

第一章

数学思想方法

1.1 化归与转化思想

引言

化归与转化思想在高中数学中普遍使用,尤其在求解一些经典的数学问题中,化归与转化思想往往是解决数学问题的第一道工序.很多看似困难的无从下手的问题,如果能灵活进行化归与转化,就能找到突破口,自然就变得简单多了.化归与转化思想贯穿于整个高中数学之中,是应用最为广泛的数学思想方法.究其原因是化归与转化思想能够在各种类型的试题解答中都发挥效果,而且学生也能普遍接受和理解.

思维概述

化归与转化思想是指在研究和解决数学问题时,将一个问题由难化易、由繁化简、由复杂化简单的过程.化归与转化思想主要有:熟悉化原则、简单化原则、直观化原则、和谐化原则等.

方法提炼

化归与转化思想常用到的具体方法如下.

方法 1 直接转化法.将复杂问题直接转化为熟悉的问题,如在解三角形中,主要的转化有角度的转化、通过正弦定理、余弦定理实现边角关系的转化等.

方法 2 换元法.通过换元,可将无理式变为有理数,将较复杂的函数、方程、不等式问题转化为易于解决的问题.

方法 3 数形结合法.将问题中数量关系转化为图形关系,或者将图形关系转化为数量关系,使得问题变得简单、直观.

方法 4 等价转化法.将问题转化为一个相对简单且易于解决的等价命题,达到化归的目的.

方法 5 特殊化方法.将问题向特殊化形式转化,并证明特殊化后的问题.



技巧应用

1. 补集思想

考虑到正面分析比较复杂,用补集思想,从对立面思考.对于计算题,可先算出不符合要求的情况数,然后再用总的情况数减之即可.对于证明题,可利用反证法,先假设原命题成立,推出矛盾,故假设不成立,于是问题得证.

例 1 中国空间站的主体结构包括天和核心实验舱、问天实验舱和梦天实验舱,假设空间站要安排甲、乙等 5 名航天员开展实验,三舱中每个舱至少一人至多二人,则甲乙不在同一实验舱的种数有().

- A. 60 B. 66 C. 72 D. 80

解 5 名航天员安排三舱,每个舱至少一人至多二人,共有 $C_5^1 C_3^1 C_4^2 = 90$ 种安排方法,甲、乙在同一实验舱的种数有 $C_3^1 C_3^1 C_2^1 = 18$ 种.根据补集思想可知甲、乙不在同一实验舱的种数有 $90 - 18 = 72$ 种.故选 C.

点评 运用组合公式求出所有的情况和甲、乙在同一实验舱的情况,然后利用补集思想即可求解.

变式 1 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - 1$.若 $f(a) + f(b) + f(c) = 0$,证明: a, b, c 这三个数中至少有一个数不大于 1.

2. 将多变量问题转化为单变量问题

根据题意,将待解决的双变量问题不断的等价转化,最后转化为我们熟悉的单变量问题,然后构造函数,利用函数单调性,问题即可获解.

例 2 若锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,其外接圆的半径为 $\sqrt{3}$,且 $a \cos(B-C) + a \cos A = 2\sqrt{3}c \sin B \cos A$,则 $\frac{b^2 + a^2}{b}$ 的取值范围为_____.

解 因为 $a \cos(B-C) + a \cos A = 2\sqrt{3}c \sin B \cos A$,所以 $a \cos B \cos C + a \sin B \sin C - a(\cos B \cos C - \sin B \sin C) = 2\sqrt{3}c \sin B \cos A$,即 $a \sin B \sin C = \sqrt{3}c \sin B \cos A$.由正弦定理得 $\sin A \sin B \sin C = \sqrt{3} \sin C \sin B \cos A$.显然 $\sin C > 0, \sin B > 0$,则 $\sin A = \sqrt{3} \cos A$,所以 $\tan A = \sqrt{3}$,因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

