}$$

故有

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j y_j=\sum_{j=1}^{r}\boldsymbol{P}_j y_j=\boldsymbol{b} \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j z_j=\sum_{j=1}^{r}\boldsymbol{P}_j z_j=\boldsymbol{b} \tag{1.15}$$

式（1.14）－式（1.15）得

$$\sum_{j=1}^{r}(y_j - z_j)\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{0}$$

因 $(y_j - z_j)$ 不全为零，故 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_r$ 线性相关，即 $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解。

定理 3　若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。

证　设 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是线性规划的一个最优解，$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$ 是目标函数的最大值。若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是基可行解，由定理 2 知 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，一定能在可行域内找到通过 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的直线上的另外两个点 $(\boldsymbol{X}^{(0)} + \mu\delta)\geqslant 0$ 和 $(\boldsymbol{X}^{(0)} - \mu\delta)\geqslant 0$。将这两个点代入目标函数有

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}^{(0)} + \mu\delta) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} + \boldsymbol{C}\mu\delta$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}^{(0)} - \mu\delta) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} - \boldsymbol{C}\mu\delta$$

因 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为目标函数的最大值，故有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} + \boldsymbol{C}\mu\delta$$
$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} - \boldsymbol{C}\mu\delta$$

由此 $\boldsymbol{C}\mu\delta = 0$，即有 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}^{(0)} + \mu\delta) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}^{(0)} - \mu\delta)$。如果 $(\boldsymbol{X}^{(0)} + \mu\delta)$ 或 $(\boldsymbol{X}^{(0)} - \mu\delta)$ 仍不是基可行解，按上面的方法继续做下去，最后一定可以找到一个基可行解，其目标函数值等于 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)}$，问题得证。

四、单纯形法迭代原理

由上述定理 3 可知，如果线性规划问题存在最优解，一定有一个基可行解是最优解。因此单纯形法迭代的基本思路是：先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如为否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止。

1. 确定初始基可行解

对标准型的线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} & (1.16) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\cdots,n) & (1.17) \end{cases}$$

在约束条件（1.16）的变量的系数矩阵中总会存在一个单位矩阵

$$(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

当线性规划的约束条件均为≤号时，其松弛变量 $x_{s_1},\cdots,x_{sm}$ 的系数矩阵即为单位矩阵。对约束条件为≥或＝的情况，为便于找到初始基可行解，可以构造人工基，人为产生一个单位矩阵，这将在本章第五节中讨论。

式（1.18）中 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 称为基向量，同其对应的变量 $x_1,\cdots,x_m$ 称为基变量，模型中的其他变量 $x_{m+1}, x_{m+2},\cdots, x_n$ 称为非基变量。在式（1.16）中令所有非基变量等于零，即可找到一个解

$$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=(b_1,\cdots,b_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

因有 $\boldsymbol{b}\geqslant 0$，故 $\boldsymbol{X}$ 满足约束（1.17），是一个基可行解。

2. 从一个基可行解转换为相邻的基可行解

定义：两个基可行解称为相邻的，如果它们之间变换且仅变换一个基变量。

设初始基可行解中的前 m 个为基变量，即

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

代入约束条件（1.16）有

$$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}_i x_i^0=\boldsymbol{b} \tag{1.19}$$

写出（1.19）系数矩阵的增广矩阵

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{P}_m & \boldsymbol{P}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{P}_j & \cdots & \boldsymbol{P}_n & \boldsymbol{b}\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{cccccccc|c}1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)\end{array}$$

因 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 是一个基，其他向量 $\boldsymbol{P}_j$ 可用这个基的线性组合来表示，有

$$\boldsymbol{P}_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{P}_i$$

或

$$\boldsymbol{P}_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{0} \tag{1.20}$$

将式（1.20）乘上一个正的数 $\theta>0$ 得

$$\theta\left(\boldsymbol{P}_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{P}_i\right)=\boldsymbol{0} \tag{1.21}$$

式（1.19）+式（1.21）并经过整理后有

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i^0-\theta a_{ij})\boldsymbol{P}_i+\theta\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{b} \tag{1.22}$$

由式（1.22）找到满足约束方程组 $\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b}$ 的另一个点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，有

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(x_1^0-\theta a_{1j},\cdots,x_m^0-\theta a_{mj},0,\cdots,\theta,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的第 j 个坐标的值。要使 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 是一个基可行解，因规定 $\theta>0$，故应对所有 $i=1,\cdots,m$，存在

$$x_i^0-\theta a_{ij}\geqslant 0 \tag{1.23}$$

令这 m 个不等式中至少有一个等号成立。因为当 $a_{ij}\leqslant 0$ 时，式（1.23）显然成立，故可令

$$\theta=\min_i\left\{\frac{x_i^0}{a_{ij}}\middle|a_{ij}>0\right\}=\frac{x_i^0}{a_{lj}} \tag{1.24}$$

由式（1.24）

$$x_i^0-\theta a_{ij}\begin{cases}=0, & (i=l)\\ \geqslant 0, & (i\neq l)\end{cases}$$

故 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 是一个可行解。又因与变量 $x_1^1,\cdots,x_{l-1}^1,x_{l+1}^1,\cdots,x_m^1,x_j$ 对应的向量，经重新排列后加上 $\boldsymbol{b}$ 列有如下形式矩阵（不含 $\boldsymbol{b}$ 列）和增广矩阵（含 $\boldsymbol{b}$ 列）：

$$\begin{array}{cccccccc}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{P}_{l-1} & \boldsymbol{P}_j & \boldsymbol{P}_{l+1} & \cdots & \boldsymbol{P}_m\end{array}\quad\boldsymbol{b}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & b_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2j} & 0 & \cdots & 0 & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{l-1,j} & 0 & \cdots & 0 & b_{l-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{lj} & 0 & \cdots & 0 & b_l\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l+1,j} & 1 & \cdots & 0 & b_{l+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mj} & 0 & \cdots & 1 & b_m\end{array}\right)$$

因 $a_{lj}>0$，故由上述矩阵元素组成的行列式不为零，$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_j,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 是一个基。

在上述增广矩阵中进行行的初等变换，将第 l 行乘上（$1/a_{lj}$），再分别乘以（$-a_{ij}$）（$i=1,\cdots,l-1,l+1,\cdots,m$）加到各行上去，则增广矩阵左半部变成单位矩阵，又因 $b_l/a_{lj}=\theta$，故

$$\boldsymbol{b}=(b_1-\theta a_{1j},\cdots,b_{l-1}-\theta a_{l-1,j},\theta,b_{l+1}-\theta a_{l+1,j},\cdots,b_m-\theta a_{mj})^{\mathrm{T}}$$

由此 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 是与 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 相邻的基可行解，且由基向量组成的矩阵仍为单位矩阵。

3. 最优性检验和解的判别

将基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 分别代入目标函数得

$$z^{(0)}=\sum_{i=1}^m c_i x_i^0$$

$$z^{(1)}=\sum_{i=1}^m c_i(x_i^0-\theta a_{ij})+\theta c_j=\sum_{i=1}^m c_i x_i^0+\theta\left(c_j-\sum_{i=1}^m c_i a_{ij}\right)=z^{(0)}+\theta\left(c_j-\sum_{i=1}^m c_i a_{ij}\right) \tag{1.25}$$

式（1.25）中因 $\theta>0$ 为给定，所以只要有 $\left(c_j-\sum_{i=1}^m c_i a_{ij}\right)>0$，就有 $z^{(1)}>z^{(0)}$。$\left(c_j-\sum_{i=1}^m c_i a_{ij}\right)$ 通常简写为（c_j-z_j）或 σ_j，它是对线性规划问题的解进行最优性检验的标志。由此可以得出用单纯形法求解线性规划问题时，结局为唯一最优解、无穷多最优解及无界解的判别标志如下：

（1）当所有的 $\sigma_j\leqslant 0$ 时，表明现有顶点（基可行解）的目标函数值比相邻各顶点（基可行解）的目标函数值都大，根据线性规划问题的可行域是凸集的证明及凸集的性质，可以判定现有顶点对应的基可行解即为最优解。

（2）当所有的 $\sigma_j\leqslant 0$，又对某个非基变量 x_j 有 $c_j-z_j=0$，且按式（1.24）可以找到 $\theta>0$，这表明可以找到另一顶点（基可行解）使目标函数值也达到最大。由于该两点连线

