第1章

数学建模绪论

1.1 数学建模与人才培养

数学建模是一种利用数学方法和工具来解决实际问题的科学活动，它涉及对问题的准备、假设、建模、求解、分析、检验和应用等多个步骤，是数学与其他学科的交叉融合. 数学建模不仅能够培养学生的创新思维和实践能力，而且能够为各行各业提供有效的解决方案和决策支持.

著名数学家丘成桐曾指出："一个国家没有强大的数学基础，就没有良好的科技"(2018年清华演讲). 这一学界共识于2021年升格为国家战略——习近平总书记在两院院士大会、中国科协第十次全国代表大会上强调："要加强数学、物理、化学、生物等基础学科建设"[1]，首次将数学置于基础学科之首，明确其作为科技创新源头与关键技术突破基石的不可替代作用. 数学学科是所有学科的基础. 数学建模是沟通现实世界和数学科学之间的桥梁，是数学知识和应用能力共同提高的最佳结合点，也是激发学习欲望、培养主动探索精神和锻炼数学应用能力的有力措施. 将数学知识和方法应用于求解实际问题的数学建模是数学的重要应用；同时，在数学建模解决实际问题的过程中，往往会遇到一些新的数学问题，需要发展新的数学理论和方法，从而数学建模推动数学不断向前发展；另外，在数学建模求解过程中，不仅需要用到数学知识和方法，还需要对问题进行深入的剖析和抽象，找出问题的本质特征，这个过程需要创新思维和洞察力，是数学的延伸和拓展[2].

进入数据时代后，随着电子计算机的飞速发展、互联网计算平台的出现、人工智能在各个领域的快速渗透，数学建模继续受到人们高度关注，并在学校人才培养中发挥着重要作用[3,4].

1. 数学建模培养学生的创新思维能力

数学建模是利用数学知识来解决实际问题的方法. 在数学建模的过程中，要求学生具备一定的创新思维能力，能够灵活运用数学知识，发现并解决相关问题.

在数学建模过程中，学生需要学会从实际问题中抽象出数学问题，并使用数学方法和技巧进行求解和分析. 这个过程中，学生需要进行准备、假设、建模、求解、分析、检验和应用等步骤，这些步骤需要学生具备一定的创新思维和逻辑推理能力. 另外，学生参加较大规模的数学建模竞赛时，需要使用数学语言描述实际问题，并在此基础上进行模型假设和架构，对问题进行简化处理，构建出数学模型，需要具备一定的想象力和创造力，才能发现并解决问题.

在数学建模教学中，教学内容中包含着众多实际问题，通过利用数学知识解决实际问题的过程无形中培养了学生的创新思维和解决问题的能力.

在参与数学建模竞赛的过程中，学生会接触到不同领域的实际问题、需要学习不同领域的相关知识、对模型的优缺点进行分析等，这一系列活动能拓宽学生的视野，培养学生的创新思维能力、学科交叉的思维能力、批判性思维能力及自主学习能力.

2. 数学建模培养学生的计算机运用能力

近年来的数学建模竞赛题大部分包含大量的数据，必须借助于计算机强大的计算能力才可能在规定的时间内求解出问题.

数学建模与培养学生计算机能力相辅相成. 一方面，解决数学建模中的问题要求学生具备一定的计算机基础知识和技能，能够利用 MATLAB，Python，Lingo，SPSS 等数据处理软件进行数值计算、数值模拟、数据分析和可视化等操作；另一方面，数学建模的学习和竞赛实践，既驱动学生掌握必要的计算机基础知识和技能，又为其提供了应用与检验这些知识和技能的实战平台.

3. 数学建模培养学生的自我学习能力

数学建模本身要求学生具备一定的自学能力，数学建模中的很多常用的方法需要学生自学积累，保证比赛的时候熟练使用；数学建模的过程是应用和提升自学能力的过程，在数学建模过程中，学生需要在有限的时间内通过自学或者查找文献来获取自己所需要的知识，学生自学能力得以施展及提升. 数学建模和自我学习能力之间存在紧密的关系，通过参与数学建模活动，学生可以锻炼和提高自我学习能力、快速阅读能力、查找资料的能力等.

4. 数学建模培养学生的论文写作和表达能力

数学建模竞赛的最终成果是一篇论文，如果参赛学生的模型建立的很合理，结论和现实也很吻合，但无法清楚地表述结论，就可能前功尽弃. 所以学生需要做到论文语言表达清晰，突出重点，逻辑严谨，结构合理，这样才有机会获奖，而这个过程也锻炼了学生的写作能力.

