第 5 章

逻 辑 演 算

逻辑是研究推理规律的科学,数理逻辑则是用数学的方法研究推理的规律,特别是数学证明的规律。所谓数学方法,就是建立符号体系,并在符号体系中表达和证明定理。因此数理逻辑又称为符号逻辑或理论逻辑。

现代数理逻辑的发展形成了相互独立又相互联系的四个主要的分支:证明论、模型论、递归论和公理集合论。这四个分支都建立在逻辑演算的基础上,有时也将逻辑演算作为数理逻辑的一个分支。逻辑演算是指用形式化方法处理逻辑推理,特别是数学中所用推理,因为形式化推理过程与代数演算具有相似性,所以称为逻辑演算。

前面学习的集合论部分侧重于抽象能力的训练,强调用数学工具描述事物及其联系。数理逻辑侧重于逻辑推理能力的训练,强调利用逻辑推理规则,从前提推出结论,其基础就是逻辑演算,又分为命题演算和谓词演算。

本章主要讨论命题演算和谓词演算的形式系统,它们是计算机科学的理论基础,其中的谓词演算系统更是在人工智能领域获得了重要的应用。

5.1 等值演算

本节主要讨论逻辑公式之间的等价变换。

5.1.1 指派与解释

为了形式化地表示命题,需要一种语言,假设 Σ 是一个字母表,则 Σ^* 就是所有字符串的集合,$L\subseteq\Sigma^*$ 是一个形式语言,谓词演算中所有的合式公式(包括了命题演算中所有的命题公式)构成了一个形式语言。

定义 1.16 将命题公式递归定义如下。

(1) 原子命题是命题公式。

(2) 如果 P、Q 为公式,则$\neg P$、$P\wedge Q$、$P\vee Q$、$P\rightarrow Q$ 是命题公式。

(3) 只有经有限步使用(1)、(2)得到的才是命题公式。

令 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots\}$表示所有原子命题公式构成的集合,则 P 是一个可数集,即 $|P|=a$,令 $F=\{A_1,A_2,\cdots,A_m,\cdots\}$表示所有命题公式构成的集合,$F$ 也是一个可数集。

$\forall P_i\in P(i\in N)$,P_i 称为一个命题变量,命题公式的内涵取决于给定命题公式中所有命题变量的一组真值时的取值情况。

定义 5.1 设 $A\in F$ 是一个命题公式,$P_1,P_2,\cdots,P_n\in P$ 是 A 中出现的所有命题变量,

则称映射 $\alpha:\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}\to\{0,1\}$为 A 的指派。

$\forall A\in F$,假设 A 中出现的所有命题变量之集记为 P_A,A 的指派的集合记为 $\mathscr{A}_A=\{\alpha\mid\alpha:P_A\to\{0,1\}\}$,则所有指派的集合为 $\bigcup\limits_{A\in F}\mathscr{A}_A$,且 $\left|\bigcup\limits_{A\in F}\mathscr{A}_A\right|=\alpha$。

定义 5.2 $\forall A\in F$,给定 A 的指派 α,A 在指派 α 下的取值记为 $\alpha(A)$,如果 $\alpha(A)=1$ 则称 α 弄真 A,否则称 α 弄假 A。

A 在任意给定的指派 α 下的取值情况就是 A 的语义,A 的语义既可以用真值表来定义,也可以递归定义如下。

(1) 如果 A 是命题变量 $P_i(i\in N)$,则 $\alpha(A)=\alpha(P_i)$。

(2) 如果 $A=\neg B$,则 $\alpha(A)=1-\alpha(B)$。

(3) 如果 $A=B\wedge C$,则 $\alpha(A)=\alpha(B)\cdot\alpha(C)$。

(4) 如果 $A=B\vee C$,则 $\alpha(A)=\alpha(B)+\alpha(C)-\alpha(B)\cdot\alpha(C)$。

(5) 如果 $A=B\to C$,则 $\alpha(A)=1-\alpha(B)+\alpha(B)\cdot\alpha(C)$。

(6) 如果 $A=B\leftrightarrow C$,则 $\alpha(A)=\alpha(B)\cdot\alpha(C)+(1-\alpha(B))\cdot(1-\alpha(C))$。

于是,$\forall A\in F$,给定指派 α,经若干次使用上述公式后即可确定 $\alpha(A)$的真值。

定义 5.3 $\forall A\in F$,如果 A 的所有指派 α 均弄真 A,则称 A 为永真式(重言式),如果 A 的所有指派 α 均弄假 A,则称 A 为永假式(矛盾式),如果 A 不是永假式,则称 A 为可满足式。

例 5.1 假设 A、B、C 为命题公式,则 $A\vee\neg A$ 是永真式,$A\wedge\neg A$ 是永假式,$A\to(B\to C)$是可满足式。

问:$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$是否为永真式?