上的点也属可行域内的点，且目标函数值相等，即该线性规划问题有无穷多最优解。反之，当所有非基变量的 $\sigma_j<0$ 时，线性规划问题具有唯一最优解。

（3）如果存在某个 $\sigma_j>0$，又 $\boldsymbol{P}_j\leqslant 0$，由式（1.23）看出对任意的 $\theta>0$，均有 $x_i^0-\theta a_{ij}\geqslant 0$，因而 θ 的取值可无限增大不受限制。由式（1.25）看到 $z^{(1)}$ 也可无限增大，表明线性规划有无界解。

对线性规划问题无可行解的判别将在本章第五节中讨论。

第四节　单纯形法计算步骤

根据上节中讲述的原理，单纯形法的计算步骤如下。

第 1 步：求初始基可行解，列出初始单纯形表。

对非标准型的线性规划问题首先要化成标准形式。由于总可以设法使约束方程的系数矩阵中包含一个单位矩阵（$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m$），以此作为基求出问题的一个初始基可行解。

为检验一个基可行解是否最优，需要将其目标函数值与相邻基可行解的目标函数值进行比较。为了书写规范和便于计算，对单纯形法的计算设计了一种专门表格，称为单纯形表（见表 1-5）。迭代计算中每找出一个新的基可行解时，就重画一张单纯形表。含初始基可行解的单纯形表称初始单纯形表；含最优解的单纯形表称最终单纯形表。

表　1-5

$c_j\rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1	…	0	…	a_{1j}	…	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	…	0	…	a_{2j}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮
c_m	x_m	b_m	0	…	1	…	a_{mj}	…	a_{mn}
c_j-z_j			0	…	0	…	$c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$	$\cdots$	$c_n-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{in}$

单纯形表结构为：表的第 2～3 列列出基可行解中的基变量及其取值。接下来列出问题中所有变量，基变量下面列是单位矩阵，非基变量 x_j 下面数字是该变量系数向量 $\boldsymbol{P}_j$ 表为基向量线性组合时的系数。因 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 是单位向量，故有

$$\boldsymbol{P}_j=a_{1j}\boldsymbol{P}_1+a_{2j}\boldsymbol{P}_2+\cdots+a_{mj}\boldsymbol{P}_m$$

表 1-5 最上端的一行数是各变量在目标函数中的系数值，最左端一列数是与各基变量对应的目标函数中的系数值 $\boldsymbol{C_B}$。

对 x_j 只要将它下面这一列数字与 $\boldsymbol{C_B}$ 中同行的数字分别相乘，再用它上端的 c_j 值减去上述乘积之和有

$$\sigma_j=c_j-(c_1a_{1j}+c_2a_{2j}+\cdots+c_ma_{mj})=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij} \qquad (1.26)$$

对 $j=1,\cdots,n$，将分别按式（1.26）求得的检验数 σ_j，或写为（c_j-z_j）记入表的最下面一行。

第 2 步：最优性检验。

如表中所有检验数 $c_j - z_j \leqslant 0$，且基变量中不含有人工变量时，表中的基可行解即为最优解，计算结束。对基变量中含人工变量时的解的最优性检验将在下一节中讨论。当表中存在 $c_j - z_j > 0$ 时，如有 $\boldsymbol{P}_j \leqslant 0$，则问题为无界解，计算结束；否则转下一步。

第 3 步：从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表。

1. 确定换入基的变量。只要有检验数 $\sigma_j > 0$，对应的变量 x_j 就可作为换入基的变量，当有一个以上检验数大于零时，一般从中找出最大的一个 σ_k：

$$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

其对应的变量 x_k 作为换入基的变量（简称换入变量）。

2. 确定换出基的变量。根据上一节中确定 θ 的规则，对 P_k 列由式（1.24）计算得到

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \tag{1.27}$$

确定 x_l 是换出基的变量（简称换出变量）。元素 a_{lk} 决定了从一个基可行解到相邻基可行解的转移去向，取名主元素。

3. 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l，得到一个新的基（$\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{l-1},\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{P}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{P}_m$）。对应这个基可以找出一个新的基可行解，并相应地可以画出一个新的单纯形表（见表 1-6）。

在这个新的表中的基仍应是单位矩阵，即 $\boldsymbol{P}_k$ 应变换成单位向量。为此在表 1-5 中进行行的初等变换，并将运算结果填入表 1-6 相应格中。

（1）将主元素所在的一行数字除以主元素 a_{lk}，即有

$$\begin{cases} b'_l = b_l / a_{lk} \\ a'_{lj} = a_{lj} / a_{lk} \end{cases} \tag{1.28}$$

（2）将表 1-6 中刚计算得到的第 l 行数字乘以（$-a_{ik}$）加到表 1-5 的第 i 行数字上，记入表 1-6 的相应行。即有

$$\begin{aligned} b'_i &= b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} \cdot a_{ik} \quad (i \neq l) \\ a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \cdot a_{ik} \quad (i \neq l) \end{aligned} \tag{1.29}$$

（3）表 1-6 中各变量的检验数求法见式（1.26）。其中：

$$\begin{aligned} (c_l - z_l)' &= c_l - \frac{1}{a_{lk}} \left(-\sum_{i=1}^{l-1} c_i a_{ik} + c_k - \sum_{i=l+1}^{m} c_i a_{ik} \right) \\ &= -\frac{c_k}{a_{lk}} + \frac{1}{a_{lk}} \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} = -\frac{1}{a_{lk}} (c_k - z_k) \quad (j = l) \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} (c_j - z_j)' &= c_j - \left(\sum_{i=1}^{l-1} c_i a_{ij} + \sum_{i=l+1}^{m} c_i a_{ij} \right) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \left(-\sum_{i=1}^{l-1} c_i a_{ik} + c_k - \sum_{i=l+1}^{m} c_i a_{ik} \right) \\ &= \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \left(c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} \right) = (c_j - z_j) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} (c_k - z_k) \quad (j \neq l) \end{aligned} \tag{1.31}$$

表 1-6

$c_j\rightarrow$			c_1	…	c_l	…	c_m	…	c_j	…	c_k	…
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	…	x_l	…	x_m	…	x_j	…	x_k	…
c_1	x_1	$b_1-b_l\cdot\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	1	…	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	…	0	…	$a_{1j}-a_{1k}\cdot\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$	…	0	…
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	
c_k	x_k	$\frac{b_t}{a_{lk}}$	0	…	$\frac{1}{a_{lk}}$	…	0	…	$\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$	…	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	
c_m	x_m	$b_m-b_l\cdot\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	0	…	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	…	1	…	$a_{mj}-a_{mk}\cdot\frac{a_{lj}}{a_{lk}}$	…	0	…
c_j-z_j			0	…	$-\frac{c_k-z_k}{a_{lk}}$	…	0	…	$(c_j-z_j)-\frac{a_{lj}}{a_{lk}}(c_k-z_k)$	…	0	…

第 4 步：重复第 2、3 两步，一直到计算结束为止。

例 5 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z=2x_1+x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2\leqslant 15\\ 6x_1+2x_2\leqslant 24\\ x_1+x_2\leqslant 5\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 先将上述问题化成标准形式

$$\max z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2+x_3=15\\ 6x_1+2x_2+x_4=24\\ x_1+x_2+x_5=5\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

其约束条件系数矩阵的增广矩阵为

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_3\ \boldsymbol{P}_4\ \boldsymbol{P}_5\ \boldsymbol{b}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c}0&5&1&0&0&15\\6&2&0&1&0&24\\1&1&0&0&1&5\end{array}\right)\end{array}$$

$\boldsymbol{P}_3$，$\boldsymbol{P}_4$，$\boldsymbol{P}_5$ 是单位矩阵，构成一个基，对应变量 x_3, x_4, x_5 是基变量。令非基变量 x_1，x_2 等于零，即找到一个初始基可行解

$$\boldsymbol{X}=(0,0,15,24,5)^{\mathrm{T}}$$

以此列出初始单纯形表，见表 1-7。

表 1-7

$c_j\rightarrow$			2	1	0	0	0
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
c_j-z_j			2	1	0	0	0

因表中有大于零的检验数，故表中基可行解不是最优解。因 $\sigma_1>\sigma_2$，故确定 x_1 为换入变量。将 $\boldsymbol{b}$ 列除以 $\boldsymbol{P}_1$ 的同行数字得

$$\theta=\min\left(\infty,\frac{24}{6},\frac{5}{1}\right)=\frac{24}{6}=4$$

由此 6 为主元素，作为标志对主元素 6 加上方括号［　］，主元素所在行基变量 x_4 为换出变量。用换入变量 x_1 替换出变量 x_4，得到一个新的基 $\boldsymbol{P}_3$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_5$，按上述单纯形法计算第 3 步的（1）～（3），可以找到新的基可行解，并列出新的单纯形表，见表 1-8。