因为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2\sqrt{3}$, 则 $a = 3, b = 2\sqrt{3}\sin B$, 故

$$\frac{b^2 + a^2}{b} = b + \frac{a^2}{b} = 2\sqrt{3}\sin B + \frac{3\sqrt{3}}{2\sin B} = 2\sqrt{3}\left(\sin B + \frac{3}{4\sin B}\right).$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以
$$\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, 即 $\sin B \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

令 $f(x) = x + \frac{3}{4x}, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 根据对勾函数的性质可知函数 $f(x) = x + \frac{3}{4x}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}, f(1) = \frac{7}{4}$, 所以 $f(x) \in [\sqrt{3}, 2)$, 即 $\sin B + \frac{3}{4\sin B} \in [\sqrt{3}, 2)$, 则 $2\sqrt{3}\left(\sin B + \frac{3}{4\sin B}\right) \in [6, 4\sqrt{3})$, 即 $\frac{b^2 + a^2}{b}$ 的取值范围为 $[6, 4\sqrt{3})$.

点评 由题给条件解出 A , 再运用正弦定理边化角, 将待求式子转化为仅含角 B 的式子, 最后构造函数, 利用对勾函数的单调性求出所求式子的范围.

变式 2 已知函数 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 是两个不相等的正数, 且 $a + \ln b = b + \ln a$, 证明: $a + b + \ln ab > 2$.

3. 函数与方程之间的转化

函数的零点就是方程的根, 二者可以互相转化. 例如, 函数 $f(x) = g(x) - h(x)$ 的零点个数就是曲线 $y = g(x)$ 与曲线 $y = h(x)$ 的交点个数.

例 3 (2024 年新高考 II 卷) 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ().

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

分析 本题以二次函数与余弦函数为背景, 考查转化思想、数形结合思想以及偶函数的



性质. 解题的关键是利用转化思想, 由 $f(x)=g(x)$ 将两个函数的项 $2ax$ 消去, 得到 $ax^2+a-1=\cos x$ 或者 $ax^2+a-1-\cos x=0$. 观察可知 $y_1=\cos x, y_2=ax^2+a-1, h(x)=ax^2+a-1-\cos x$ 皆为偶函数, 可结合图像性质或者偶函数的性质求解.

解 令 $f(x)=g(x)$, 移项整理可得方程 $ax^2+a-1-\cos x=0$. 因为方程只有一个根, 则问题等价于函数 $h(x)=ax^2+a-1-\cos x$ 在 $(-1,1)$ 上存在唯一零点. $h(x)=ax^2+a-1-\cos x$ 为偶函数, 可知该唯一零点是 0, 由 $h(0)=0$ 解得 $a=2$. 故选 D.

点评 已知 $h(x)$ 是偶函数, 由偶函数的对称性、定义域的对称性及函数只有一个零点得到“零点是 0”的结论.

变式 3 已知函数 $f(x)=x^2\cos\pi x-2x\cos\pi x+\cos\pi x$, 则方程 $f(x)=1$ 在区间 $[-2,4]$ 上的所有实根之和为().

A. 0

B. 3

C. 6

D. 12

4. 换元法

换元法的核心是把复杂的问题化为容易求解的问题, 将较难的问题化为较简单的问题. 例如把根式问题化为整式问题, 把三角函数问题化为二次函数或分式函数问题等.

例 4 求函数 $f(x)=\frac{\sin 2x}{2+\sin x-\cos x}$ 的值域.

解 令 $t=\sin x-\cos x$, 则 $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $\sin 2x=2\sin x\cos x=1-t^2$, 所以 $f(x)=\frac{1-t^2}{2+t}$. 令 $u=t+2\in[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$, $f(x)=-\left(u+\frac{3}{u}\right)+4$, $u\in[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$, 故 $f(x)$ 的值域为 $\left[-1-\frac{\sqrt{2}}{2},4-2\sqrt{3}\right]$.

变式 4 求函数 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{-x^2+3x-2}$ 的值域.

1.2 特殊与一般思想

引言

在数学学习的过程中,对公式、定理、法则的学习往往都是从特殊开始,通过总结归纳得出经过证明后,成为一般性结论,又使用它们来解决相关的数学问题.数学中的“特殊与一般思想”体现在解题中经常使用的归纳法、演绎法以及在解题过程中采用的特殊化方法、一般化方法或者具体化的方法.