设 $A\in F$,如果 A 中出现的命题变量只有 n 个,则与 A 的语义有关的指派只有 2^n 个,因此,判断 A 是否为永真式只要讨论这 2^n 个指派即可,每个指派是一个 0,1 组成的 n 元组,因此可以通过列出真值表来判定 A 的语义,也可以用上述(1)~(6)给出的递归计算公式来判定 A 的语义。

例 5.2 假设 A、B 为命题公式,请用计算公式法判定 $B\to(A\to B)$是否为永真式。

【解】 $\forall\alpha\in\{\alpha\mid\alpha:P\to\{0,1\}\}$,

$$\begin{aligned}\alpha(B\to(A\to B))&=1-\alpha(B)+\alpha(B)(1-\alpha(A)+\alpha(A)\cdot\alpha(B))\\&=1-\alpha(B)\cdot\alpha(A)+\alpha^2(B)\cdot\alpha(A)\\&=1-\alpha(B)\cdot\alpha(A)+\alpha(B)\cdot\alpha(A)\\&=1\end{aligned}$$

因此,$B\to(A\to B)$为永真式。

例 5.3 假设 A、B、C 为命题公式,请用真值表法判定$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$是否为永真式。

【解】 如图 5.1 所示,除指派 1 1 0 以外的所有指派均弄真$(A\to B)\to(A\to C)$,只有指派 1 1 0 弄假$(A\to B)\to(A\to C)$,假设指派 1 1 0 弄假公式 D,则指派 1 1 0 必弄真 $D\to((A\to B)\to(A\to C))$,而且除指派 1 1 0 以外的所有指派也都弄真 $D\to((A\to B)\to(A\to C))$,因此,$D\to((A\to B)\to(A\to C))$为永真式。

显然,指派 1 1 0 弄假公式 $A\to(B\to C)$,因此$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$为永真式。同理可知,以下均为永真式。

A B C	$A\to B$	$A\to C$	$(A\to B)\to(A\to C)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	1
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

图 5.1　$A\to B$、$A\to C$、$(A\to B)\to(A\to C)$的真值表

$\neg A\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\neg B\to((A\to B)\to(A\to C))$

$C\to((A\to B)\to(A\to C))$

$(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$(A\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\neg(A\to B)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\neg(B\to A)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\neg(C\to A)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\neg(C\to B)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$(B\to(A\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

$((B\to A)\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

$((A\to B)\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

定义 1.17 将项递归定义如下。

(1) 个体常量和个体变量是项。

(2) 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 n 元个体函数,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 n 个项,则 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是项。

(3) 只有有限次使用(1)和(2)形成的才是项。

定义 1.18 将合式公式递归定义如下。

(1) 若 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 n 元谓词,且 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 n 个项,则 $P(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是合式公式,这类合式公式称为原子公式。

(2) 若 A 是合式公式,则$\neg A$ 是合式公式。

(3) 若 A、B 是合式公式,则 $A\vee B$、$A\wedge B$、$A\to B$、$A\leftrightarrow B$ 是合式公式。

(4) 若 A 是合式公式,x 是个体变量,则$\forall xA$、$\exists xA$ 是合式公式。

(5) 只有有限次使用(1)～(4)形成的才是合式公式。

与命题公式相比,合式公式的语义描述要复杂得多,需要引入合式公式的解释这一概念。

定义 5.4　设 A 是一个合式公式,则 A 的解释是一个九元组,即 $I=(D,C,\alpha,\mathscr{F},\delta_f,\mathscr{P},\delta_P,V,\sigma)$,其中,