由于表 1-8 中还存在大于零的检验数 σ_2，故重复上述步骤得表 1-9。

表 1-9 中所有 $\sigma_j\leqslant 0$，且基变量中不含人工变量，故表中的基可行解 $\boldsymbol{X}=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{15}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$ 为最优解，代入目标函数得 $z=2\times\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=8\frac{1}{2}$。

表　1-8

$c_j\rightarrow$			2	1	0	0	0
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	2/6	0	1/6	0
0	x_5	1	0	［4/6］	0	− 1/6	1
c_j-z_j			0	1/3	0	− 1/3	0

表　1-9

$c_j\rightarrow$			2	1	0	0	0
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	− 15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	− 1/2
1	x_2	3/2	0	1	0	− 1/4	3/2
c_j-z_j			0	0	0	− 1/4	− 1/2

第五节　单纯形法的进一步讨论

一、人工变量法

在上述例 5 中，化为标准形式后约束条件的系数矩阵中含有单位矩阵，以此作初始基，使求初始基可行解和建立初始单纯形表都十分方便。但在下述例 6 中，化为标准形式后的约束条件的系数矩阵中不存在单位矩阵。

例 6　用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z=-3x_1+\quad x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\quad x_1+x_2+x_3\leqslant 4\\ -2x_1+x_2-x_3\geqslant 1\\ \qquad 3x_2+x_3=9\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解 先将其化成标准形式，有

$$\max z=-3x_1+\quad x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \quad\quad =4 & (1.32a)\\ -2x_1+x_2-x_3 \quad\quad -x_5=1 & (1.32b)\\ 3x_2+x_3 \quad\quad =9 & (1.32c)\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

这种情况可以添加两列单位向量 $\boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$，连同约束条件中的向量 $\boldsymbol{P}_4$ 构成单位矩阵

$$\begin{matrix} \boldsymbol{P}_4 & \boldsymbol{P}_6 & \boldsymbol{P}_7 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$ 是人为添加上去的，它相当于在上述问题的约束条件（1.32b）中添加变量 x_6，约束条件（1.32c）中添加变量 x_7，变量 x_6, x_7 相应称为人工变量。由于约束条件（1.32b）、（1.32c）在添加人工变量前已是等式，为使这些等式得到满足，因此在最优解中人工变量取值必须为零。为此，令目标函数中人工变量的系数为任意大的负值，用“$-M$”代表。“$-M$”称为“罚因子”，即只要人工变量取值大于零，目标函数就不可能实现最优，因而添加人工变量后，例 6 的数学模型形式就变为

$$\max z=-3x_1+x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \quad\quad\quad\quad =4\\ -2x_1+x_2-x_3 \quad\quad -x_5+x_6 \quad\quad =1\\ 3x_2+x_3 \quad\quad\quad\quad +x_7=9\\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,7) \end{cases}$$

该模型中与 $\boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$ 对应的变量 x_4, x_6, x_7 为基变量，令非基变量 x_1, x_2, x_3, x_5 等于零，即得到初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0,4,0,1,9)^{\mathrm{T}}$，并列出初始单纯形表。在单纯形法迭代运算中，$M$ 可当作一个数学符号一起参加运算。检验数中含 M 符号的，当 M 的系数为正时，该检验数为正；当 M 的系数为负时，该项检验数为负。例 6 添加人工变量后，用单纯形法求解的过程见表 1-10。

表 1-10

$c_j\rightarrow$			-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
$-M$	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
c_j-z_j			$-2M-3$	$4M$	1	0	$-M$	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
c_j-z_j			$6M-3$	0	$4M+1$	0	$3M$	$-4M$	0
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$	1/2	$-1/2$

续表

c_j-z_j			$6M-3$	0	$4M+1$	0	$3M$	$-4M$	0
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
−3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2	−1/2	1/6
c_j-z_j			0	0	3	0	3/2	$-M-3/2$	$-M+1/2$
0	x_4	0	0	0	0	1	−1/2	1/2	−1/2
0	x_2	5/2	−1/2	1	0	0	−1/4	1/4	1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4	−3/4	1/4
c_j-z_j			−9/2	0	0	0	−3/4	$-M+3/4$	$-M-1/4$

二、两阶段法

用大 M 法处理人工变量，在用手工计算求解时不会碰到麻烦。但用计算机求解时，对 M 就只能在计算机内输入一个机器最大字长的数字。如果线性规划问题中的 a_{ij}，b_i 或 c_j 等参数值与这个代表 M 的数相对比较接近，或远远小于这个数字，由于计算机计算时取值上的误差，有可能使计算结果发生错误。为了克服这个困难，可以对添加人工变量后的线性规划问题分两个阶段来计算，称两阶段法。

两阶段法的第一阶段是先求解一个目标函数中只包含人工变量的线性规划问题，即令目标函数中其他变量的系数取零，人工变量的系数取某个正的常数（一般取 1），在保持原问题约束条件不变的情况下求这个目标函数极小化时的解。显然在第一阶段中，当人工变量取值为 0 时，目标函数值也为 0。这时候的最优解就是原线性规划问题的一个基可行解。如果第一阶段求解结果最优解的目标函数值不为 0，也即最优解的基变量中含有非零的人工变量，表明原线性规划问题无可行解。

当第一阶段求解结果表明问题有可行解时，第二阶段是在原问题中去除人工变量，并从此可行解（即第一阶段的最优解）出发，继续寻找问题的最优解。

例 6 用两阶段法求解时，第一阶段的线性规划问题可写为

$$\min w = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4 \\ -2x_1+x_2-x_3-x_5+x_6 = 1 \\ 3x_2+x_3+x_7 = 9 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,7) \end{cases}$$

用单纯形法求解时，先将问题化成标准形式，单纯形法迭代的过程见表 1-11。

第二阶段是将表 1-11 中的人工变量 x_6, x_7 除去，目标函数回归到

$$\max z = -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

再从表 1-11 中的最后一个表出发，继续用单纯形法计算，求解过程见表 1-12。

表　1-11

$c_j\rightarrow$			0	0	0	0	0	−1	−1
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
−1	x_6	1	−2	[1]	−1	0	−1	1	0
−1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1

续表

c_j-z_j			−2	4	0	0	−1	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	−1	0
0	x_2	1	−2	1	−1	0	−1	1	0
−1	x_7	6	[6]	0	4	0	3	−3	1
c_j-z_j			6	0	4	0	3	−4	0
0	x_4	0	0	0	0	1	−1/2	1/2	−1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	−1/2	1/6
c_j-z_j			0	0	0	0	0	−1	−1

表 1-12

$c_j\rightarrow$			−3	0	1	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	−1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
−3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2
c_j-z_j			0	0	3	0	3/2
0	x_4	0	0	0	0	1	−1/2
0	x_2	5/2	−1/2	1	0	0	−1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4
c_j-z_j			−9/2	0	0	0	−3/4

三、单纯形法计算中的几个问题

1. 目标函数极小化时解的最优性判别。有些书中规定求目标函数值的极小化作为线性规划的标准形式，这时只需以所有检验数 $\sigma_j \geqslant 0$ 作为判别表中解是否最优的标志。

2. 退化。按最小比值 θ 来确定换出基的变量时，有时出现存在两个以上相同的最小比值，从而使下一个表的基可行解中出现一个或多个基变量等于零的退化解。退化解的出现原因是模型中存在多余的约束，使多个基可行解对应同一顶点。当存在退化解时，就有可能出现迭代计算的循环，尽管可能性极其微小。为避免出现计算的循环，1974 年勃兰特（Bland）提出了一个简便有效的规则：（1）当存在多个 $\sigma_j > 0$ 时，始终选取下标值为最小的变量作为换入变量；（2）当计算 θ 值出现两个以上相同的最小比值时，始终选取下标值为最小的变量作为换出变量。

3. 无可行解的判别。本章第三节单纯形法迭代原理中，讲述了用单纯形法求解时如何判别问题结局属唯一最优解、无穷多最优解和无界解。当线性规划问题中添加人工变量后，无论用人工变量法或两阶段法，初始单纯形表中的解因含非零人工变量，故实质上是非可行解。当求解结果出现所有 $\sigma_j \leqslant 0$ 时，如基变量中仍含有非零的人工变量（两阶段法求解时第一阶段目标函数值不等于零），表明问题无可行解。

例 7 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　在图解法一节中已看出本例无可行解（参见图 1-7）。现用单纯形法求解。在添加松弛变量和人工变量后，模型可写成

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

以 x_3, x_5 为基变量列出初始单纯形表，进行迭代计算，过程见表 1-13。表中当所有 $c_j - z_j \leqslant 0$ 时，基变量中仍含有非零的人工变量 $x_5 = 2$，故例 7 的线性规划问题无可行解。