思维概述

“特殊”是指具体的、个别的事例.比如在研究数列时,先分析像等差数列、等比数列这些特殊数列的通项公式和求和公式.在几何中,特殊三角形(如等边三角形、等腰直角三角形)就是三角形中的特殊情况.

“一般”是具有普遍意义的抽象概念.例如从特殊的等差数列、等比数列的性质推广到一般数列可能存在的规律.这种思想常表现为从特殊情况入手,探寻一般规律.

方法提炼

数学思想方法贯穿在高中数学的每章内容之中,从数学思想方法中,提炼出数学问题的解题之法,是有用的,更是自然的.根据特殊与一般思想,我们可提炼出的解题之法有:特殊化、具体化、一般化和归纳推理.

技巧应用

1. 特殊化

在不改变本质的基础上,可以结合具体题目进行赋特值、构造特殊函数、利用特殊图形、特殊点、特殊位置等来进行特殊处理,这对某些高考小题而言,是有效的,而且是高效的.

例 1 (2025 年新高考 I 卷) 已知 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$, 则 x, y, z 的大小关系不可能为().

A. $x > y > z$

B. $x > z > y$

C. $y > x > z$

D. $y > z > x$

解 令 $x=1$, 则 $y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{125}$, 得 $x > y > z$. 令 $x=8$, 则 $y=9, z=1$, 得 $y > x > z$. 令 $x=64$, 则 $y=243, z=125$, 得 $y > z > x$. 故选 B.

点评

本题用特殊值法来解决是比较好的方法,当然也可以设已知的式子等于 t , 转化为关于 t 的指数函数来解决. 本题体现了“多想少算”的设计理念,对中学教学有很多的引导作用.



例 2 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点,则 $\overrightarrow{EB}=(\quad)$.

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

解 题中对 $\triangle ABC$ 的形状没有任何定量限定,故可以将 $\triangle ABC$ 特殊化,然后利用坐标运算求解.

如图 1.1 所示,不妨设 $\triangle ABC$ 是以 $BC=4$ 为斜边的等腰直角三角形,故 $A(0,2),B(-2,0),C(2,0),E(0,1)$,可得 $\overrightarrow{AB}=(-2,-2),\overrightarrow{AC}=(2,-2),\overrightarrow{EB}=(-2,-1)$,令 $\overrightarrow{EB}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,故可得

$$\begin{cases} -2x+2y=-2, \\ -2x-2y=-1, \end{cases} \text{解得 } x=\frac{3}{4}, y=-\frac{1}{4}. \text{ 故选 A.}$$

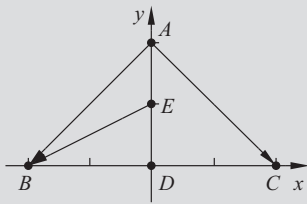


图 1.1

变式 1 若 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数,则实数 $a=\underline{\hspace{2cm}}$.

变式 2 (2022 年新高考 II 卷)若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$,则 $(\quad)$.

A. $\tan(\alpha-\beta)=1$

B. $\tan(\alpha+\beta)=1$

C. $\tan(\alpha-\beta)=-1$

D. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

2. 具体化

抽象函数是高考的一个难点,主要考查函数的单调性、对称性和奇偶性等性质,因为没有给出函数的解析式,所以很多学生无从下手.如果我们熟悉指数函数、对数函数、幂函数和三角函数等各种函数满足的方程,则可根据题干得到函数的具体解析式,化抽象为具体,再利用函数的解析式解题就容易多了.

例 3 (2022 年新高考 II 卷)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(x+y)+f(x-y)=$

$f(x)f(y), f(1)=1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$.

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

解 抽象函数具体化, 用特殊函数去满足题中要求.

由 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ 联想到余弦函数和差化积公式 $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$, 可设 $f(x) = a \cos \omega x$. 因为 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, 令 $x=1, y=0$, 可得 $2f(1) = f(1)f(0)$, 故 $f(0) = 2$, 所以 $\begin{cases} f(0) = a = 2, \\ f(1) = a \cos \omega, \end{cases}$ 则 $a = 2, \omega = \frac{\pi}{3}$.