- $D\neq\varnothing$,D 称为论域,是一个与研究对象有关的集合,既包括个体常量,也包括个体变量。

- C 是 A 中出现的所有个体常量之集，映射 $\alpha: C \to D$ 将 A 中每个个体常量 a 指定为 D 中的一个元素。
- $\mathscr{F}$ 是 A 中出现的所有 n 元函数之集，映射 $\delta_f: \mathscr{F} \to \{f \mid f: D^n \to D\}$ 将 A 中的每个 n 元函数指定为 D 上的一个 n 元函数。
- $\mathscr{P}$ 是 A 中出现的所有 n 元谓词之集，映射 $\delta_P: \mathscr{P} \to \{P \mid P \subseteq D^n\}$ 将 A 中的每个 n 元谓词指定为 D 上的一个 n 元关系。
- V 是 A 中出现的所有个体变量之集，映射 $\sigma: V \to D$ 将 A 中每个个体变量 v 指定为 D 中的一个元素。

定义 5.5 设 A 是一个合式公式，I 是 A 的一个解释，则 A 在解释 I 下是一个命题，称为 A 在解释 I 下的命题，记为 A_I。A_I 的真值递归定义如下。

(1) A 是原子公式时，A_I 也是原子公式，从而 A_I 的真值是可以确定的。

(2) A 是公式 $B \wedge C$ 时，如果 B_I 为真而且 C_I 为真，则 A_I 为真。

(3) A 是公式 $B \vee C$ 时，如果 B_I 为真或者 C_I 为真，则 A_I 为真。

(4) A 是公式 $\neg B$ 时，如果 B_I 为真，则 A_I 为假；如果 B_I 为假，则 A_I 为真。

(5) A 是公式 $B \to C$ 时，如果 B_I 为假或者 C_I 为真，则 A_I 为真。

(6) A 是公式 $\forall vB$ 时，假设 $\sigma(v)=d$，如果对于 $\forall d \in D$，B_I 的真值均为真，则 A_I 为真。

(7) A 是公式 $\exists vB$ 时，假设 $\sigma(v)=d$，如果 $\exists d \in D$，使得 B_I 的真值为真，则 A_I 为真。

定义 5.6 设 A 是一个合式公式，如果对于 A 的所有解释 I，A 在解释 I 下的命题 A_I 的真值均为真，则称 A 为永真式(重言式)；如果对于 A 的所有解释 I，A 在解释 I 下的命题 A_I 的真值均为假，则称 A 为永假式(矛盾式)；如果 A 不是永假式，则称 A 为可满足式。

例 5.4 合式公式 $A=\forall x(P(x) \to (P(a) \to Q(x))) \to ((P(b) \to \forall xP(x)) \to Q(a))$，给定 A 的解释 $I=(D,C,\alpha,\mathscr{F},\delta_f,\mathscr{P},\delta_P,V,\sigma)$，其中，$D$ 是与自然数有关的论域，$C=\{a,b\}$，$\alpha(a)=3$，$\alpha(b)=8$，$\mathscr{F}=\varnothing$，$\mathscr{P}=\{P,Q\}$，$\delta_P(P(x))=$“$x>2$”，$\delta_P(Q(x))=$“$\exists y \in D, x=y^2$”，$V=\{x\}$，$\sigma(x)=d$。则

$$
\begin{aligned}
A_I &= (\forall d \in D)(P(d) \to (P(3) \to Q(d))) \to ((P(8) \to (\forall d \in D)P(d)) \to Q(3)) \\
&= (\forall d \in D)(P(d) \to (1 \to Q(d))) \to ((1 \to (\forall d \in D)P(d)) \to 0) \\
&= (\forall d \in D)(P(d) \to (0 \vee Q(d))) \to ((0 \vee (\forall d \in D)P(d)) \to 0) \\
&= (\forall d \in D)(P(d) \to Q(d)) \to ((\forall d \in D)P(d) \to 0) \\
&= (\forall d \in D)(P(d) \to Q(d)) \to \neg(\forall d \in D)P(d) \\
&= 0 \to 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

5.1.2 逻辑等价

定义 5.7 设 A、B 为命题公式，如果弄真 A 的所有指派也都弄真 B，则称 A 逻辑蕴含 B，或称 B 是 A 的逻辑推论，记为 $A \Rightarrow B$。如果弄真公式集 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 中每个公式的指派也都弄真 B，则称 Γ 逻辑蕴含 B，或称 B 是 Γ 的逻辑推论，记为 $\Gamma \Rightarrow B$。