表　1-13

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	$-M$
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	[1]	1	1	0	0
$-M$	x_5	6	2	2	0	-1	1
$c_j - z_j$			$2+2M$	$1+2M$	0	$-M$	0
2	x_1	2	1	1	1	0	0
$-M$	x_5	2	0	0	-2	-1	1
$c_j - z_j$			0	-1	$-2-2M$	$-M$	0

四、单纯形法小结

1. 对给定的线性规划问题应首先化为标准形式，选取或构造一个单位矩阵作为基，求出初始基可行解并列出初始单纯形表。对各种类型线性规划问题如何化为标准形式及如何选取初始基变量可参见表 1-14。

表　1-14

线性规划模型			化为标准形式
变量		$x_j \geqslant 0$	不变
		$x_j \leqslant 0$	令 $x_j' = -x_j$，则 $x_j' \geqslant 0$
		x_j 取值无约束	令 $x_j = x_j' - x_j''$，其中 $x_j' \geqslant 0$，$x_j'' \geqslant 0$
约束条件	右端项	$b_i \geqslant 0$	不变
		$b_i < 0$	约束条件两端乘“-1”
	形式	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_s = b_i$
		$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{ai} = b_i$
		$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{xi} + x_{ai} = b_i$

续表

线性规划模型			化为标准形式
目标函数	极大或极小	$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ $\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$	不变 令 $z'=-z$，化为求 $\max z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$
	变量前的系数	加松弛变量 x_s 时 加人工变量 x_a 时	$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+0x_s$ $\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-Mx_{ai}$

2. 单纯形法的计算步骤见图 1-9。

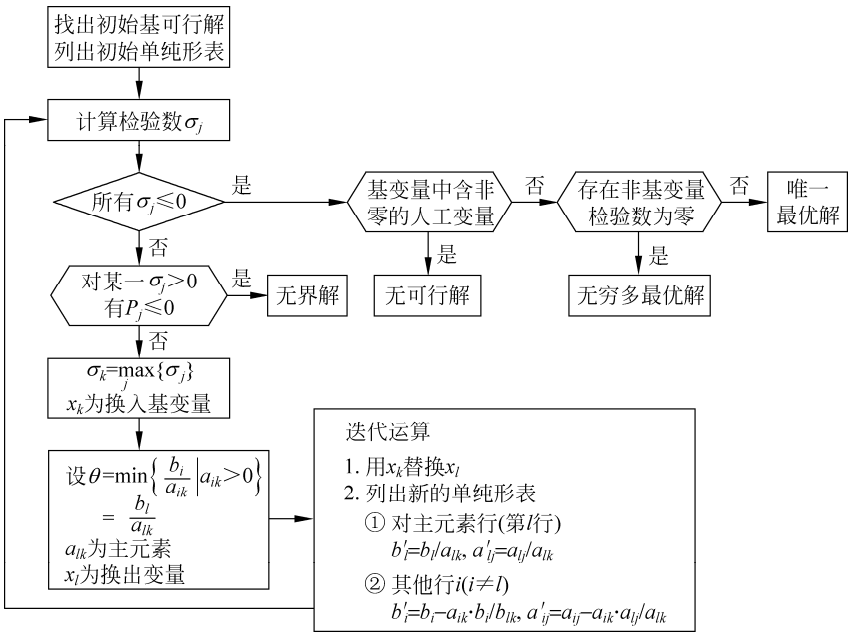


图 1-9　单纯形法的计算步骤框图

第六节　数据包络分析

一、有关概念

数据包络分析（data envelopment analysis，DEA）是一种基于线性规划的用于评价同类型组织工作绩效相对有效性的工具手段。这类组织例如学校、医院、银行的分支机构、超市的各营业部等，各自具有相同的投入和相同的产出。衡量这类组织之间的绩效高低，通常采用投入产出比这个指标，当各自的投入和产出均可折算成同一单位，如用货币来计量时，很容易计算出各自的投入产出比并按其大小进行绩效排序。但当被衡量的同类型组织有多项投入和多项产出，且不能折算成统一单位时，就无法算出投入产出比的数值，因

而就需要用下面的方法进行绩效比较。例如有 4 所小学 s_1、s_2、s_3 和 s_4，在校学生规模相同，均为 800 人，各校教职工数和建筑面积的投入见表 1-15。

用横坐标表示教职工数，纵坐标表示建筑面积，则表 1-15 中各校数据可用图标示，见图 1-10。

表　1-15

学校	s_1	s_2	s_3	s_4
教职工数/名	25	40	35	20
建筑面积/m^2	1 800	1 500	1 700	2 500

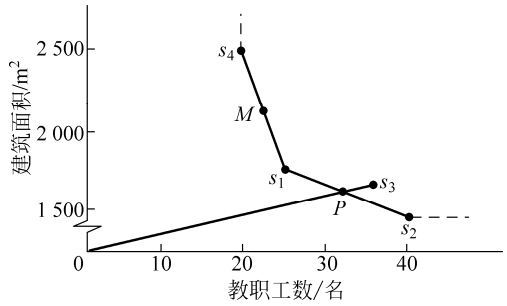


图　1-10

就培养 800 名学生来看，s_1、s_2、s_4 三所学校的投入处于 Pareto 最优状态，即不可能保持其中一项投入不变的情况下，减少另一项投入的水平，达到培养 800 名学生的目标。由 s_1，s_2，s_4 三点连成的折线被称为生产前沿面，凡前沿面上的点的投入状态均处于 Pareto 最优。例如点 s_1 和点 s_4 的连线的中间点 M，其坐标值为

$$0.5\begin{pmatrix}25\\1\,800\end{pmatrix}+0.5\begin{pmatrix}20\\2\,500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22.5\\2\,150\end{pmatrix}$$

即用 22.5 名教职工和 2 150 m^2 的建筑面积可组成培养 800 名学生的学校，并且不可能做到在减少其中一项投入的情况下而不增加另一项投入。

从 s_4 点作垂线向上延伸，从 s_2 点作水平线向右延伸（见图 1-10 中的虚线部分），则位于由虚线和折线包围的右上方的点组成生产可行集，即按这个集合中的点坐标数字的教职工和建筑面积的投入，按已列出学校的绩效水平，均能办成一所 800 名学生规模的学校。由图 1-10 可以看出，所谓生产前沿面是生产可行集的一条数据包络线，它是在现有绩效水平下举办 800 名学生规模学校，需要投入教职工和建筑面积的最低极限。称处于生产前沿面上的点为 DEA 有效。

学校 s_3 并非 DEA 有效。例如从 s_3 作一条垂线，交 s_1s_2 连线于点（35, 1 600）；通过 s_3 作一条水平线，交 s_1s_2 连线于点（30, 1 700）。这意味着若保持 35 名教职工不变，则只需 1 600 m^2 建筑面积，或保持 1 700 m^2 建筑面积不变，则只需教职工 30 人，就可以举办一个 800 名学生的学校。若作坐标原点与 s_3 的连线，交 s_1s_2 连线于点 P（33.54, 1 629.2）。对比 P 点与 s_3 点的投入，有 $\frac{33.54}{35}=\frac{1629.2}{1700}=0.958$，表明 s_3 的绩效只相当于 s_1 或 s_2 的 95.8%。

上面用作图方法衡量一个组织是否 DEA 有效，只适用于投入与产出变量数总和不超过 3 个的情况，当变量总数超过 3 个时，就需要借助线性规划方法。

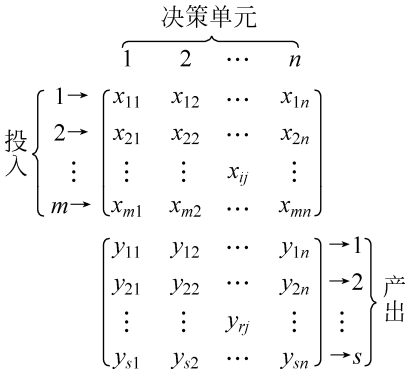


图 1-11

二、线性规划的数学模型

在 DEA 中通常将被衡量绩效的组织称为决策单元（decision making unit，DMU）。设有 n 个决策单元（$j=1,\cdots,n$），每个决策单元有相同的 m 项投入（$i=1,\cdots,m$）和相同的 s 项产出（$r=1,\cdots,s$）。用 x_{ij} 表示第 j 个决策单元的第 i 项投入，用 y_{rj} 表示第 j 个决策单元的第 r 项产出，图 1-11 比较形象地表示出这 n 个决策单元的投入产出关系。现在要衡量某一决策单元 j_0 是否 DEA 有效，即是否处于由包络线组成的生产前沿面上，为此先构造一个由 n 个决策单元线性组合成的假想决策单元。这个假想决策单元的第 i 项投入为 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}(i=1,\cdots,m)$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1(\lambda_j\geqslant 0)$，该假想决策单元的第 r 项产出为 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}(r=1,\cdots,s)$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1(\lambda_j\geqslant 0)$。如果这个假想单元的各项产出均不低于 j_0 决策单元的各项产出，它的各项投入均不高于 j_0 决策单元的各项投入，即有

