第1章

质点运动学

思考题解答

1-1　平常说的“风速”“飞机的航速”“水的流速”“地球的公转速度”是什么物体相对于什么参考系运动？有时提到物体的运动，但没有指明参考系，在这种情况下，参考系一般是指什么？举几个例子说明。

答　“风速”“飞机的航速”“水的流速”是相对于地球的速度，“地球的公转速度”是相对于太阳的速度。在没有指明参考系的情况下，一般以地球或地球上相对于地球静止的某物体为参考系。如：“这鸟儿在天空中飞翔”“那朵云在天空中移动”“那个人在跑步呢”等都是默认以地球为参考系的。

1-2　战国《吕氏春秋·察今》记载一则“刻舟求剑”的故事。故事原意是讽刺不懂事物已发展变化而静止地看问题的人。试从物理学的观点分析刻舟求剑者犯了什么错误？

答　人虽然相对于船没有运动，但船一直在行进，宝剑却沉入水底，最后不动了，船相对于剑落处已发生了相对运动，宝剑已不在船上刻痕所在位置。

1-3　质点位置矢量方向不变，质点是否作直线运动？质点沿直线运动，其位置矢量是否一定方向不变？

答　质点位置矢量方向不变，质点一定作直线运动。质点沿直线运动，其位置矢量的方向不一定不变。如图1-1所示，质点从 A 到 B 的过程中作直线运动，但其位置矢量的方向却在变化。

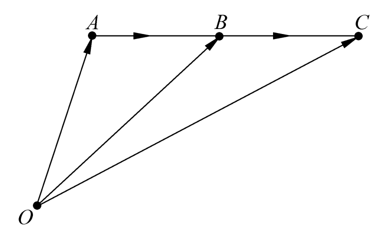

图1-1　思考题1-3用图

1-4　有人认为：质点的瞬时速度是很短时间内的平均速度；瞬时速度为10 m/s，表示质点在1 s内走过10 m。这些看法对吗？

答　前者不确切，后者不对。

第一，瞬时速度说成是很短时间内的平均速度不妥当。很短时间仍是一有限长的时间间隔，与它对应的仍是平均速度，而非瞬时速度。只有“位移变化率的极限”才能正确刻画瞬时速度的概念。瞬时速度很难直接测量，在技术上常常用很短时间内的平均速度近似地表示瞬时速度，随着技术的进步，测量可以达到很高的精确度。

第二，瞬时速度为10 m/s并不代表质点在1 s内走过10 m。因为瞬时速度为10 m/s是指某一时刻的速度，它只反映质点在该时刻运动的快慢和方向。而在运动过程中，质点每时每刻的速度都不同。只有保持这样的快慢不变，才会在1 s内运动10 m。

1-5　质点作平面运动，已知其运动方程的直角坐标分量为 $x=x(t)$，$y=y(t)$。在计算质点的速度和加速度的大小时，有人先由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 求出 $r=r(t)$，再由 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ 求得结果，你认为这种做法对吗？如果不对，错在什么地方？

答　这种做法是错误的，问题的关键在于没有注意到位移、速度、加速度的矢量性。由于速度的表达式为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r)=\boldsymbol{e}_r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

式中，$\boldsymbol{e}_r$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量。因此，可求得加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{e}_r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t^2}$$

问题的关键在于$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}$是否为零。如果$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=0$,那么

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r)=\boldsymbol{e}_r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{e}_r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

则 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$成立。

要使$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=0$,则 $\boldsymbol{e}_r$ 必须是大小与方向均不随时间改变的常矢量。根据质点的运动方程 $x=x(t)$,$y=y(t)$,质点作平面曲线运动,$\boldsymbol{e}_r$ 的方向是变化的。所以,一般情况下,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}\neq 0$,即 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是错误的。实际上,$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$只是求得了曲线运动中质点沿径向的速度,而没有求得质点沿垂直于径向方向的速度。对加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小也可以用同样方法加以讨论。

1-6 有人认为:由于加速度等于速度的变化率,$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$。因此,在质点作直线运动时,加速度为正,必作加速运动;加速度为负,必作减速运动。这些看法正确吗?