定义 5.8 设 A、B 为命题公式，如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则称 A 与 B 逻辑等价，记为 $A \Leftrightarrow B$。

例 5.5 设 A、B、C 为命题公式，$\Gamma=\{A \to (B \to C), B\}$，则 $\neg A \Rightarrow A \to B$，$\Gamma \Rightarrow A \to C$，

$\neg A \to \neg B \Leftrightarrow B \to A$。

定理 5.1 设 A、B 为命题公式，则

(1) $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \to B$ 为永真式。

(2) $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。

定理 5.2 设 A、B、C 为命题公式，则有下列基本的逻辑等价式。

(1) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$。（对合律）

(2) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$；$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$。（交换律）

(3) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$；$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$。（结合律）

(4) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$；
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$。（分配律）

(5) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$；$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$。（德·摩根律）

(6) $A \vee A \Leftrightarrow A$；$A \wedge A \Leftrightarrow A$。（幂等律）

(7) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$。

(8) $\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$。

(9) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$。（假言移位）

(10) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C$。

(11) $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B$。

(12) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$。

(13) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$。

(14) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$。

(15) $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$。（归谬论）

(16) $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$。（排中律）

(17) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$。（矛盾律）

(18) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$；$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$。（吸收律）

定义 5.9 设 A、B 为合式公式，对于任意给定的解释 I，如果 A 在解释 I 下的命题 A_I 为真，那么 B 在解释 I 下的命题 B_I 也为真，则称 A 逻辑蕴涵 B，记为 $A \Rightarrow B$。对于任意给定的解释 I，如果公式集 $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 中每个公式 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 在解释 I 下的命题 A_{iI} 为真，那么 B 在解释 I 下的命题 B_I 也为真，则称 Γ 逻辑蕴涵 B，记为 $\Gamma \Rightarrow B$。

定义 5.10 设 A、B 为合式公式，如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则称 A 与 B 逻辑等价，记为 $A \Leftrightarrow B$。

定理 5.3 设 B 为合式公式，B 中不含 x，则有下列基本的逻辑等价式。

(1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$。

(2) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$。

(3) $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$。

(4) $\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$。

(5) $\forall x(P(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee B$。

(6) $\forall x(P(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge B$。

(7) $\forall x(P(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to B$。

(8) $\forall x(B \to P(x)) \Leftrightarrow B \to \forall x P(x)$。

(9) $\exists x(P(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee B$。

(10) $\exists x(P(x)\wedge B)\Leftrightarrow \exists xP(x)\wedge B$。

(11) $\exists x(P(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow \forall xP(x)\rightarrow B$。

(12) $\exists x(B\rightarrow P(x))\Leftrightarrow B\rightarrow \exists xP(x)$。

(13) $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))\Leftrightarrow \forall xP(x)\rightarrow \exists xQ(x)$。

(14) $\forall x\forall yP(x,y)\Leftrightarrow \forall y\forall xP(x,y)$。

(15) $\exists x\exists yP(x,y)\Leftrightarrow \exists y\exists xP(x,y)$。

定理 5.4(代入原理) 设 A 为含有命题变量 p 的永真式,则将 A 中 p 的所有出现均代换为合式公式 B 后得到的命题公式仍为永真式。

定理 5.5(替换原理) 设 C 为合式公式 A 中的子公式,如果 $C\Leftrightarrow D$,且将 A 中的若干 C 替换为 D 后得到的公式记为 B,则 $A\Leftrightarrow B$。

定理 5.6(改名原理) 对于任意的合式公式 $\forall xA$ 或 $\exists xA$,如果 A 中不含变量 y,则将 $\forall xA$ 改为 $\forall yA$ 或将 $\exists xA$ 改为 $\exists yA$,且将 A 中出现的所有 x 均改为 y,得到的公式 $\forall yA$ 或 $\exists yA$ 与原公式逻辑等价。对于任意的合式公式 A,如果 A 中不含变量 y,则将 A 中所有自由出现的 x 改为 y,得到的公式与原公式逻辑等价。

利用定理 5.2～定理 5.6 可以进行等值演算,进而判断一个给定的公式是否为永真式。

例 5.6 $(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow(A\wedge(\neg A\vee B))\rightarrow B\\
&\Leftrightarrow(A\wedge\neg A)\vee(A\wedge B)\rightarrow B\\
&\Leftrightarrow(A\wedge B)\rightarrow B\\
&\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)\vee B\\
&\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)\vee B\\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