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_r\geqslant y_{rj_0}\quad (r=1,\cdots,s)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leqslant E\cdot x_{ij_0}\quad (i=1,\cdots,m,E<1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\quad \lambda_j\geqslant 0\quad (j=1,\cdots,n)$$

这说明 j_0 决策单元不处在生产前沿面上。基于上述可写出如下线性规划的数学模型：

$$\min E$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\geqslant y_{rj_0} & (r=1,\cdots,s)\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leqslant E x_{ij_0} & (i=1,\cdots,m)\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\quad \lambda_j\geqslant 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}\tag{1.33}$$

当求解结果有 $E<1$ 时，则 j_0 决策单元非 DEA 有效，否则 j_0 决策单元 DEA 有效。

例 8 振华银行 4 个分理处的投入产出情况如表 1-16 所示（产出单位：处理笔数/月）。要求分别确定各分理处的运行是否 DEA 有效。

表　1-16

分理处	投入		产出		
	职员数/人	营业面积/m^2	储蓄存取	贷款	中间业务
分理处 1	15	140	1 800	200	1 600
分理处 2	20	130	1 000	350	1 000
分理处 3	21	120	800	450	1 300
分理处 4	20	135	900	420	1 500

解　若先确定分理处 1 的运行是否 DEA 有效。仿式（1.33）列出线性规划模型如下：

$$\min E$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}1\,800\lambda_1+1\,000\lambda_2+800\lambda_3+900\lambda_4\geqslant 1\,800 & (1.34a)\\ 200\lambda_1+350\lambda_2+450\lambda_3+420\lambda_4\geqslant 200 & (1.34b)\\ 1\,600\lambda_1+1\,000\lambda_2+1\,300\lambda_3+1\,500\lambda_4\geqslant 1\,600 & (1.34c)\\ 15\lambda_1+20\lambda_2+21\lambda_3+20\lambda_4\leqslant 15E & (1.34d)\\ 140\lambda_1+130\lambda_2+120\lambda_3+135\lambda_4\leqslant 140E & (1.34e)\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1\\ \lambda_j\geqslant 0\quad (j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

求解结果为 $E=1$，说明分理处 1 的运行为 DEA 有效。在上述模型中，只要将式（1.34a）～式（1.34e）的右端项数字分别更换为要确定的分理处的产出和投入的数字，就可以分别计算出 E 的值。计算结果为对分理处 3 和分理处 4，$E=1$；但对分理处 2，有 $E=0.966$，$\lambda_1=0.28$，$\lambda_3=0.72$，$\lambda_2=\lambda_4=0$，即分理处 2 运行非 DEA 有效。理由为：若将 28%的分理处 1 与 72%的分理处 3 组合，其各项产出不低于分理处 2 的各项产出，但其投入只有分理处 2 的 96.6%。

第七节　应用问题举例

应用线性规划解决经济、管理领域的实际问题，最重要的一步是建立实际问题的线性规划模型。这是一项技巧性很强的创造性工作，既要求对研究的问题有深入了解，又要求很好地掌握线性规划模型的结构特点，并具有较强的对实际问题进行数学描述的能力。因此在研究建立一些较复杂的数学模型时，需要各方面专业人员的通力协作。

一般来讲，一个经济管理问题要满足下列条件，才能归结为线性规划的模型：①要求解的问题的目标能用某种效益指标度量大小，并能用线性函数描述目标的要求；②为达到这个目标存在多种方案；③要达到的目标是在一定约束条件下实现的，这些条件可用线性等式或不等式描述；④决策变量取值是连续的，可以是小数、分数或任意实数。

下面通过几个例子来说明如何将某些实际问题归结为线性规划的数学模型。

例 9　混合配料问题

某糖果公司用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中原料 A、B、C 的含量、成本与每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费及售价，如表 1-17 所示。问该公司每月生产这三种牌号糖果各多少，才能使其获利最大。试建立这个问题的线性规划的数学模型。

表 1-17

原料	甲	乙	丙	原料成本/（元 / kg）	每月限制用量/kg
A	≥60%	≥30%		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	≤20%	≤50%	≤60%	1.00	1 200
加工费/（元 / kg）	0.50	0.40	0.30		
售价/（元 / kg）	3.40	2.85	2.25		

解 用 $i=1,2,3$ 分别代表原料 A、B、C，用 $j=1,2,3$ 分别代表甲、乙、丙三种糖果，x_{ij} 为生产第 j 种糖果耗用的第 i 种原料的数量。该公司的获利为三种牌号糖果的售价减去相应的加工费和原料成本，三种糖果的生产量 $x_{甲}$，$x_{乙}$，$x_{丙}$分别为

$$x_{甲}=x_{11}+x_{21}+x_{31}$$
$$x_{乙}=x_{12}+x_{22}+x_{32}$$
$$x_{丙}=x_{13}+x_{23}+x_{33}$$

三种糖果的生产量受到原材料月供应量和原料含量成分的限制。由此例 9 的数学模型可归结为

$$\begin{aligned}\max z=&(3.40-0.50)(x_{11}+x_{21}+x_{31})+(2.85-0.40)(x_{12}+x_{22}+x_{32})+\\&(2.25-0.30)(x_{13}+x_{23}+x_{33})-2.00(x_{11}+x_{12}+x_{13})-\\&1.50(x_{21}+x_{22}+x_{23})-1.00(x_{31}+x_{32}+x_{33})\\=&0.9x_{11}+1.4x_{21}+1.9x_{31}+0.45x_{12}+0.95x_{22}+1.45x_{32}-0.05x_{13}+0.45x_{23}+0.95x_{33}\end{aligned}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\left.\begin{aligned}&x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 2\,000\\&x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 2\,500\\&x_{31}+x_{32}+x_{33}\leqslant 1\,200\end{aligned}\right\}\text{原料月供应量限制}\\\left.\begin{aligned}&x_{11}\geqslant 0.6(x_{11}+x_{21}+x_{31})\\&x_{31}\leqslant 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31})\\&x_{12}\geqslant 0.3(x_{12}+x_{22}+x_{32})\\&x_{32}\leqslant 0.5(x_{12}+x_{22}+x_{32})\\&x_{33}\leqslant 0.6(x_{13}+x_{23}+x_{33})\end{aligned}\right\}\text{含量成分的限制}\\x_{ij}\geqslant 0\quad(i=1,2,3;j=1,2,3)\end{cases}$$

本题最优解为 $x_{11}=580$，$x_{21}=386.66$，$x_{31}=0$，$x_{12}=1\,420$，$x_{22}=2\,113.33$，$x_{32}=1\,200$，$x_{13}=0$，$x_{23}=0$，$x_{33}=0$。即该糖果公司每月应生产甲种糖果 966.66 kg，乙种糖果 4 733.33 kg，丙种糖果 0 kg，可获利 5 450 元。

例 10 产品计划问题

某公司业务包括生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品，都分别经 A、B 两道工序加工。设 A 工序可分别在设备 A_1 或 A_2 上完成，有 B_1、B_2、B_3 三种设备可用于完成 B 工序。已知产品Ⅰ可在两道工序中的任何一种设备上加工；产品Ⅱ可在 A 工序中的任一设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品Ⅲ只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。加工单位产品所需工序时间及其他各项数据见表 1-18。试安排最优生产计划，使该公司获利最大。

表　1-18

设备	产品			设备有效台时/h	设备加工费/（元/h）
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10		6 000	0.05
A_2	7	9	12	10 000	0.03
B_1	6	8		4 000	0.06
B_2	4		11	7 000	0.11
B_3	7			4 000	0.05
原料费/（元/件）	0.25	0.35	0.50		
售价/（元/件）	1.25	2.00	2.80		

解　设产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的产量分别为 x_1, x_2, x_3 件。产品Ⅰ有 6 种加工方案，分别利用设备（A_1, B_1）、（A_1, B_2）、（A_1, B_3）、（A_2, B_1）、（A_2, B_2）、（A_2, B_3），各方案加工的产品Ⅰ数量用 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$ 表示；产品Ⅱ有 2 种加工方案，即（A_1, B_1）、（A_2, B_1），加工数量用 x_{21}, x_{22} 表示；产品Ⅲ只有 1 种加工方案（A_2, B_2），加工数量等于 x_3。而