答 不对。加速度的正和负分别表示速度代数值的增大和减小。所以仅通过加速度的正负不能说明究竟是加速还是减速,还要看速度是正的还是负的,即它是沿坐标轴的正方向运动,还是负方向运动。

对于质点沿坐标轴正方向运动的情形:若 v 为正,质点作加速运动,则 Δv 为正,故 a 为正;质点作减速运动,则 Δv 为负,故 a 为负。这时 a 的正负的确表示加速和减速。

对于质点沿坐标轴负方向运动的情形:若 v 为负,质点作加速运动,则 Δv 为负,a 亦为负;反之,若质点作减速运动,则 Δv 和 a 反而为正。故此时 a 的正负分别表示减速和加速。

可见,若质点的加速度与速度同号,则质点必作加速运动;反之,加速度与速度反号,则质点必作减速运动。

1-7 质点作匀变速直线运动。设 $t=0$ 时,质点的位置 $x=x_0$,初速度 $v=v_0$,则质点作匀变速直线运动的公式为

$$v=v_0+at$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$$

如何推导出上述公式?

答 对于匀变速直线运动,由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,可得

$$\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t$$

对上式两边积分,有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\,\mathrm{d}t$$

则得

$$v=v_0+at \tag{Ⅰ}$$

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,并代入式(Ⅰ),得

$$\mathrm{d}x=(v_0+at)\mathrm{d}t$$

对上式两边积分,有

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{0}^{t} (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

则得

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (\text{Ⅱ})$$

联立式(Ⅰ)和式(Ⅱ)消去 t,得

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

1-8　一个十字交叉路口,道路宽 30 m。当交通指示灯变为绿灯时,一辆小车从静止开始运动,并以 2 $\mathrm{m/s^2}$ 的加速度加速通过此交叉路口,如图 1-2 所示,求这个过程所需的时间为多少?

答　由题意知 $x - x_0 = 30\ \mathrm{m}$,$v_0 = 0$,$a = 2\ \mathrm{m/s^2}$,所以小车通过此交叉路口所需的时间为

$$t = \sqrt{\frac{2(x - x_0)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 30}{2}}\ \mathrm{s} = \sqrt{30}\ \mathrm{s} = 5.5\ \mathrm{s}$$

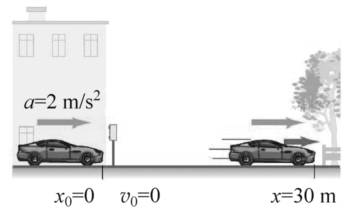

图 1-2　思考题 1-8 用图

1-9　质点在什么情况下作直线运动?在什么情况下作曲线运动?

答　如果质点的法向加速度为零,则质点作直线运动;如果质点的法向加速度不为零,则质点作曲线运动。

1-10　作曲线运动的质点必定有加速度。那么,是否必定有切向加速度?速度大小不变的运动,其加速度是否一定为零?

答　作曲线运动的质点的运动状态一直在改变着,因此其一定有加速度,但当它作匀速率运动时,由 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 知,它的切向加速度为零。因此,作曲线运动的质点不一定有切向加速度,如其速度大小不变,则它就没有切向加速度,但由于质点作曲线运动,只有它的速度方向变化,则它必有法向加速度。如果质点作直线运动,其法向加速度为零。

1-11　动物管理员在森林里寻找到了一只丢失的猴子,立即用麻醉枪射击,设子弹从枪口射出的瞬间,精明的猴子便从静止开始自由下落,如图 1-3 所示。子弹能击中猴子吗?为什么?