5. 数学建模培养学生的团队合作能力

数学建模竞赛采用分组讨论的方式进行，在这个过程中参赛队员可以相互交流、相互合作、奋力攻关. 对于长期在课堂学习、做题、考试的学生来说，数学建模竞赛提供了一个既能够展示自我又能够与他人合作的平台.

1.2 数学建模的过程

1.2.1 数学建模的基本方法

数学建模的问题一般是依据实际背景，给出相关信息，如实测数据或者模拟数据、图形解释、定性的描述等已知信息，根据这些相关信息来建立数学模型. 依据建模过程中对问题认知的来源和驱动方式，数学建模方法分为如下两种：

（1）机理分析法：该方法主要根据客观事实如基本物理定律及系统的结构数据进行推理分析，建立对象的数学模型，并通过相关数据等信息确定模型中的参数，获得对象的数学模型. 常见的机理分析方法如微分方程建模法、偏微分方程建模法、逻辑法等.

（2）数据分析法：该方法主要根据问题中提供的数据，利用统计的方法建立数学模型. 常见的数据分析法有回归分析法、时间序列分析法等.

1.2.2 数学建模的步骤

建立实际问题的数学模型，尤其是建立抽象程度较高的模型是一种创造性的劳动. 现实世界中的实际问题是多种多样的，所以数学建模的方法也是多种多样的，我们不能按照一种固定的模式来建立各种实际问题的数学模型. 但是，建立数学模型的方法和过程还是存在一些共性的内容，掌握这些规律将有助于数学建模任务的完成. 下面按照常用的建模基本过程给出数学建模的一般步骤.

1. 模型准备

要建立实际问题的数学模型，首先要对需要解决问题的实际背景和内在机理进行深刻的了解，通过适当的调查和研究明确所解决的问题是什么，所要达到的主要目的是什么. 在此过程中，需要深入实际进行调查和研究，收集和掌握与研究问题相关的信息，查阅有关的文献，与熟悉情况的有关人员进行讨论，弄清实际问题的特征，按解决问题的目的更合理地收集数据，初步确定建立模型的类型等.

2. 模型假设

一般来说，现实世界里的实际问题往往错综复杂，涉及面极广. 这样的问题，如果不经过抽象和简化，人们就无法准确地把握它的本质属性，就很难将其转化为数学问题；即便可以转化为数学问题，也会很难求解. 因此要建立一个数学模型，就要对所研究的问题和收集到的相关信息进行细致分析，将那些反映问题本质属性的形态量及其关系抽象出来，简化掉那些非本质的因素，摆脱实际问题的集体复杂形态，剥离出对建立模型有用的信息资源和前提条件. 作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力. 需要注意的是，对实际问题的抽象和简化也不是无条件的（不合理的假设或过于简单的假设会导致模型的失败），必须按照一定的合理性原则进行. 假设的合理性原则有以下几点.

（1）目的性原则：根据研究问题的特征抽象出与建模目的有关的因素，剔除那些与建立模型无关或关系不大的因素.

（2）真实性原则：假设条件要符合情理，简化带来的误差应满足实际问题所能允许的误差范围.

（3）全面性原则：在对问题作出假设的同时，还要给出实际问题所处的环境条件等.

（4）简明性原则：所给出的假设条件要准确、简单，有利于构造模型.

总之，模型假设就是根据实际对象的特征和建模的目的，在掌握必要资料的基础上，对问题进行合理的抽象和必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设. 应该说这是一个比较困难的过程，也是建模过程中十分关键的一步，往往不能一次完成，而需要经过多次反

复才能完成.

3. 模型建立

在模型假设的基础上,首先区分哪些是常量、哪些是变量、哪些是已知量、哪些是未知量;然后查明各种量所处的地位、作用以及它们之间的关系,利用适当的数学工具刻画各变量之间的关系(等式或不等式),建立相应的数学结构(命题、表格、图形等),从而构造出所研究问题的数学模型.

在构造模型时究竟采用什么数学工具要根据问题的特征、建模的目的以及建模者的数学特长而定. 可以这样讲,数学的任一分支在构造模型时都可能被用到,而同一实际问题也可采用不同的数学方法构造出不同的数学模型. 但在能够达到预期目的的前提下,尽量采用简单的数学工具,以便得到的模型能够具有更广泛的应用. 另外,在建立模型时究竟采用什么方法也要根据问题的性质和模型假设所提供的信息而定. 随着现代技术的不断发展,建模的方法层出不穷,它们各有所长、各有所短,可以同时被采用,以取长补短,最终达到目的.