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22}$$

公司的盈利为产品售价减去相应的原料费和设备加工费。产品加工量只受设备有效台时的限制。故对例 10 可建立如下线性规划模型：

$$\begin{aligned}\max z = {} & (1.25-0.25)(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16})+(2.00-0.35)\times \\ & (x_{21}+x_{22})+(2.80-0.50)x_3-0.05(5x_{11}+5x_{12}+5x_{13}+10x_{21})- \\ & 0.03(7x_{14}+7x_{15}+7x_{16}+9x_{22}+12x_3)-0.06(6x_{11}+6x_{14}+8x_{21}+ \\ & 8x_{22})-0.11(4x_{12}+4x_{15}+11x_3)-0.05(7x_{13}+7x_{16})\end{aligned}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_{11}+5x_{12}+5x_{13}+10x_{21} \leqslant 6\,000 \\ 7x_{14}+7x_{15}+7x_{16}+9x_{22}+12x_3 \leqslant 10\,000 \\ 6x_{11}+6x_{14}+8x_{21}+8x_{22} \leqslant 4\,000 \\ 4x_{12}+4x_{15}+11x_3 \leqslant 7\,000 \\ 7x_{13}+7x_{16} \leqslant 4\,000 \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

本题最优解为 $x_{11}=0$，$x_{12}=628.57$，$x_{13}=571.42$，$x_{14}=0$，$x_{15}=230.05$，$x_{16}=0$，$x_{21}=0$，$x_{22}=500$，$x_3=324.14$。即该公司应生产产品Ⅰ1 430 件、产品Ⅱ500 件、产品Ⅲ 324.14 件，可获利 1 190.57 元。

例 11　海河公交公司负责全市公交车辆的运行与维修管理，已知每天各时段所需人数如表 1-19 所示，公司所有人员每天从上班起连续工作 6 小时，每周安排一天休息。要求回答：

（1）该公司需配备多少人员，才能满足公司的正常运转？

（2）由于工作时间差别，有的早上 5:00 就上班，有的到 23:00 才下班；且每周休息一天，有的安排在周一到周五，有的安排在周六或周日，不够平等。因此，如何安排一天内的倒班及每周一天的休息日的日期，关系到公司人员的切身利益。怎样才能做到完全公平合理？

表 1-19

时间段	5:00—7:00	7:00—9:00	9:00—11:00	11:00—13:00	13:00—15:00
所需人数/人	26	50	34	40	38
时间段	15:00—17:00	17:00—19:00	19:00—21:00	21:00—23:00	
所需人数/人	50	46	36	26	

解 （1）设以 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 分别表示各时段初开始上班人数，因 19:00 和 21:00 不再有人员开始上班，故 $x_8 = x_9 = 0$。由此建立每天各班所需人员数的数学模型如下：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \geqslant 26 \\ x_1 + x_2 \geqslant 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 34 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 40 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 38 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 50 \\ x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 46 \\ x_6 + x_7 \geqslant 36 \\ x_7 \geqslant 26 \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, \cdots, 7) \end{cases}$$

求解得最优解如下：$\boldsymbol{X}^* = (26, 24, 0, 30, 10, 10, 26)^{\mathrm{T}}$，$z^* = 126$。因所有人员每周休息一天，故该公交公司总需人员数为 $126 \times \frac{7}{6} = 147$（人）。

（2）为了做到排班公平，先考虑每周休息一天的公平。对 147 名人员进行编号，即①、②、③、…、⑭⑤、⑭⑥、⑭⑦号，每 21 人编一个组，即①～㉑、㉒～㊷、㊸～⑥③、…、⑩⑥～⑫⑥、⑫⑦～⑭⑦共分 7 个组，设第一周每天上班及休息人员如表 1-20 所示。

表 1-20

项目	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
上班人员	①～⑫⑥	㉒～⑭⑦	①～㉑ ㊸～⑭⑦	①～㊷ ⑥④～⑭⑦	①～⑥③ ⑧⑤～⑭⑦	①～ ⑩⑥～⑭⑦	①～⑩⑤ ⑫⑦～⑭⑦
休息人员	⑫⑦～⑭⑦	①～㉑	㉒～㊷	㊸～⑥③	⑥④～⑧④	⑧⑤～⑩⑤	⑩⑥～⑫⑥
组合号	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7

到第二周时，周一至周日上班及休息人员组合号调整为 C_2，C_3，…，C_6，C_7，C_1，再到下一周，周一至周日上班及休息时间的人员依次组合号为 C_3，C_4，…，C_7，C_1，C_2。这样经过 7 周的轮换，每个工作人员刚好从周一至周日分别各休息一天。

做到上班天数内工作人员在 7 个不同时段上班轮换的公平，原理同上述类似。以组合号为 C_1 的这组人员（编号为①～⑫⓪）为例，他们依次上班时间为第一周的周一、第二周的周二、……、第七周的周日，再轮转为第八周的周一，……具体轮班安排见表 1-21。

表　1-21

上班时间	需求人数	组内人员轮班时间安排							
		第一周	第二周	……	第十一周	……	第七十五周	……	第一百二十六周
5:00—11:00	26	①～㉖	②～㉗		⑪～㊱		㉕～㊿		㉖，①～㉕
7:00—13:00	24	㉗～㊿	㉘～51		㊲～60		101～124		㉖～㊾
9:00—15:00	0	—	—		—		—		—
11:00—17:00	30	51～80	52～81		61～90		125 126，①～㉘		㊿～79
13:00—19:00	10	81～90	82～91		91～100		㉙～㊳		80～89
15:00—21:00	10	91～100	92～101		101～110		㊴～㊽		90～99
17:00—23:00	26	101～126	102～126，①		⑪～126，①～⑩		㊾～74		100～125

由上可知，该公交公司人员每 7 周才能在周一至周日的休班时间轮换一个循环，而相同组合号人员需 126 个班才能在班次轮换上做到平衡。故总需要 $126 \times 7 = 882$（天）实现一周内休息日安排平等和每天倒班班次平等的大循环。

案例分析

某钢铁企业污染物排放控制线性规划应用

一、案例背景

钢铁行业是中国国民经济的重要支柱，也是能源消耗和污染排放的重点行业之一。近年来，随着中国经济转型升级和绿色发展战略的推进，钢铁行业面临的环保压力与日俱增。作为典型的高耗能、高污染行业，钢铁生产过程中会排放大量污染物，包括温室气体（如二氧化碳）、大气污染物（如二氧化硫和氮氧化物）、固体废弃物（如钢渣、粉尘）以及重金属污染物（如铅、镉）等。这些污染物的排放不仅对环境造成严重影响，还制约着行业的可持续发展。

为了推动钢铁行业实现清洁生产和绿色发展，中国政府出台了一系列政策和法规。例如，《碳排放权交易管理办法（试行）》对企业的碳排放总量提出了明确限制，《“十四五”生态环境保护规划》要求工业领域加快污染物排放削减，减少温室气体和重污染物排放。此外，地方政府也相继出台细化政策，对钢铁企业的排放总量和污染治理能力提出更高的要求。

某钢铁企业位于华北地区，是一家典型的以高炉–转炉工艺为主、电炉工艺为辅的综合性钢铁生产企业，年产钢铁约 100 万吨。在过去几年中，该企业由于高炉生产比例较高，导致碳排放、二氧化硫排放以及钢渣和重金属废弃物的排放量长期接近甚至超过国家和地方环保限额，受到多次处罚。同时，随着全国碳排放权交易市场的启动，企业碳排放成本也显著增加，进一步加重了生产负担。

二、模型构建

为响应国家政策和市场需求，该企业计划通过优化生产工艺的使用比例和改进污染治理设施来实现以下目标。

1. 减少碳排放、二氧化硫等主要污染物的排放量，达到环保要求；

2. 降低钢渣和重金属等固体废弃物的产生量，提高资源利用效率；

3. 在污染物排放量控制的基础上，尽量控制生产成本，提高经济效益；

4. 积极参与碳交易市场，降低因超额排放而增加的成本压力。

为此，企业在环保部门的指导下，对现有生产工艺的污染排放特性、治理成本以及排放限额进行了详细调研，并计划采用线性规划模型，帮助企业在生产需求和环保目标之间找到平衡点，为未来的生产调整提供科学依据。