答　子弹作斜抛运动,对其位矢可作如下分解:

$$\boldsymbol{r} = v_0 \cos\theta \cdot t\boldsymbol{i} + \left(v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}$$

由此可见,斜抛运动也可看成是沿初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 方向的匀速直线运动和沿竖直方向的自由落体运动的叠加,如图 1-4 所示。

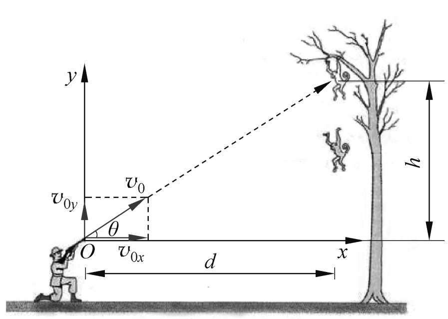

图 1-3　射击猴子

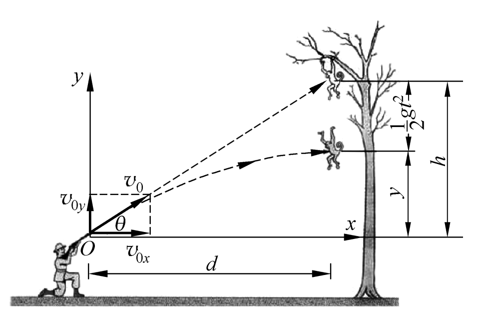

图 1-4　运动的分解

当子弹以速度 v_0 离开枪口时,猴子自由下落,则子弹和猴子在竖直方向上都作自由落体运动,且下落时间相同,因此它们在竖直方向下落的距离相同,如果子弹的射程大于从枪口到猴子的水平距离,则子弹能够击中猴子。

1-12 传说,第一次世界大战时,一架战斗机上的飞行员在一次空战中发现座舱里有一只“昆虫”在飞,他顺手抓过来一看,竟是一颗子弹,这可能吗?

答 这是有可能的。若子弹在座舱里的飞行方向沿着飞机的飞行方向,相对于地面的速率也和飞机的速率差不多时,则可能出现传说中的情况。在第一次世界大战时期,飞机的飞行速度较慢,在 150 m/s 左右,子弹的发射速度一般在每秒数百米左右,它在空中飞行速度受到空气阻力作用将减小,因此,有可能子弹射入舱内后速度减小至 150 m/s 左右,并且沿着飞机飞行的方向。

1-13 用放置在地面上的桶盛雨,刮风与不刮风时,哪一种情况下先装满?为什么?设风的方向与地面平行。

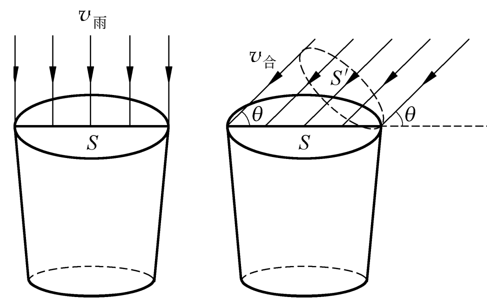

图 1-5 思考题 1-13 用图

答 只要雨下落的速率恒定,不论刮风与否,盛满雨水的时间都相等。设雨的速度为 $v_{雨}$,桶的截面积为 S,不刮风时,单位时间内落入桶的雨量为 $Q=v_{雨}S$。如刮风,雨的速率为 $v_{合}=v_{雨}/\sin\theta$,如图 1-5 所示。但这时桶相对于雨的截面积为 $S'=S\sin\theta$,因此,单位时间内进入桶的雨量为 $Q'=v_{合}S'=v_{雨}S$。

可见,在相等时间内,刮风与不刮风时,落入桶的雨量相同,即盛满雨水的时间相等,雨量计算即基于此原理。

习题解答

1-1 描写质点运动状态的物理量是__________。为了描述物体的运动而被选定的标准物叫作__________。

解 加速度是描写质点状态变化的物理量,速度是描写质点运动状态的物理量,故第一空填速度。第二空填参考系。

1-2 任意时刻 $a_t=0$ 的运动是________运动;任意时刻 $a_n=0$ 的运动是________运动;任意时刻 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的运动是________运动;任意时刻 $a_t=0$,a_n 为常量的运动是________运动。

解 匀速率;直线;匀速直线(或静止);匀速圆周。

1-3 一质点的运动方程为 $x=3t^2-12t+12$,其中 x 的单位为 m,t 的单位为 s,则当物体的速度为 6 m/s 时,其位置是________ m。