$f(x) = 2\cos \frac{\pi}{3}x$ 符合条件, 因此 $f(x)$ 的周期 $T = 2\pi : \frac{\pi}{3} = 6$, 则 $f(0) = 2, f(1) = 1$, 且 $f(2) = -1, f(3) = -2, f(4) = -1, f(5) = 1, f(6) = 2$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0$, 由于 22 除以 6 余 4, 因此 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3$. 故选 A.

点评 抽象函数具体化是解题这类试题的关键. 根据题干的结构和和差化积公式, 可知 $f(x)$ 是余弦型函数. 可用赋值法确定 a 与 ω 的值, 这体现出了方程的思想.

变式 3 已知 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) + g(2-x) = 3, g(x) - f(x-4) =$

7. 若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{2022} f(k) = (\quad)$.

A. -5045

B. -4145

C. -4045

D. -4037

3. 一般化

对于具有相似结构的数的比大小问题, 可寻求相应函数并根据函数的单调性来求解.

例 4 设 $a = 0.9^{1.3}, b = 0.9^{1.4}, c = 0.7^{1.4}$, 则下列不等式中正确的是 ().

A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

解 观察数值特点, 找对应函数, 一般化处理.

设 $f(x) = 0.9^x$, 则由指数函数 $f(x) = 0.9^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 得 $f(1.3) > f(1.4) \Rightarrow a = 0.9^{1.3} > b = 0.9^{1.4}$. 设 $h(x) = x^{1.4}$, 则幂函数 $h(x) = x^{1.4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得 $h(0.9) = 0.9^{1.4} = b > c = h(0.7) = 0.7^{1.4}$, 所以 $a > b > c$. 故选 B.



例 5 已知 $a = \frac{1}{2}\ln 2, b = \frac{1}{3}\ln 3, c = \frac{1}{e}$, 则().

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

解 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 所以当 $0 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 又 $a = \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\ln 4}{4} = f(4), b = \frac{1}{3}\ln 3 = f(3), c = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e} = f(e)$, 而 $4 > 3 > e$, 所以 $f(4) < f(3) < f(e)$, 即 $a < b < c$. 故选 A.

点评 根据题干的构造, 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 利用导数得到函数的单调性, 又 $a = \frac{1}{2}\ln 2 =$

$\frac{\ln 4}{4} = f(4), b = f(3), c = f(e)$, 结合函数的单调性即可.

变式 4 已知 $a = \log_7 3, b = \log_{11} 7, c = \log_{15} 12$, 则().

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

3. 归纳推理

归纳推理即从具体的个别事实或现象中, 发现它们之间的共性和规律, 进而推广到一般情形.

例 6 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$ 且 $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的第 2, 3, 4 项;

(2) 根据(1)的计算结果, 猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并用数学归纳法证明.

解 (1) $a_1 = 0$ 且 $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$, 则 $a_2 = \frac{1}{2 - a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2 - a_2} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{1}{2 - a_3} =$

$$\frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

(2) 由(1)的计算结果可猜想 $a_n = \frac{n-1}{n}$, 证明如下:

当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$, 等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立, 即有 $a_k = \frac{k-1}{k}$, 则当 $n=k+1$ 时, 有 $a_{k+1} = \frac{1}{2-a_k} = \frac{1}{2-\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k+1}$, 即当 $n=k+1$ 时, 等式成立.

猜想 $a_n = \frac{n-1}{n}$ 成立.

点评 第(1)问由题意逐个计算即可得. 第(2)问, 由(1)的计算结果可猜想出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 利用数学归纳法证明即可得.

变式 5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$.

- (1) 计算 a_2, a_3, a_4 , 并猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 用数学归纳法来证明(1)中猜想.