该钢铁企业生产过程中排放的主要污染物包括以下类别。

1. 碳排放（CO_2）：能源消耗产生的主要温室气体；

2. 二氧化硫（SO_2）：高炉燃烧过程中排放的主要大气污染物；

3. 重金属：炼钢废水中含有的铅、镉等物质；

4. 钢渣：高炉和转炉工艺产生的固体废弃物。

企业需要满足国家规定的排放标准，同时希望通过优化生产工艺和污染治理措施，在降低污染物排放并控制治理成本的同时最大化地提高钢产量。

通过调研和生产测算，该企业获得了以下关键数据。

1. 污染物排放系数

每生产一吨钢所带来的污染，如表 1-22 所示。

表 1-22 吨

项目	碳排放	二氧化硫	重金属	钢渣
高炉–转炉工艺	2	0.03	0.004	0.4
电炉工艺	1	0.01	0.002	0.1

2. 治理成本

高炉–转炉工艺每吨钢的治理成本为 3 万元；

电炉工艺每吨钢的治理成本为 5 万元。

3. 排放限额

碳排放总量：不超过 180 万吨；

二氧化硫排放总量：不超过 2 万吨；

重金属排放总量：不超过 0.3 万吨；

钢渣排放总量：不超过 35 万吨。

三、分析与结果

基于上述数据，企业利用线性规划对高炉–转炉和电炉工艺的生产比例进行了优化分析，目标是在满足生产需求的前提下最小化污染物排放，并且符合以下约束：

1. 各类污染物的排放量不超过限额；

2. 总生产成本控制在企业预算 400 万元以内；

3. 考虑高炉–转炉工艺占比不超过 70%。

经过分析，企业得到了以下最优方案。

1. 生产比例

高炉–转炉工艺：50 万吨；

电炉工艺：50 万吨。

2. 排放结果

碳排放：150 万吨（低于 180 万吨限额）；

二氧化硫排放：2 万吨（满足 2 万吨限额）；

重金属排放：0.3 万吨（满足 0.3 万吨限额）；

钢渣排放：25 万吨（低于 35 万吨限额）。

3. 总生产成本

400 万元（等于企业 400 万元的预算）。

调整与优化建议：虽然通过优化生产比例，总排放量大部分符合国家要求，但二氧化硫和重金属排放都等于限额。为了防止企业在生产过程中出现的某些意外导致最终结果偏离设想，企业可进一步采取以下措施。

1. 二氧化硫治理：增加高炉尾气脱硫设备，提高二氧化硫捕集率；

2. 重金属控制：加强废水处理设施建设，减少重金属排放。

四、总结

通过线性规划，企业在满足生产需求和成本约束的前提下，优化了两种生产工艺的比例，将碳排放和钢渣排放控制在限额以内，同时识别了二氧化硫和重金属治理的重点方向。这一方法不仅帮助企业提升了环境管理水平，还为钢铁行业实现减污降碳协同增效提供了实践参考，切实落实了绿色发展理念。

软件应用　S01　　T01　即练即测

习题

1.1　分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题：（1）指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解；（2）当具有唯一最优解时，指出单纯形表中的各基可行解对应图解法中可行域的哪一顶点。

（1）$\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geqslant 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

（2）$\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

（3）$\max z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 8 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 6 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 5 \end{cases}$$

（4）$\max z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2　将下述线性规划问题化成标准形式。

（1）$\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$　　（2）$\min z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2\\ x_1+x_2-x_3+2x_4\leqslant 14\\ -2x_1+3x_2+x_3-x_4\geqslant 2\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\text{无约束}\end{cases}\qquad \text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=4\\ -2x_1+x_2-x_3\leqslant 6\\ x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{无约束}\end{cases}$$

1.3 对下述线性规划问题找出所有基解，指出哪些是基可行解，并确定最优解。

（1） $\max z=3x_1+5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_3=4\\ 2x_2+x_4=12\\ 3x_1+2x_2+x_4=18\\ x_j\geqslant 0\quad j=1,\cdots,5\end{cases}$$

（2） $\min z=5x_1-2x_2+3x_3+2x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=3\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

1.4 题 1.1（3）中，若目标函数变为 $\max z=cx_1+dx_2$，讨论 c，d 的值如何变化，使该问题可行域的每个顶点依次使目标函数达到最优。

1.5 考虑下述线性规划问题：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

式中，$1\leqslant c_1\leqslant 3$，$4\leqslant c_2\leqslant 6$，$-1\leqslant a_{11}\leqslant 3$，$2\leqslant a_{12}\leqslant 5$，$8\leqslant b_1\leqslant 12$，$2\leqslant a_{21}\leqslant 4$，$4\leqslant a_{22}\leqslant 6$，$10\leqslant b_2\leqslant 14$，试确定目标函数最优值的下界和上界。

1.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出属哪一类解。

（1） $\min z=2x_1+3x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3\geqslant 8\\ 3x_1+2x_2\geqslant 6\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

（2） $\max z=10x_1+15x_2+12x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3\leqslant 9\\ -5x_1+6x_2+15x_3\leqslant 15\\ 2x_1+x_2+x_3\geqslant 5\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

1.7 已知某线性规划问题的初始单纯形表和用单纯形法迭代后得到表 1-23。试求括弧中未知数 $a\sim l$ 的值。

表 1-23

项目		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	6	(b)	(c)	(d)	1	0
x_5	1	−1	3	(e)	0	1
c_j-z_j		(a)	−1	2	0	0
x_1	(f)	(g)	2	−1	1/2	0
x_5	4	(h)	(i)	1	1/2	1
c_j-z_j		0	−7	(j)	(k)	(l)

1.8 线性规划问题如下：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解得表 1-24（表中 x_3, x_4 为松弛变量）。

表　1-24

项目		x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5/2	1	0	3	2
x_2	1	0	1	1	1
$c_j - z_j$		0	0	− 2	− 3

求 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1, c_2, b_1, b_2 的值。

1.9　考虑线性规划问题

$$\max z = \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 4 + 2\beta & \text{(i)} \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 + 7\beta & \text{(ii)} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

模型中 α，β 为参数，要求：

（1）组成两个新的约束(i)′ = (i) + (ii)，(ii)′ = (ii) − 2(i)，根据式(i)′和式(ii)′，以 x_1，x_2 为基变量，列出初始单纯形表；

（2）在表中，假定 $\beta = 0$，则 α 为何值时，x_1，x_2 为问题的最优基；

（3）在表中，假定 $\alpha = 3$，则 β 为何值时，x_1，x_2 为问题的最优基。

1.10　试述线性规划模型中“线性”二字的含义，并用实例说明什么情况下线性的假设将被违背。

1.11　判断下列说法是否正确，为什么？

（1）含 n 个变量 m 个约束的标准型的线性规划问题，基解数恰好为 C_n^m 个；

（2）线性规划问题的可行解如为最优解，则该可行解一定为基可行解；

（3）如线性规划问题存在可行域，则可行域一定包含坐标的原点；

（4）单纯形法迭代计算中，必须选取同最大检验数 $\sigma_j > 0$ 对应的变量作为换入基的变量。

1.12　线性规划问题 $\max z = \boldsymbol{CX}$，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}$，如 $\boldsymbol{X}^*$是该问题的最优解，又 $\lambda > 0$ 为某一常数，分别讨论下列情况时最优解的变化。

（1）目标函数变为 $\max z = \lambda \boldsymbol{CX}$；

（2）目标函数变为 $\max z =$（$\boldsymbol{C} + \lambda$）$\boldsymbol{X}$；

（3）目标函数变为 $\max z = \dfrac{\boldsymbol{C}}{\lambda}\boldsymbol{X}$，约束条件变为 $\boldsymbol{AX} = \lambda \boldsymbol{b}$。

1.13　某饲养场饲养动物出售，设每头动物每天至少需 700 g 蛋白质、30 g 矿物质、100 mg 维生素。现有五种饲料可供选用，各种饲料每 kg 营养成分含量及单价如表 1-25 所示。

表 1-25

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/（元/kg）
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

要求确定既满足动物生长的营养需要，又使费用最省的选用饲料的方案。

1.14 辽源街邮局从周一到周日每天所需的职员人数如表 1-26 所示。职员分别安排在周内某一天开始上班，并连续工作 5 天，休息 2 天。

表 1-26 人

周	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
所需人数	17	13	15	19	14	16	11

要求确定：

（1）该邮局至少应配备多少职员，才能满足值班需要。

（2）从周一开始上班的，双休日都能休息；周二或周日开始上班的，双休日内只能有一天得到休息；其他时间开始上班的，两个双休日都得不到休息。这种情况很不合理。因此邮局准备对每周上班的起始日进行轮换（但从起始日开始连续上 5 天班的规定不变），问如何安排轮换，才能做到在一个周期内每名职工享受到同等的双休日休假天数。