解 由于 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t-12=6$,所以 $t=3$ s,将 $t=3$ s 代入运动方程得 $x=3$ m。

1-4 一人骑摩托车跳越一条大沟,他能以与水平成 30°,大小为 30 m/s 的初速从一边起跳,刚好到达另一边,则可知此沟的宽度为________(取 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$)。

解 此沟的宽度为

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}=\frac{30^2\times\sin 60^\circ}{10}\ \mathrm{m}=45\sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

1-5 一质点在 xOy 平面内运动,运动方程为 $x=2t$,$y=9-2t^2$,长度量的单位为 m,t 的单位为 s,试写出 $t=1$ s 时质点的位置矢量为________;$t=2$ s 时该质点的瞬时速度为________,此时的瞬时加速度为________;质点运动的轨迹方程为____________。

解 将 $t=1$ s 代入 $x=2t$,$y=9-2t^2$ 得

$$x=2\ \mathrm{m},\quad y=7\ \mathrm{m}$$

故 $t=1$ s 时质点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=(2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

由质点的运动方程为 $x=2t$,$y=9-2t^2$ 得质点在任意时刻的速度为

$$v_x=\frac{dx}{dt}=2\ m/s,\quad v_y=\frac{dy}{dt}=-4t\ m/s$$

因此 $t=2$ s 时该质点的瞬时速度为

$$\boldsymbol{v}=(2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})\ m/s$$

质点在任意时刻的加速度为

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0,\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-4\ m/s^2$$

则 $t=2$ s 时该质点的瞬时加速度为$(-4\boldsymbol{j})$ m/s^2。

由运动方程消去参数 t，得质点运动的轨迹方程为

$$y=9-\frac{1}{2}x^2$$

1-6　一质点沿 x 轴正向运动，其加速度与位置的关系为 $a=3+2x$(SI)，若在 $x=0$ 处，其速度 $v_0=5$ m/s，则质点运动到 $x=3$ m 处时所具有的速度为________。

解　由 $a=3+2x$ 并作变量变换，得

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=3+2x$$

故

$$v\,dv=(3+2x)dx$$

积分得

$$\int_5^v v\,dv=\int_0^3(3+2x)dx$$

则质点运动到 $x=3$ m 处时所具有的速度大小为

$$v=\sqrt{61}\ m/s=7.81\ m/s$$

1-7　沿 x 轴运动的质点，速度 $v=\alpha x$，$\alpha>0$，$t=0$ 时该质点位于 $x_0>0$ 处，而后的运动过程中，质点加速度 a 与所到位置 x 之间的函数关系为 $a=$ ________，加速度 a 与时刻 t 之间的函数关系为 $a=$________。

解　由 $v=\alpha x$，得质点加速度与所到位置 x 之间的函数关系为

$$a=\frac{dv}{dt}=\alpha\frac{dx}{dt}=\alpha v=\alpha^2x \tag{Ⅰ}$$

由 $v=\alpha x$，得

$$v=\frac{dx}{dt}=\alpha x$$

则有

$$\int_{x_0}^x\frac{dx}{x}=\int_0^t\alpha\,dt$$

所以，质点位置 x 与时间 t 之间的函数关系为

$$x=x_0e^{\alpha t} \tag{Ⅱ}$$

将式(Ⅱ)代入式(Ⅰ)得加速度与时刻 t 之间的函数关系为

$$a=\alpha^2x_0e^{\alpha t}$$

1-8　质点沿半径为 0.02 m 的圆周运动，它所走的路程与时间的关系为 $s=0.1t^3$(m)，当质点的线速度为 $v=0.3$ m/s 时，它的法向加速度为________，切向加速度为________。

解　由 $s=0.1t^3$，得速率和时间的关系为

$$v=\frac{ds}{dt}=0.3t^2$$

由此可得，当 $v=0.3$ m/s 时，$t=1$ s。

当质点的线速度为 $v=0.3\ \mathrm{m/s}$ 时,法向加速度和切向加速度分别为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{0.3^2}{0.02}\ \mathrm{m/s^2}=4.5\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0.6t=0.6\times 1\ \mathrm{m/s^2}=0.6\ \mathrm{m/s^2}$$