在初步建立数学模型之后,一般还要进行必要的分析和简化,使其达到便于求解的形式,并根据研究问题的目的和要求,对其进行检查,主要看它是否能代表所研究的实际问题.

4. 模型求解

构造数学模型之后,再根据已知条件和数据,分析模型的特征和结构特点,设计或采用求解模型的数学方法和算法,主要包括解方程、画图形、逻辑运算、数值计算等各种传统的和现代的数学方法,特别是现代计算机技术和数学软件的使用,可以快速、准确地对模型进行求解.

5. 模型的分析与检验

根据建模的目的和要求,对模型求解的数值结果进行数学上的分析,主要采用的方法有:变量之间依赖关系的分析,稳定性分析,系统参数的灵敏度分析,误差分析等. 通过分析,如果不符合要求,则修改或增减模型假设条件,重新建立模型,直至符合要求;如果符合要求,还可以对模型进行评价、预测、优化等.

在模型分析符合要求之后,我们要回到实际问题中对模型进行检验,利用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性,即检验模型的正确性. 如果由模型计算出来的理论数值与实际数值比较吻合,则模型是合理的;倘若理论数值与实际数值差别太大或部分不符,则模型是不合理的. 此时,需进一步分析,若能确定建模和求解过程合理,则问题往往出在模型假设上,应该对实际问题中的主次因素再次进行评估,调整时可能去掉或增加一些变量,也可能改变一些变量的性质;或者调整参数,或者改换数学方法,通常一个模型需要经过反复修改才能成功. 因此,模型的检验对于模型的成败至关重要,必不可少.

6. 模型应用

模型的应用是数学建模的初衷,亦是对模型最客观、最公正的检验. 因此,一个成功的数学模型,必须根据建模的目的,用于分析、研究和解决实际问题,充分发挥其在科学研究和生

产生活中的重要作用和意义.

综上六步,数学建模的过程和步骤可用图 1.2.1 所示的流程图来表示.

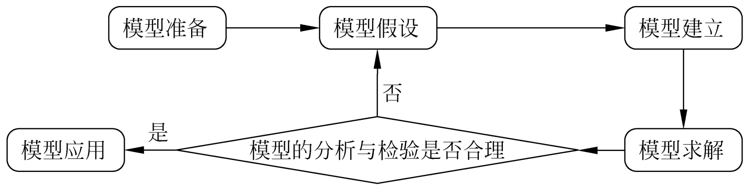

图 1.2.1　数学建模的步骤

值得注意的是：并不是所有的数学建模过程都必须严格按照上述步骤进行.上述步骤只是对数学建模过程的一个大致描述,实际建模时可以灵活应用.

在了解数学建模与人才培养的相互促进关系,以及数学建模的基本方法与步骤后,我们看到数学建模活动要求学生具有创新思维、能熟练运用数学方法建立并求解数学模型以及运用计算机技术解决实际问题的能力.因此,培养学生数学建模能力应着重培养学生的创新思维能力、数学知识的应用能力及计算机编程能力.

创新思维是人类思维的一种高级形式,它具有独创性、灵活性及多向性[6].创新思维是人脑对客观事物进行有价值的求新探索而获得独创成果的思维过程,是创新能力的灵魂和核心.大学生的观察、发现、联想和想象需要创新思维的指导；大学生的创新动机、创新目标的确立需要经过创新思维的审视；大学生的创新活动需要创新思维进行全程判断、分析和验证.由此可见,创新是在创新思维的主导下进行的,在整个创新过程中是以创新思维为灵魂的[5].创新思维能力包含直觉思维能力、逻辑思维能力、创新想象能力及批判思维能力[7].直觉思维能力要求能够对问题有敏锐的直觉判断,对新事物能迅速识别；逻辑思维能力要求对问题分析、比较、判断、推理的能力强,可以运用科学的方法进行逻辑思考；创新想象能力要求想象力丰富,能够借助表格、图形、模型等将抽象的问题具体化；批判思维能力要求敢于批判先入为主的观念,思维活跃,方法多样化,能够提出新的理论.

参 考 文 献

[1]　习近平.在两院院士大会、中国科协第十次全国代表大会上的讲话[N].人民日报,2021,5,29(1).