所以$(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$ 是永真式。

例 5.7 $(\exists xP(x)\rightarrow \exists xQ(x))\rightarrow \exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\neg(\neg\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\vee\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))\\
&\Leftrightarrow(\exists xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x))\vee\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)\\
&\Leftrightarrow(\exists xP(x)\vee\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x))\wedge(\neg\exists xQ(x)\vee\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x))\\
&\Leftrightarrow(\exists x(P(x)\vee\neg P(x))\vee\exists xQ(x))\wedge 1\\
&\Leftrightarrow 1\vee\exists xQ(x)\Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

所以$(\exists xP(x)\rightarrow \exists xQ(x))\rightarrow \exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$是永真式。

5.1.3 对偶式和内否式

对偶式和内否式反映的是一种逻辑规律,能够给进行等值演算或求公式的否定带来很大的方便。

定义 5.11 如果命题公式中只出现命题变量、命题常量、命题联结词$\wedge$、$\vee$和$\neg$,则称 A 为限制性公式。

定义 5.12 设 A 是一个限制性公式,将 A 中的联结词$\wedge$换成$\vee$,$\vee$换成$\wedge$,真值 1 换成 0,0 换成 1,得到的公式称为 A 的对偶式,记为 A^*。

定义 5.13 设 A 是一个限制性公式,将 A 中出现的每个命题变量 x 换成$\neg x$,得到的公

式称为 A 的内否式，记为 $A^{\neg}$。

定理 5.7 设 A、B 都是限制性公式，则

(1) $(A^*)^* = A$，$(A^{\neg})^{\neg} = A$。

(2) $(A \vee B)^* = A^* \wedge B^*$，$(A \vee B)^{\neg} = A^{\neg} \vee B^{\neg}$。

(3) $(A \wedge B)^* = A^* \vee B^*$，$(A \wedge B)^{\neg} = A^{\neg} \wedge B^{\neg}$。

(4) $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg A^*$，$(\neg A)^{\neg} \Leftrightarrow \neg A^{\neg}$。

(5) $(A^*)^{\neg} \Leftrightarrow \neg A$。

(6) $(A^*)^{\neg} = (A^{\neg})^*$。

(7) 如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $(A^*)^{\neg} \Leftrightarrow (B^*)^{\neg}$。

例 5.8 设 $A = \neg((B \vee C) \wedge \neg D)$，则

$$A^* = \neg((B \wedge C) \vee \neg D),\quad A^{\neg} = \neg((\neg B \vee \neg C) \wedge D)$$

5.1.4 联结词完备集

由定理 5.2 的(7)和定理 5.2 的(13)可知，某些联结词可以用其他联结词表示，$A \rightarrow B$ 可以表示为 $\neg A \vee B$，$A \leftrightarrow B$ 可以表示为 $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$，于是，给定一个联结词集合，其中的某些联结词从功能上看是多余的。

定义 5.14 设 h 是一个 n 元联结词，A 是由 m 个联结词 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 构成的命题公式，如果 $h(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A$，则称联结词 h 可以用联结词 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 表示。

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$，说明二元联结词 $\leftrightarrow$ 可以用 $\wedge$，$\vee$，$\neg$ 表示。

定义 5.15 设 Ω 是联结词的集合，如果 Ω 中的某个联结词可以用 Ω 中的其他联结词表示，则称该联结词在 Ω 中是冗余的，否则称其为独立的。

联结词集合 $\Omega = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中，$\rightarrow$ 是冗余的，$\neg$ 是独立的。

命题联结词实际上就是一个定义在 $\{0,1\}$ 上的 n 元函数。

定义 5.16 $\{0,1\}$ 上的 n 元函数 f：$\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 称为 n 元真值函数。

$\neg$ 是一个一元真值函数，$\rightarrow$ 则是一个二元真值函数。每个真值函数都是一个命题联结词。$\{0,1\}$ 上的 n 元真值函数共有 2^{2^n} 个，因此可以定义 2^{2^n} 个 n 元命题联结词。

一元真值函数共有 4 个：f_0、f_1、f_2、f_3，其中，$f_0(0)=0$，$f_0(1)=0$；$f_1(0)=0$，$f_1(1)=1$；$f_2(0)=1$，$f_2(1)=0$；$f_3(0)=1$，$f_3(1)=1$。