1-9　一质点作半径 $R=1.0\mathrm{m}$ 的圆周运动,其运动方程为 $\theta=2t^3+3t$,θ 以 rad 计,t 以 s 计。则当 $t=2$ s 时,质点的角位置为________;角速度为________;角加速度为________;切向加速度为________;法向加速度为________。

解　$t=2$ s 时,质点的角位置为

$$\theta=(2\times 2^3+3\times 2)\ \mathrm{rad}=22\ \mathrm{rad}$$

由 $\theta=2t^3+3t$,得任意时刻的角速度大小为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=6t^2+3$$

则当 $t=2$ s 时,角加速度为

$$\omega=(6\times 2^2+3)\ \mathrm{rad/s}=27\ \mathrm{rad/s}$$

任意时刻的角加速度大小为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=12t$$

则当 $t=2$ s 时,角加速度为

$$\alpha=(12\times 2)\ \mathrm{rad/s^2}=24\ \mathrm{rad/s^2}$$

$t=2$ s 时,切向加速度为

$$a_t=R\alpha=(1.0\times 12\times 2)\ \mathrm{m/s^2}=24\ \mathrm{m/s^2}$$

$t=2$ s 时,法向加速度为

$$a_n=R\omega^2=(1.0\times 27^2)\ \mathrm{m/s^2}=729\ \mathrm{m/s^2}$$

1-10　下列各种情况中,说法错误的是[　　]。

A. 一物体具有恒定的速率,但仍有变化的速度

B. 一物体具有恒定的速度,但仍有变化的速率

C. 一物体具有加速度,而其速度可以为零

D. 一物体速率减小,但其加速度可以增大

解　一质点有恒定的速率,但速度的方向可以发生变化,故速度可以变化;一质点具有加速度,说明其速度的变化不为零,但此时的速度可以为零;当加速度的值为负时,质点的速率减小,加速度的值可以增大,所以 A、C 和 D 都是正确的,只有 B 是错误的,故选 B。

1-11　一个质点作圆周运动时,下列说法中正确的是[　　]。

A. 切向加速度一定改变,法向加速度也改变

B. 切向加速度可能不变,法向加速度一定改变

C. 切向加速度可能不变,法向加速度不变

D. 切向加速度一定改变,法向加速度不变

解　无论质点是作匀速圆周运动还是作变速圆周运动,法向加速度 a_n 都是变化的,因为至少其方向在不断变化。而切向加速度 a_t 是否变化,要视具体情况而定。质点作匀速圆周运动时,其速度大小不变,则其切向加速度为零;当质点作匀变速圆周运动时,a_t 值为不为零的恒量,但方向变化;当质点作一般的变速圆周运动时,a_t 值为不为零的变量,方向同样发生变化。由此可见,应选 B。

1-12　一运动质点某瞬时位于位置矢量 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的端点处，对其速度大小有四种意见：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　(3) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$　(4) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

下述判断正确的是[　　]。

A. 只有(1)(2)正确　　B. 只有(2)(3)正确

C. 只有(3)(4)正确　　D. 只有(1)(3)正确

解　$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$表示质点到坐标原点的距离随时间的变化率，在极坐标系中为质点的径向速度，是速度矢量沿径向的分量；$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$表示速度，为矢量；$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$是在自然坐标系中计算速度大小的公式；$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$是在直角坐标系中计算速度大小的公式。故应选 C。

1-13　一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}$（其中 a、b 为常量），则该质点作[　　]。

A. 匀速直线运动　B. 变速直线运动　C. 抛物线运动　D. 一般曲线运动

解　由 $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}$ 可得出质点的速度为$\boldsymbol{v}=2at\boldsymbol{i}+2bt\boldsymbol{j}$，加速度为 $\boldsymbol{a}=2a\boldsymbol{i}+2b\boldsymbol{j}$。因质点的速度变化，加速度的大小和方向都不变，则质点应作变速直线运动。故选 B。