[2]　姜启源,谢金星,叶俊.数学模型[M].6 版.北京：高等教育出版社,2024.

[3]　由守科,俞芳.基于核心素养下的数学建模竞赛与高校数学教育教学改革的探讨[J].数学学习与研究,2023,(1)：119-121.

[4]　宋凌云.关于数学建模融入大学数学教学改革的探索[J].数学学习与研究,2022,(29)：17-19.

[5]　王慧.培养学生数学建模能力的方法研究：以《指数函数与对数函数》教学为例[D].天津：天津师范大学,2020.

[6]　曹颖颐.大学生创新能力指标体系的构建研究[D].武汉：武汉理工大学,2008.

[7]　孟军,白钰莹,张战国,等.数学建模竞赛对大学生创新能力的影响[J].科技管理研究,2021,41(22)：205-212.

[8]　陈传军,李清华,王智峰.新工科背景下将数学建模思想融入大学数学课程教学的改革与实践[J].数学学习与研究.2022,29.

[9]　杨然,周圣武.以数学建模竞赛为抓手培养学生实践创新能力[J].实验技术与管理.2021,38(3).

[10] 牛艳秋.基于数学建模能力培养的应用型高校数学教学策略研究[J].现代商贸工业.2025,3:238-240.
[11] 刘今子,郭立丰,杜辉,等.以数学建模能力为驱动的本科高校应用型创新人才培养模式探索[J].创新创业理论研究与实践,2021,4(4):134-136.
[12] 张晓明.数学建模:优化应用型本科高校创新人才培养的路径[J].教育评论,2022,6:144-150.

第 2 章

初等数学建模方法

数学建模中的初等模型是基于初等数学知识和方法所建立的数学模型，具有基础性、直观性和应用性等特点[1]. 具体说来，基础性是指初等模型主要基于初等数学的知识和方法，不涉及复杂的数学理论和高深的数学技巧；直观性是因为使用了基础的数学语言和工具，初等模型往往能够直观地描述和解释实际问题中的数量关系和空间形式；应用性则是指初等模型广泛应用于物理、工程、经济、生物等多个领域，帮助人们解决实际问题，优化资源配置和决策方案.

建立初等模型一般需要遵循以下步骤[2]：

（1）模型准备：首先需要明确问题的目标，确定需要解决的核心问题，根据问题的需求，收集相关的数据和信息.

（2）模型假设：通过合理的假设，提取问题的核心要素，降低建模的复杂度.

（3）模型构成：根据问题的特性和收集的数据，选择合适的数学方法进行建模. 这一步需要运用初等数学的知识和方法，将实际问题抽象为数学问题. 通过数学公式推导、数值计算、近似计算或模拟实验等方法求解模型.

（4）模型评价：将模型的预测结果与实际数据进行对比验证，确保模型的准确性和可靠性.

如果在某个实际问题中，我们用初等的方法和所谓高深复杂的方法建立起两个模型，它们的应用效果相差无几，那么受到人们欢迎并采用的模型一定是前者而非后者[3,4].

本章为选学章节，专为数学建模初学者（尤其是刚接触建模思维的学生与入门级读者）设计. 作为建模入门的“阶梯式内容”，我们将聚焦基于初等数学知识（代数运算、几何直观、统计初步等）构建的数学模型，通过几个经典实例展示：如何用熟悉的数学语言描述现实世界的数量关系与空间形式，如何从复杂的实际问题中提炼关键变量、建立逻辑关联，最终为决策提供可操作的科学依据[5,6].

初等模型看似简单，却是探索复杂建模问题的起点. 无论是后续章节将涉及的微分方程模型、优化模型，还是更高阶的统计学习模型，其核心思维“从实际问题抽象数学结构”“用数学结论解释实际现象”都能在初等模型中找到雏形.

若读者已具备一定的数学建模经验和基础，则可跳过此章，直接进入后续更深入的内容学习.

2.1 案例 1 四足动物的身长与体重关系问题

不知大家是否注意过，生猪收购站点里那些有经验的师傅，往往从生猪的身长（此处身长不包括头尾）就可以预估出它的体重. 显然，这给收购点的工作带来很大的方便. 那么四足

动物的身长与其体重有什么关系呢？让我们从数学建模的角度，利用类比的方法来研究这个问题.

模型准备

由于不同种类的四足动物的生理构造各有不同，如果陷入生物学对复杂生理结构的研究，将大大增加建模的难度和复杂度.为此，我们可以考虑作一些粗浅的假设，在此基础上建立起动物身长和体重的比例关系.

