



预备知识



0.1 因式分解基础

因式分解：

1. $x^2 - 6x + 8 =$ _____.

2. $x^2 - 5x - 6 =$ _____.

3. $x^2 - 5x + 6 =$ _____.

4. $x^2 - 6x + 5 =$ _____.

5. $x^2 - 4xy - 5y^2 =$ _____.

6. $x^2 - 2ax + (a^2 - 1) =$ _____.

7. $3x^2 - 10xy + 8y^2 =$ _____.

8. $4x^2 - 4x - 3 =$ _____.

9. $12x^2 - 25x + 12 =$ _____.

10. $6x^2 - 11x - 10 =$ _____.

11. $x^2 - (a - 2)x - 2a =$ _____.

12. $x^2 - 3x + (2 - a)(a - 5) =$ _____.

13. $ax + 2a - bx - 2b =$ _____.

14. $a^2 - b^2 + 3a + 3b =$ _____.

15. $a^2 - c^2 - 2bc - b^2 =$ _____.

16. $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =$ _____.

17. $(3a - 2b)^2 - (2a + 3b)^2 =$ _____.

18. $(a + b)^2 - c^2 - 4ab =$ _____.

19. $x(2x + 3) - y(2y + 3) =$ _____.

20. $(x + y)(x - y) - 4(x - 1) =$ _____.

21. $(2a + 1)^2 - (2a + 1)b - 12b^2 =$ _____.

22. $a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 =$ _____.

23. $x(y + 1)(y - 1) + y(x + 1)(x - 1) =$ _____.

24. $(a - b)^2 + 4(a + 1)(b + 1) =$ _____.



0.2 因式分解进阶

1. 因式分解：

(1) $x^2 - xy - 2y^2 + 5x - y + 6$;

(2) $x^4 + 3x^2 + 4$;

(3) $x^3 - 3x + 2$;

(4) $x^4 - 4x + 3$.

2. 求不定方程 $x^2 - y^2 = 2020$ 的正整数解的组数.

3. 求 $xy + x + y = 3$ 的所有整数解.

4. 求方程 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{7}$ 的所有正整数解.

5. 已知 x, y 均为实数, 且 $x^2 + xy - 2y - 2 = 0, 4y^2 + 3xy - x - 10 = 0$, 求 $x + 2y$ 的值.



0.3 立方公式与根式

1. 化简：

$$(1) (x-1)^3 + (x+1)^2;$$

$$(2) (x+2)^3 - 4(1-x)^2.$$

2. 因式分解：

$$(1) x^3 - 27y^3;$$

$$(2) a(a^2+1) + b(b^2+1).$$

3. 化简：

$$(1) \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}.$$

4. 已知 $1 \leq x \leq 2$, 化简：

$$(1) \sqrt{(1-x)^2} + |2-x|;$$

$$(2) |1-2x| + \sqrt{(x-2)^2}.$$

5. 已知 $a+b=6, ab=4$, 求下列各式的值.

$$(1) |a-b|;$$

$$(2) \sqrt{a} + \sqrt{b};$$

$$(3) a\sqrt{a} + b\sqrt{b}.$$

6. 已知 $a > 0, a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$, 求 $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值.

7. 已知 $a > b > 0$, 求证: $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

8. 已知正数 a, b 满足 $a - b = \sqrt{5}, ab = 1$. 求下列各式的值.

$$(1) a + b; \quad (2) \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad (3) a\sqrt{a} - b\sqrt{b}.$$

9. 记 $S(n) = \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$, 求 $S(1) + S(2) + \cdots + S(9)$ 的值;

10. 如果 a, b, c 为正整数, 那么 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 的值能否等于 97? 若可以, 求出全部解组数, 若不可以, 请说明理由.



0.4 韦达定理

1. 若关于 x 的方程 $x^2 - ax - a = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围为_____.
2. 若 $x = \frac{5}{2}$ 是方程 $2x^2 - mx + 5 = 0$ 的一个根, 则 $m =$ _____, 该方程的另一根为_____.
3. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实根, 则
 - (1) $x_1 + x_2 =$ _____;
 - (2) $x_1 x_2 =$ _____;
 - (3) $x_1^2 + x_2^2 =$ _____;
 - (4) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____.
4. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两个实根, 求下列代数式的值.
 - (1) $(1 - x_1)(1 - x_2)$;
 - (2) $|x_1 - x_2|$;
 - (3) $x_1^3 + x_2^3$.
5. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 2x - k - 1 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| = 2$, 求 k 的值.

6. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - (a+2)x + (3a-2) = 0$ 的两个实根, 且 $x_1^2 + x_2^2 = 16$, 求 a 的值.

7. 已知实数 m, n 满足 $mn \neq 1$, 且 $m^2 - 4m - 2 = 0, 2n^2 + 4n - 1 = 0$,

(1) 求 $m + \frac{1}{n}$ 的值;

(2) 求 $mn + \frac{1}{mn}$ 的值.

8. 是否存在实数 k , 使得关于 x 的方程 $9x^2 - (4k - 7)x + 6k^2 = 0$ 有两个不等的实数根 x_1, x_2 , 且满足 $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{3}{2}$, 若存在, 求出 k 的值, 若不存在, 请说明理由.

9. 已知实数 a, b 满足 $a \neq b$, 且 $a^2 - 3a - n = 0, b^2 - 3b - n = 0, |a - b| = \sqrt{19}$, 求 n 的值.

10. 已知 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 , 求下列代数式的值:

(1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

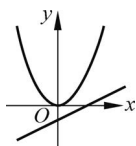
(2) $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_3}$

11. 某长方体体积为 1, 表面积为 $2k$, 所有棱长之和为 $4k$, 求正数 k 的取值范围.

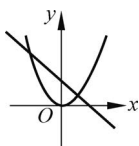


0.5 直线与抛物线的位置关系基础

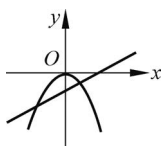
1. 当 $ab > 0$ 时, $y = ax^2$ 与 $y = ax + b$ 的图像大致是()



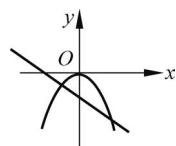
A.



B.

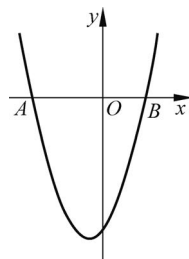


C.



D.

2. 如图所示,二次函数 $y = ax^2 + x - 6$ 的图像与 x 轴交于 $A(-3, 0)$, B 两点,下列说法正确的是()



A. 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$

B. 抛物线的顶点坐标为 $(-\frac{1}{2}, -6)$

C. A, B 两点之间的距离为 5

D. 当 $x < -1$ 时, y 的值随 x 值的增大而增大

3. 抛物线 $y = ax^2 - a$ ($a \neq 0$) 与直线 $y = kx$ 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点,若 $x_1 + x_2 < 0$,则直线 $y = ax + k$ 一定经过().

A. 第一、二象限

B. 第二、三象限

C. 第三、四象限

D. 第一、四象限

4. 将二次函数 $y = -x^2 + 2$ 的图像向右平移 2 个单位长度,得到的图像与一次函数 $y = -3x - b$ 的图像有公共点,则实数 b 的取值范围是()

A. $b > -\frac{41}{4}$

B. $b > \frac{41}{4}$

C. $b \geq -\frac{41}{4}$

D. $b < \frac{41}{4}$

5. 如图所示,在平面直角坐标系中,直线 $y_1 = mx + n$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx - 3$ 相交于点 A , B . 结合图像,判断下列结论:

① 当 $-2 < x < 3$ 时, $y_1 > y_2$;

② $x = 3$ 是方程 $ax^2 + bx - 3 = 0$ 的一个解;

③ 若 $(-1, t_1), (4, t_2)$ 是抛物线上的两点,则 $t_1 < t_2$;

④ 对于抛物线, $y_2 = ax^2 + bx - 3$, 当 $-2 < x < 3$ 时, y_2 的取值范围是 $0 < y_2 < 5$.

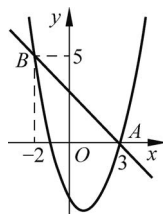
其中正确结论的个数是()

A. 4

B. 3

C. 2

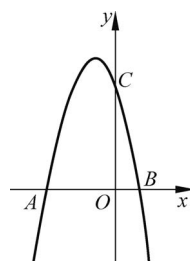
D. 1



6. 如图所示, 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + mx + 4$ 与 x 轴交于 $A(-3, 0), B$ 两点, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线解析式及 B, C 两点坐标;

(2) 以 A, B, C, D 为顶点的四边形是平行四边形, 求点 D 坐标.



7. 如图所示, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 3)$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 设点 P 是直线 BC 上方抛物线上一点, 求出 $\triangle PBC$ 的最大面积及此时点 P 的坐标.