1-14　一小球沿斜面向上运动，其运动方程为 $s=5+4t-t^2$(SI)，则小球运动到最高点的时刻是[　　]。

A. $t=4$ s　B. $t=2$ s　C. $t=8$ s　D. $t=5$ s

解　小球到最高点时，速度应为零。由其运动方程为 $s=5+4t-t^2$，利用 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$得任意时刻的速度为

$$v=4-2t$$

令 $v=4-2t=0$，得

$$t=2\ \mathrm{s}$$

故选 B。

1-15　如图 1-6 所示，一艘战舰同时发射两炮弹射向敌舰 A 和 B，如果在忽略空气阻力的情况下，哪条敌舰先被击中？[　　]

A. A 舰　　B. B 舰

C. A、B 两舰同时被击中　　D. 条件不足，不能判断

解　设两炮弹的初速度相同，由图 1-6 可看出，击中敌舰 A 的炮弹的射高比击中敌舰 B 的炮弹射高大，因此击中敌舰 A 的炮弹的初速度在竖直方向的分量 $v_{0y}=v_0\sin\theta$ 大于击中敌舰 B 的炮弹的初速度在竖直方向的分量，在斜抛运动过程中，从抛出点到落地点的时间为 $t=\dfrac{2v_{0y}}{g}$，击中敌舰 A 的炮弹在空中停留的时间长，由此可判断炮弹先击中敌舰 B，故应选 B。

1-16　如图 1-7 所示，一质点以恒定的速率沿螺旋线自外向内运动，则该质点加速度的大小[　　]。

A. 越来越小　B. 越来越大　C. 为大于零的常量　D. 始终为零

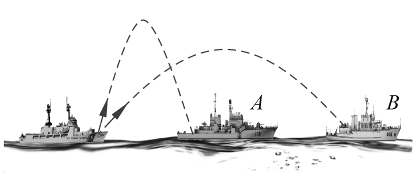

图 1-6　习题 1-15 用图

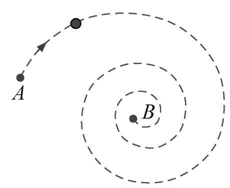

图 1-7　习题 1-16 用图

解　由于质点的速率不变，因此质点在运动过程中无切向加速度。但由于质点沿螺旋线自外向内运动，其运动轨迹的曲率半径越来越小，由此可判断其法向加速度越来越大，则质点的加速度越来越大。故应选 B。

1-17　在相对地面静止的坐标系内，A、B 两船都以 2 m/s 的速率匀速行驶，A 船沿 x 轴正向，B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x、y 轴方向单位矢量用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示)，那么在 A 船上的坐标系中，B 船的速度(以 m/s 为单位)为[　　]。

A. $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$　　B. $-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$　　C. $-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$　　D. $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$

解　选 B 船为运动物体，则 B 船相对于地的速度为绝对速度$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{j}$，$A$ 船相对于地的速度为牵连速度$\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{i}$，则在 A 船的坐标系中，B 船相对于 A 船的速度为相对速度$\boldsymbol{v}'$。由$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$，得$\boldsymbol{v}'=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，因此应选 B。

1-18　一物体作匀加速直线运动，走过一段距离 Δs 所用的时间为 Δt_1，紧接着走过下一段距离 Δs 所用的时间为 Δt_2，试证明：物体的加速度为 $a=\dfrac{2\Delta s}{\Delta t_1\Delta t_2}\dfrac{\Delta t_1-\Delta t_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}$。

证明　由题意，当物体走过第一段距离 Δs 时，有

$$\Delta s=v_0\Delta t_1+\frac{1}{2}a\Delta t_1^2 \tag{Ⅰ}$$

当物体走过第一段距离 Δs 与第二段距离 Δs 时，有

$$2\Delta s=v_0(\Delta t_1+\Delta t_2)+\frac{1}{2}a(\Delta t_1+\Delta t_2)^2 \tag{Ⅱ}$$

联立式(Ⅰ)和式(Ⅱ)即可求得

$$a=\frac{2\Delta s}{\Delta t_1\Delta t_2}\frac{\Delta t_1-\Delta t_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}$$