1.3 数形结合的思想

引言

著名数学家华罗庚曾说过:“数缺形时少直觉, 形少数时难入微.”在数学中, 数与形是两个最主要的研究对象, 两者之间存在着非常密切的联系, 又可以互相转化, 这种联系和转化, 称为数形结合. 作为最重要的数学思想之一, 数形结合可以通过数的形式帮助我们理解图形, 也可以借助图形让我们理解数与式的含义. 在高中数学的学习和教学过程中, 数形结合是很常用的一个数学思想方法.

思维概述

数形结合通过数与形的相互转化, 将数学语言与数学图形相结合, 使复杂的数学问题直观化、简单化, 从而避免复杂的推理运算, 达到高效、便捷的解题效果.

在高中数学里, 函数(包括三角函数)的性质可以借助图像来研究. 在不等式的证明、向量数量积的计算中, 可以利用几何图形直观的把数量关系反映出来. 在解析几何中, 也经常用到数形结合来简化计算.

**方法提炼**

本节主要从以下几个方面对数形结合的应用进行研究.

(1) 研究函数性质,如零点、单调性等,可以借助图像来直观反映.分段函数要把每一段自变量范围内的图像较准确的画出来,尤其是端点、极值点、单调性等关键元素表现出来.

(2) 求三角函数中参数范围时,可利用“五点作图法”,作出三角函数的图像(与原函数 $f(x)=\sin x, f(x)=\cos x$ 的对比图像)进行研究.三角函数图像在变换过程中,形状趋势不会改变,根据这一特点画出对比图像,按顺序标出五个点.

如图 1.2 所示为 $f(x)=\sin x$ 的原始图像.

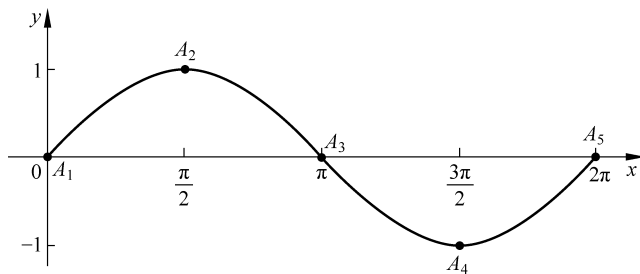


图 1.2

按顺序标出五个点的坐标, $A_1(0,0), A_5(2\pi,0), A_3(\pi,0), A_2(\frac{\pi}{2},1), A_4(\frac{3\pi}{2},-1)$, 对于各点横坐标来讲,先标 A_1, A_5 为 A_1 加一个周期, A_3 为 A_1, A_5 中点, A_2 为 A_3, A_1 中点, A_4 为 A_5, A_3 中点. 在有些题目中,有时需要多画出几个周期. 再根据题目要求,列出不等式求解.

(3) 向量数量积的运算有时可利用向量的投影来简化运算. 由向量数量积的公式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ 可知, 向量数量积可以看作 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影再乘以 $|\mathbf{a}|$, 不过这个投影分正负, θ 为锐角时投影为正, θ 为钝角时投影为负, θ 为直角时投影为 0.

(4) 数形结合在解析几何中应用非常广泛, 比如抛物线中“双正方形”的应用.

如图 1.3 所示, 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 点 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 为抛物线的焦点, $l: x = -\frac{p}{2}$ 为抛物线的准线, l 与 x 轴交于点 K , AB 为抛物线的通径, 点 $A(\frac{p}{2}, p)$, 点 $B(\frac{p}{2}, -p)$. 分别过点 A, B 向 l 作垂线, 垂足分别为 D, C , 连接 KA, KB , 则四边形 $ADKF$ 和四边形 $BCKF$ 为 2 个边长为 p 的正方形, 且直线 KA, KB 分别与抛物线相切于点 A, B .

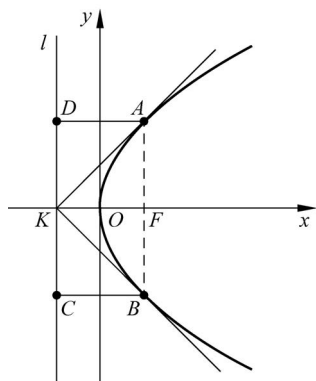


图 1.3