03 均值不等式

均值不等式是一类较常用的不等式。顾名思义，它反映了不同的平均值之间的大小关系。

我们来看图 3.1。其中，$\triangle ABC$ 是一个直角三角形，$\angle ACB = 90°$。$CD \perp AB$，线段 CD 为 AB 边上的高。设 $AD = a$，$BD = b$。根据初中学过的相似三角形，我们可以得到 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$，从而得到

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}。$$

进一步写出 $CD^2 = AD \cdot BD$ 以及 $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{ab}$。

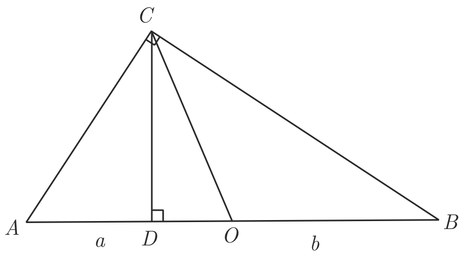

图 3.1　$\triangle ABC$

此外，线段 CO 是斜边 AB 上的中线，所以

$$CO = \frac{1}{2}AB = \frac{a+b}{2}。$$

显而易见，$CO \geqslant CD$，因为线段 CO 是直角 $\triangle CDO$ 的斜边，而线段 CD 为直角边，因此，我们可以得到不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

或者写为

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}。$$

这个不等式对任意的非负数 $a, b \geqslant 0$ 都是成立的。

我们也可以通过代数方法，用不等式的左边减去右边，得到

$$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

从而推出同样的结论。

我们把这个公式写为

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

的原因是其左边是 a 和 b 的算术平均值，而右边是 a 和 b 的几何平均值。这个不等式告诉我们:

两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 的时候，等式成立。

我们将这个不等式称为均值不等式。

可否将这个结论推广到更多的正数上面呢？对于 3 个正数 a，b，c，是否可以有

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}\ ?$$

我们先用几组数做一个试验。

(1) 选取 $a=1, b=2, c=3$，则有

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{1+2+3}{3}=2,$$

而

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{1\times 2\times 3}=\sqrt[3]{6}<2,$$

结果与我们所预期的相同。

(2) 选取 $a=3, b=8, c=9$，则有

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{20}{3},$$

而

$$\sqrt[3]{abc}=6<\frac{20}{3}。$$

结果也与我们所预期的相同。

(3) 选取 $a=b=c$，则有

$$\frac{a+b+c}{3}=a,$$

而 $\sqrt[3]{abc}$ 也等于 a。结果也与我们所预期的相同，这时候，等式成立。

上面的几个例子都验证了我们的猜想，没有得出任何反例，那么这个结论很有可能也是成立的。但是我们还需要给出一个数学上的严谨证明。

下面我们来分析一下如何证明这个结论。

既然这个结论对于两个变量成立，那么如果有 4 个变量 a，b，c，d，就可以将它们两两配对，对每一对使用一次均值不等式，得到

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\quad 和\quad c+d\geqslant 2\sqrt{cd},$$

因而得到

$$a+b+c+d\geqslant 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}。$$

现在我们有两个相加的项，于是就有了再一次使用两个数的均值不等式的条件。根据均值不等式，可以得到

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}=2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)\geqslant 2\left(2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}\right)=4\sqrt[4]{abcd}。$$

这样就证明了

$$a+b+c+d\geqslant 4\sqrt[4]{abcd},$$

也就是

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}。$$

其中 $a,b,c,d\geqslant 0$，当且仅当 $a=b=c=d$ 时等式成立。

即均值不等式对 4 个非负数成立。

同理，如果数值的个数为 $8,16,32,\cdots$，也就是 2 的整数幂，我们都可以利用现有的均值不等式来证明。

如果只有 3 个数值，该如何利用目前的结论来证明均值不等式呢?

如果我们能够凑齐 4 个数值就可以利用 4 个变量的均值不等式了。那该如何选择第 4 个数?