1-19　气球上吊一重物，以速度 v_0 从地面匀速竖直上升，上升一定高度后重物与气球分离并落回地面，整个过程所经历的时间为 t。不计空气对物体的阻力，重物离开气球时离地面的高度为多少？

解　方法一　设重物离开气球时的高度为 h_x，当重物离开气球后作初速度为 v_0 的竖直上抛运动时，选取重物离开气球时的位置为坐标原点，则重物落到地面时满足

$$-h_x=v_0\left(t-\frac{h_x}{v_0}\right)-\frac{1}{2}gt_x^2$$

式中，$-h_x$ 表示向下的位移；$\dfrac{h_x}{v_0}$为匀速运动的时间；t_x 为竖直上抛过程所经历的时间。解方程得

$$t_x=\sqrt{\frac{2v_0t}{g}}$$

于是，重物离开气球时的离地高度可通过匀速上升过程求得，其值为

$$h_x=v_0(t-t_x)=v_0\left(t-\sqrt{\frac{2v_0t}{g}}\right)$$

方法二　将重物的运动看成与气球作匀速直线运动和离开气球后作自由落体运动的合运动。显然，整个过程的总位移等于零，所以有

$$v_0t-\frac{1}{2}g\left(t-\frac{h_x}{v_0}\right)^2=0$$

解得

$$h_x=v_0\left(t-\sqrt{\frac{2v_0t}{g}}\right)$$

1-20　一质点从静止开始作直线运动，开始时加速度为 a_0，此后加速度随时间均匀增加，经过时间 τ 后，加速度为 $2a_0$，经过时间 2τ 后，加速度为 $3a_0$，……，求经过时间 $n\tau$ 后，该质点的速度和走过的距离。

解　设质点的加速度为 $a=a_0+\alpha t$，当 $t=\tau$ 时，$a=2a_0$，所以，$\alpha=a_0/\tau$，即

$$a = a_0 + a_0 \frac{t}{\tau} \tag{Ⅰ}$$

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$，对式（Ⅰ）积分，有

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left(a_0 + \frac{a_0}{\tau}t\right)\mathrm{d}t$$

得

$$v = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2 \tag{Ⅱ}$$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$，对式（Ⅱ）积分，有

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2\right)\mathrm{d}t$$

得

$$s = \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{a_0}{6\tau}t^3 \tag{Ⅲ}$$

因此，当 $t = n\tau$ 时，质点的速度为

$$v_{n\tau} = \frac{1}{2}n(n+2)a_0\tau \tag{Ⅳ}$$

质点走过的距离为

$$s_{n\tau} = \frac{1}{6}n^2(n+3)a_0\tau^2 \tag{Ⅴ}$$

1-21　两个物体以速度 u_1 和 u_2 从一足够高的塔顶沿相反方向水平抛出，不计一切阻力。求出速度矢量相互垂直的时间以及该时刻两物体的分离距离。

解　选取速度 u_1 的方向为 x 轴正方向，竖直向上方向为 y 轴正方向，则两物体任意时刻 t 的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1 = u_1\boldsymbol{i} - gt\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}_2 = -u_2\boldsymbol{i} - gt\boldsymbol{j}$$

当两物体的速度互相垂直时，有

$$(u_1\boldsymbol{i} - gt\boldsymbol{j})\cdot(-u_2\boldsymbol{i} - gt\boldsymbol{j}) = 0$$

所以

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{u_1u_2}$$

此时两物体的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1 = u_1t\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_2 = u_2t\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}$$

两物体之间的距离为

$$r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = (u_1 + u_2)t = \frac{u_1 + u_2}{g}\sqrt{u_1u_2}$$

1-22　图 1-8 是重力坝溢流段和鼻坎挑流。鼻坎与下游水位高差为 H，设挑流角为 α，水流射出鼻坎的速度为 v，试求水流射出鼻坎到下游的水平距离 L。

解　将水流射出鼻坎的运动看成一斜抛运动，则有

$$v_x = v\cos\alpha,\quad v_y = v\sin\alpha,\quad -H = v_yt - \frac{1}{2}gt^2$$

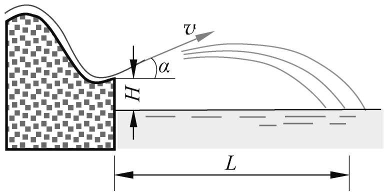

图 1-8　习题 1-22 用图

得

$$gt^2 - 2v\sin\alpha\cdot t - 2H = 0$$

解得

$$t=\frac{2v\sin\alpha\pm\sqrt{4v^2\sin^2\alpha-4g(-2H)}}{2g}=\frac{v\sin\alpha\pm\sqrt{v^2\sin^2\alpha+2gH}}{g}$$