（3）该邮局职员中有一名领班，一名副领班。为便于领导，规定领班于每周一、三、四、五、六上班，副领班于一、二、三、五、日这 5 天上班。据此试重新对上述要求（1）和（2）建模和求解。

1.15 一艘货轮分前、中、后三个舱位，它们的容积与最大允许载重量如表 1-27 所示。现有三种货物待运，已知有关数据列于表 1-28。

表 1-27

项目	前舱	中舱	后舱
最大允许载重量/t	2 000	3 000	1 500
容积/m^3	4 000	5 400	1 500

表 1-28

商品	数量/件	每件体积/（m^3/件）	每件重量/（t/件）	运价/（元/件）
A	600	10	8	1 000
B	1 000	5	6	700
C	800	7	5	600

又为了航运安全，前、中、后舱的实际载重量大体保持各舱最大允许载重量的比例关系。具体要求：前、后舱分别与中舱之间载重量比例的偏差不超过 15%，前、后舱之间不

超过 10%。问：该货轮应装载 A、B、C 各多少件，运费收入为最大？试建立这个问题的线性规划模型。

1.16　长城通信公司拟对新推出的一款手机收费套餐服务进行调查，以便进一步设计改进。调查对象设定为商界人士及大学生，要求：（1）总共调查 600 人，其中大学生不少于 250 人；（2）方式分电话调查和问卷调查，其中问卷调查人数不少于 30%；（3）对大学生电话调查 80%以上应安排在周六或周日，对商界人士电话调查 80%以上应安排在周一至周五；（4）问卷调查时间不限。已知有关调查费用如表 1-29 所示。问：该公司应如何安排调查，使总的费用为最省？

表　1-29　　元/人次

调查对象	电话调查		问卷调查
	周一至周五	周六、日	
大学生	3.0	2.5	5.0
商界人士	3.5	3.0	5.0

1.17　生产存储问题。某公司签订了 5 种产品（$i=1,\cdots,5$）上半年的交货合同。已知各产品在第 j 月（$j=1,\cdots,6$）的合同交货量 D_{ij}，该月售价 s_{ij}、成本价 c_{ij} 及生产 1 件时所需工时 a_{ij}。该公司第 j 月的正常生产工时为 t_j，但必要时可加班生产，第 j 月允许的最多加班工时不超过 t_j'，并且加班时间内生产出来的产品每件成本增加额外费用 c_{ij}' 元。若生产出来的产品当月不交货，每件库存 1 个月交存储费 p_i 元。试为该公司设计一个既保证完成合同交货，又使上半年预期盈利总额为最大的生产计划安排。

1.18　宏银公司承诺为某建设项目从2023年起的4年中每年年初分别提供以下数额贷款：2023 年 100 万元，2024 年 150 万元，2025 年 120 万元，2026 年 110 万元。以上贷款资金均须于 2022 年年底前筹集齐。但为了充分发挥这笔资金的作用，在满足每年贷款额的情况下，将多余资金分别用于下列投资项目：

（1）于 2023 年年初购买 A 种债券，期限 3 年，到期后本息合计为投资额的 140%，但限购 60 万元；

（2）于 2023 年年初购买 B 种债券，期限 2 年，到期后本息合计为投资额的 125%，且限购 90 万元；

（3）于 2024 年年初购买 C 种债券，期限 2 年，到期后本息合计为投资额的 130%，但限购 50 万元；

（4）于每年年初将任意数额的资金存放于银行，年息 4%，于每年年底取出。

问：宏银公司应如何运用好这笔筹集到的资金，使 2022 年年底需筹集到的资金数额最少？

1.19　红豆服装公司新推出一款时装，据经验和市场调查，预测今后 6 个月对该款时装的需求为：1 月 3 000 件；2 月 3 600 件；3 月 4 000 件；4 月 4 600 件；5 月 4 800 件；6 月 5 000 件。生产每件需熟练工人工作 4 h，耗用原材料 150 元，售价为 240 元/件。该公司 1 月初有熟练工 80 人，每人每月工作 160 h。为适应生产需要，该公司可招收新工人培训，但培训一名新工人需占用熟练工人 50 h 用于指导操作，培训期为一个月，结束后即可上岗。熟练工人每月工资 2 000 元，新工人培训期间给予生活补贴 800 元，转正后工资与

生产效率同熟练工人。又熟练工人（含转正一个月后的新工人）每月初有 2%因各种原因离职。已知该公司年初已加工出 400 件该款时装作为库存，要求 6 月末存库 1 000 件。又每月生产出来的时装如不在当月交货，库存费用为每件每月 10 元。试为该公司设计一个满足各月及 6 月末库存要求，又使 1—6 月总收入为最大的劳动力安排方案。

1.20 祥瑞贸易公司专门经营某种杂粮的批发业务。公司现有库容 5 000 吨的仓库。1 月 1 日公司拥有库存 1 000 吨的杂粮，并有资金 20 000 元。估计第一季度杂粮价格如表 1-30 所示。如买进的杂粮当月到货，则需到下月才能卖出，且规定“货到付款”。公司希望本季末库存为 2 000 吨，问应采取什么样的买进与卖出的策略使 3 个月总的获利最大。要求列出本问题的线性规划模型，但不需求解。

表 1-30 元/吨

月份	进货价	出货价
1	2 850	3 100
2	3 050	3 250
3	2 900	2 950

1.21 某新兴智能设备公司负责生产高质量的可穿戴设备，主要包括智能手环、智能眼镜、智能衣物。该公司拥有 4 个厂家，智能手环、智能眼镜、智能衣物内在电路的设计制造分别在厂家 1、2、3 完成，最终对产品的封测在厂家 4 完成。

经过市场分析，公司高层管理者发现公司能够销售厂家生产的全部产品，但 3 种产品对厂家 4 的封测能力有所竞争。因此，考虑到公司的盈利情况，高层管理者经过讨论后，决定调整公司的生产线，减少盈利能力低的产品的生产，将生产能力转移到有更大销售潜能的新产品中，即需要确定 3 种新产品的组合以实现利润最大化，并明确了需要收集的数据内容。为保证获取数据的合理性，该公司调整计划与各厂家及部门的关键人员合作，具体情况如表 1-31 所示。

（1）由各厂家的车间负责人给出每周每个厂家能为生产新产品提供的生产时间（厂家需要在兼顾原有产品生产的基础上完成新型产品的生产，因此每个厂家用来生产新产品的时间是有限的）（单位：小时）；

（2）由各厂家工程师分析新产品的设计制造及封测过程，给出每个厂家生产或测试批次智能设备产品所消耗的时间数（单位：小时）；

（3）通过分析来自营销部门的成本及价格决策数据，由会计部门给出，每完成一个批次智能设备产品的盈利情况（单位：万元）。

表 1-31

厂　家	每个批次的生产时间/小时			每周可用的生产时间/小时
	新型智能手环	新型智能眼镜	新型智能衣物	
1	12	0	0	18
2	0	10	0	6
3	0	0	8	12
4	3	2	1	8
每批次的利润/万元	50	30	20	

公司高层管理者明确该研究的管理目标为：在 4 个厂家有限的生产能力条件下，确定 3 种可穿戴设备产品生产率，以实现公司利益最大化（每种产品以 100 个为一批次进行生产，因此生产率定义为每周生产该产品的批数，生产率可以是整数或小数）。请给出分析求解过程和结果。

1.22　一家医院的某个科室，需要安排护士在一周（7 天）内的三班倒（早班、中班、晚班）工作。科室有不同级别的护士，包括初级护士、中级护士和高级护士，并且有以下各种限制条件。

人员与技能相关限制：初级护士有 15 名，中级护士有 10 名，高级护士有 8 名。早班至少需要 5 名初级护士、3 名中级护士和 2 名高级护士。中班至少需要 4 名初级护士、4 名中级护士和 3 名高级护士。晚班至少需要 6 名初级护士、5 名中级护士和 4 名高级护士。

工作时间与休息限制：每名护士平均每周工作总时长不能超过 40 小时。早班时长为 8 小时，中班时长为 8 小时，晚班时长为 10 小时。

为了保证护理质量，每个班次中高级护士和初级护士的人数比例不能超过 1∶2（即初级护士人数至少是高级护士人数的两倍）。初级护士每小时工资为 20 元，中级护士每小时工资为 25 元，高级护士每小时工资为 30 元。医院希望在满足排班需求的情况下，尽量降低人力成本。要求列出本问题的线性规划模型，但不需要求解。