四足动物可以看成一根支撑在四肢上的弹性梁，通过查阅相关资料[7,8]，弹性力学中关于两端固定弹性梁有一个相关定律：长度为 L 的圆柱形弹性梁在自身重力 f 的作用下，弹性梁的最大弯曲 v 与重力 f 及 L^3 成正比，与梁的截面面积 s 和梁的直径 d 的平方成反比，即有：$v\propto\frac{fL^3}{sd^2}$，其中$\propto$为比例符号，表示正比关系.

模型假设

由模型准备，我们采用类比的方法给出一些相应的假设.

(1) 设四足动物的躯干是不包括头、尾的部分，可视为一个圆柱体，其长为 L，横截面的直径为 d、体积为 m(参见图 2.1.1).

(2) 设四足动物的躯干质量与它体重相同，记为 f.

(3) 四足动物可以看成一根支撑在四肢上的弹性梁，其腰部的最大下垂对应弹性梁的最大弯曲，记为 v(参见图 2.1.1).

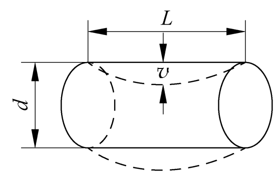

图 2.1.1 躯干简化示意图

模型构成

基于模型假设，我们可以建立一个简洁的比例模型.质量与体积的关系为 $f\propto m$，将躯干简化为横截面的直径为 d、长度为 L、体积为 m 的圆柱体，圆柱体的体积与横截面面积和长度的关系满足 $m=sL$，根据弹性理论，得关系 $v\propto\frac{fL^3}{sd^2}$.由正比关系的传递性，得 $v\propto\frac{fL^3}{sd^2}\propto\frac{sL^4}{sd^2}=\frac{L^4}{d^2}\Rightarrow\frac{v}{L}=\frac{L^3}{d^2}$，式中$\frac{v}{L}$是动物躯干的相对下垂度.

从生物进化理论来看，若相对下垂度$\frac{v}{L}$太大，四肢无法支撑，此种动物必然会被淘汰.若相对下垂度$\frac{v}{L}$太小，四肢的尺寸超出了支撑躯体的需要，也不符合进化理论.因此我们不妨认为，每一种生存下来的动物，经过长期的进化之后，它们的相对下垂度$\frac{v}{L}$已经达到合适的数值，应该接近一个常数.不同种类的动物，这个常数可能不同.于是，得到关系：$d^2\propto L^3$.再结合之前已有的关系 $f\propto m$，$m\propto sL$，$s\propto d^2$，我们得到了四足动物体重与躯干长度的关系为

$$f=kL^4,$$

其中 k 为比例系数.此关系式即为本问题的数学模型.

模型应用与评价

这个模型具有一定的应用价值.估计某种四足动物的体重时，可以根据大量数据，由统计方法分析得出公式中的比例系数 k，即可建立利用躯干长度估计该类动物体重的公式.生

猪收购站点经验丰富的师傅往往仅凭生猪的躯干长度(不含头尾)就能预估其体重,这种经验背后有着一定的科学依据.

类比法是依据两个对象的已知的相似性,将其中一个对象的已知特殊性质迁移到另一个对象上去,从而获得另一个对象的性质的一种方法.在数学建模时,利用类比法对问题进行大胆的假设和简化是一个关键策略,但使用此方法时必须注意对所得到的数学模型进行检验.同时,从一系列的比例关系着手推导模型,常常可以使推导过程得到显著简化.

2.2 案例2 双层玻璃的隔热功效

双层玻璃,也称为中空玻璃,是一种由两层玻璃通过密封材料粘合形成的结构,中间通常填充干燥气体或抽成真空.北方城镇的很多建筑物的窗户使用的都是双层玻璃,两层玻璃之间有着一定的空隙,这样做的主要目的之一是提高隔热性能,减少热量传递,从而有效减少室内向室外的热量流失.下面尝试用数学建模的方法描述这一热量流失过程,并给出双层玻璃能减少多少热量损失的定量分析.

模型准备

不难看出,本问题与温差、热量传播的形式等有关,通过检索查阅相关资料[9,10],得到与热量传播相关的一个物理定律:热传导定律.即厚度为 d 的均匀介值,两侧温差为 ΔT,则单位时间内由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q 与 ΔT 成正比,与 d 成反比.即

$$Q=k\,\frac{\Delta T}{d},$$

其中,k 为热传导系数.