依题意应取

$$t=\frac{v\sin\alpha+\sqrt{v^2\sin^2\alpha+2gH}}{g}$$

所以

$$L=v_x t=\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha+v\cos\alpha\sqrt{v^2\sin^2\alpha+2gH}}{g}$$

1-23 一个学校操场旁边有建筑物，建筑物顶有一平台，平台离地面的高度为 6 m，平台的四周有 1 m 高的栏杆，从栏杆的顶端算起到地面的垂直距离为 $h=7$ m。一行人将把从平台上掉落到操场的足球踢回平台，球的抛射角 $\theta=53°$，抛出点到建筑物墙的水平距离 $d=24$ m，球到墙的竖直上方一点的时间 $t=2.2$ s，如图 1-9 所示。求：(1)球的初速度；(2)球越过栏杆上方时，球离栏杆的垂直距离为多少？(3)球落在平台上的点离栏杆的水平距离。

解 (1) 设球的初速度为 v_0，由 $d=v_0 t\cos\theta$，得球的初速度为

$$v_0=\frac{d}{t\cos\theta}=\frac{24}{2.2\cos53°}\ \mathrm{m/s}=18.1\ \mathrm{m/s}$$

(2) 由 $y=v_0 t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2$，得 $t=2.2$ s 时球离地面的垂直距离为

$$y=\left(18.1\times2.2\sin53°-\frac{1}{2}\times9.8\times2.2^2\right)\ \mathrm{m}=8.13\ \mathrm{m}$$

故球越过栏杆上方时，球离栏杆的垂直距离为 1.13 m。

(3) 设从射出点到球落到平台上所用的时间为 t'，则有

$$6=18.1\times t'\sin53°-\frac{1}{2}\times9.8t'^2$$

解得

$$t'=2.46\ \mathrm{s}\quad 或\ t'=0.5\ \mathrm{s}(到达第一个相同高度点的时间，舍去)$$

故球落在平台上的点离栏杆的水平距离为

$$s=v_0 t'\cos\theta-d=(18.1\times2.46\times0.6-24)\ \mathrm{m}=2.79\ \mathrm{m}$$

1-24 如图 1-10 所示，以初速度 v_0、抛射角为 $\theta=45°$从车后向一运动的卡车抛出一小球，抛出时，小球的竖直位置与卡车车厢在同一水平面上，并与卡车车尾的距离为 $d=5$ m，卡车车厢长度 $L=2.5$ m。小球在抛出过程中，卡车以 $V=9$ m/s 速度匀速向右运动。为使被抛出的小球落到卡车车厢中，小球的初速度最大值和最小值应为多少？(取 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$)

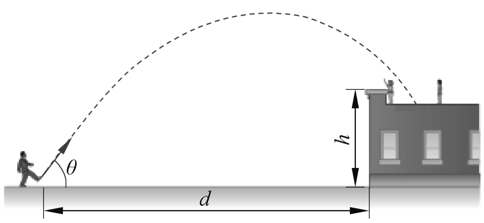

图 1-9 习题 1-23 用图

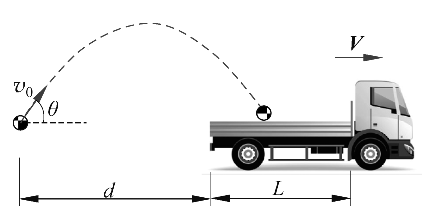

图 1-10 习题 1-24 用图

解 设小球从抛出点到落到卡车车厢中所花的时间为 t，由题意知小球要能投进卡车车厢，其速度的最小值应满足