我们知道，在两个数值的均值不等式中，当两个变量的数值相等时，等号是成立的。对于 $4, 8, 16, 32, \cdots$ 个数值也是如此。在我们增加第 4 个数值时，还要保证等号仍然有可能成立。前 3 个数值可能相等，也可能不相等，当第 4 个数等于前 3 个数值的算术平均值时，不会失去令等号成立的条件。因此，我们可以选取第 4 个数值为前 3 个数值的算术平均值，也就是

$$d = \frac{a+b+c}{3}。$$

现在对 a，b，c，$d = \dfrac{a+b+c}{3}$ 使用 4 个数值的均值不等式，得到

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}。$$

由于 $a+b+c=3d$，上式的左边就等于 d，因此有

$$d \geqslant \sqrt[4]{abcd} \Longrightarrow d^4 \geqslant abcd \Longrightarrow d^3 \geqslant abc,$$

即

$$d \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

从而证明了

$$\frac{a+b+c}{3} = d \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

即均值不等式对 3 个非负数成立。证明过程中没有用到任何复杂的代数公式。

既然可以选择 d 等于 a，b，c 的算术平均值，能否选取 d 等于 a，b，c 的几何平均值，也就是 $d = \sqrt[3]{abc}$ 呢? 我们来尝试一下。

此时，根据 4 个数值的均值不等式，得到

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}。$$

由于 $d^3 = abc$，上式的右边为

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{d^4} = d。$$

因而推出

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant d \Longrightarrow a+b+c+d \geqslant 4d \Longrightarrow a+b+c \geqslant 3d。$$

即

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant d = \sqrt[3]{abc}。$$

其中 $a,b,c \geqslant 0$，当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立。

我们通过增补适当的项，使得问题具备使用均值不等式的条件，从而给出简单易懂的证明。创造使用基本原理的机会，是学习数学过程中的一个重要的能力。

这个方法还可以推广到变量的个数为任何更大的正整数的情况，你自己来思考一下怎么证明。可以参考上面证明 3 个数值的均值不等式的方法来完成。

再来看图 3.2。

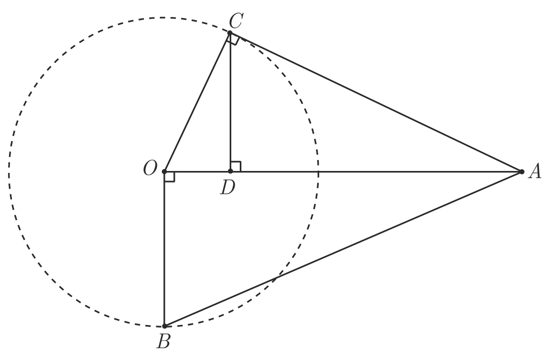

图 3.2　均值不等式演示图

在图 3.2 中，AC 与圆 O 相切于点 C，$OB \perp OA$，$CD \perp OA$。设 $AO = \dfrac{a+b}{2}$，$CO = \dfrac{a-b}{2}$，则可以推出

$$AB^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$AC^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

$$AD = \frac{AC^2}{AO} = \frac{2ab}{a+b},$$

即

$$AB = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ AC = \sqrt{ab},\ AD = \frac{2ab}{a+b}。$$

由图 3.2 利用直角三角形中斜边大于直角边可得

$$AD \leqslant AC \leqslant AO \leqslant AB,$$

因此得到一个不等式“串”:

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}。$$

中间两式正是前面证明过的均值不等式。那在什么条件下等式成立呢? 从图中可以看出，当且仅当 $OC=0$，即 $a=b$ 时，AB，AO，AC 和 AD 将重合在一起，因此长度相等。反之，要使得 $AB=AO=AC=AD$，必须有 $OC=0$，即 $a=b$。因此我们得到

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

当且仅当 $a=b$ 时，等式成立。

这一串不等式能否推广到更多的变量上呢?

上面的不等式中，第 1 个表达式为 a 和 b 的调和平均值。设 $h=\dfrac{2ab}{a+b}$，则

$$\frac{1}{h} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)。$$

也就是说，h 的倒数是 a 和 b 的倒数的平均值。对于 3 个变量 a，b，c，其调和平均值 h 满足

$$\frac{1}{h_3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)。$$

第 2 个表达式为 a 和 b 的几何平均值，3 个数 a，b，c 的几何平均值为 $\sqrt[3]{abc}$。

第 3 个表达式为 a 和 b 的算术平均值，3 个数 a，b，c 的算术平均值为 $\dfrac{a+b+c}{3}$。

在第 4 个表达式中，$\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 是 a 和 b 的平方的平均值，简称为均方，因此可以将 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 称为 a 和 b 的均方根。3 个数 a，b，c 的均方根为 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$。

前面的这一串不等式对于 3 个变量确实是成立的，也就是

$$\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}。$$

其中 $a,b,c \geqslant 0$。当且仅当 $a=b=c$ 时，所有的不等式中的等式成立。

证明过程留给你自己去探索。

对于更多的变量，这个不等式“串”也是类似的，你能写出来吗?