注释:热传导系数是描述材料导热能力的物理量,表示单位时间内通过单位面积和单位温度梯度时传递的热量.热传导系数越大,材料的导热性能越好.例如,金属的热传导系数值较高,是良好的导热体;而空气、泡沫塑料等热传导系数值较低,是良好的绝热体.

模型假设

(1) 热量传播只有传导形式,没有对流、辐射等其他形式.

(2) 室内温度和室外温度保持不变,热传导过程已经处于稳定状态,即沿热传导方向,单位时间通过单位面积的热量是常数.

(3) 玻璃厚度一定,玻璃材料均匀,热传导系数为常数.

符号约定(参见图2.2.1)

d——玻璃厚度;

T_1——室内温度;

T_2——室外温度;

T_a——靠近内层玻璃的温度;

T_b——靠近外层玻璃的温度;

L——玻璃之间的距离;

k_1——玻璃热传导系数;

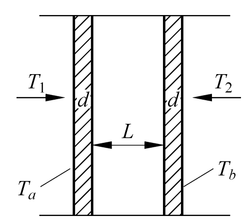

图2.2.1 双层玻璃示意图

k_2——空气热传导系数.

由热量守恒定律,对于双层玻璃有:穿过内层玻璃的热量,等于穿过中间空气层的热量,等于穿过外层玻璃的热量,所以根据热传导物理定律,得

$$Q=k_1\frac{T_1-T_a}{d}=k_2\frac{T_a-T_b}{L}=k_1\frac{T_b-T_2}{d},$$

消去不易测量的 T_a,T_b,有

$$Q=k_1\frac{T_1-T_2}{d(s+2)},$$

其中,$s=\frac{L}{d}\frac{k_1}{k_2}$.

中间无空隙的双层玻璃可以视为厚度为 $2d$ 的单层玻璃,由热传导物理定律,有

$$Q'=k_1\frac{T_1-T_2}{2d},$$

显然,$d(s+2)>2d$,即有 $Q<Q'$,这说明双层玻璃比单层玻璃保温.

为了得到定量的结果,通过查阅相关资料,可以得到所需信息:常用玻璃的热传导系数 $k_1=0.4\sim0.8\mathrm{W/(m\cdot K)}$,静止的干燥空气的热传导系数 $k_2=0.025\mathrm{W/(m\cdot K)}$,用最保守的估计,有$\frac{k_1}{k_2}=16$,$\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{8h+1}$,$h=\frac{L}{d}$.

比值$\frac{Q}{Q'}$反映了双层玻璃在减少热量损失上的功效,它只与 $h=\frac{L}{d}$有关.为了进一步得到本问题的定量分析,我们从图形考察它的取值情况.

图 2.2.2 为$\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{8h+1}$的图形.横坐标为 h,纵坐标为$\frac{Q}{Q'}$.从图 2.2.2 来看,此函数无极小值,且当 $h=\frac{L}{d}$增大时,$\frac{Q}{Q'}$迅速下降,但 h 超过 4 后下降开始变慢.从节约材料的角度考虑,h 不宜选择过大,避免造成浪费.当 $h\approx4$ 时,有$\frac{Q}{Q'}\approx3\%$,这说明在保守的情况下,玻璃之间的距离约为玻璃厚度的 4 倍时,双层玻璃可以比单层玻璃减少 97%左右的热量损失.

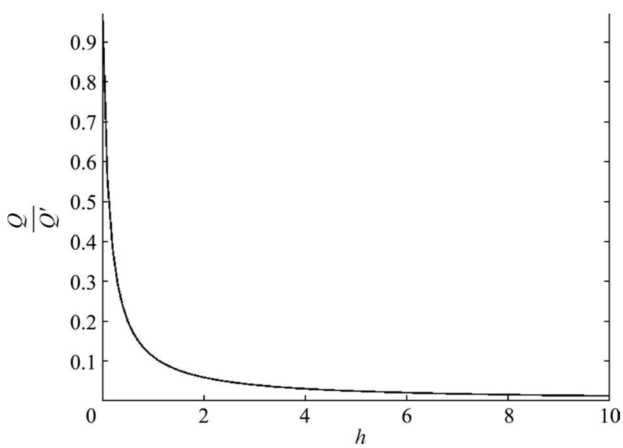

图 2.2.2 $\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{8h+1}$的图形