例 5.9 二元真值函数对应的 16 个命题联结词 $f_0, f_1, \cdots, f_{15}$ 的真值表如图 5.2 所示。

P	Q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

图 5.2 二元真值函数的真值表

定义 5.17 设 Ω 是联结词的一个集合，如果含有任意真值函数 f 的命题公式均可用仅含 Ω 中联结词的命题公式 A 来表示，则称 Ω 为联结词完备集。

例 5.10 $\Omega = \{\wedge, \vee, \neg\}$ 是一个联结词完备集。

【证明】 采用数学归纳法，施归纳于真值函数所含命题变量的个数 n。 ■

$\{\neg,\rightarrow\}$，$\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$都是联结词完备集，$\{\rightarrow,\wedge,\vee,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集。

定义 5.18 设 Ω 是一个联结词完备集，如果 Ω 不含冗余联结词，则称 Ω 为最小联结词完备集。

$\{\neg,\rightarrow\}$，$\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$都是最小联结词完备集。

定义 5.19 设 A 和 B 是命题公式，则 $\neg(A\wedge B)$称为 A 和 B 的“与非”，记为 $A\uparrow B$，$\uparrow$ 称为“与非”联结词；$\neg(A\vee B)$称为 A 和 B 的“或非”，记为 $A\downarrow B$，$\downarrow$ 称为“或非”联结词。

$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是最小联结词完备集。

5.2 范式

从 5.1 节的讨论可以看到，逻辑等价的命题公式形式多样，为了便于进行演算，人们希望将复杂多样的命题公式转换成某个简单规范的形式，于是就有了范式的概念，主范式则是命题公式的一种唯一的规范表达形式，在数字电路设计中具有重要的应用。

5.2.1 析取范式与合取范式

定义 5.20 命题符号(命题常量或命题变量)或命题符号的否定统称为文字。仅由有限个文字的析取构成的公式称为简单析取式，仅由有限个文字的合取构成的公式称为简单合取式。

如 A 和$\neg B$ 都是文字。$A\vee\neg B$ 与 $\neg A\vee\neg B$ 都是简单析取式，$A\wedge\neg B$ 与 $\neg A\wedge\neg B$ 都是简单合取式。

定理 5.8 简单析取式是永真式当且仅当它同时含有某个命题符号及其否定，简单合取式是永假式当且仅当它同时含有某个命题符号及其否定。

定义 5.21 形如 $P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n(n\geqslant1)$的命题公式称为析取范式，其中，$P_i(1\leqslant i\leqslant n)$是简单合取式。形如 $P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n(n\geqslant1)$的命题公式称为合取范式，其中，$P_i(1\leqslant i\leqslant n)$是简单析取式。

如$(A\wedge\neg B)\vee(\neg C\wedge D)$是析取范式，$(A\vee\neg B)\wedge(\neg C\vee D)$是合取范式。

定理 5.9 析取范式是永假式当且仅当它的每个简单合取式都是永假式，合取范式是永真式当且仅当它的每个简单析取式都是永真式。

定理 5.10(范式存在定理) 任意命题公式都存在与之逻辑等价的析取范式与合取范式。

例 5.11 求下列命题公式的析取范式和合取范式。

(1) $A\wedge(\neg B\vee C)$。

(2) $(\neg A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)$。

【解】 (1) $A\wedge(\neg B\vee C)$的合取范式就是 $A\wedge(\neg B\vee C)$。

因为 $A\wedge(\neg B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge C)$，所以 $A\wedge(\neg B\vee C)$的析取范式是$(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge C)$。

(2) 因为$(\neg A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$，所以$(\neg A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)$的合取范式为$(A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$。

因为$(\neg A\to B)\wedge(A\to C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg A)\vee(A\wedge C)\vee(\neg A\wedge B)\vee(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge C)\vee(\neg A\wedge B)\vee(B\wedge C)$

所以$(\neg A\to B)\wedge(A\to C)$的合取范式为$(A\wedge C)\vee(\neg A\wedge B)\vee(B\wedge C)$。

5.2.2 主范式

因为同一公式的析取范式和合取范式不唯一，所以使用它们判别不同公式是否逻辑等价比较困难。幸运的是，相互等价的公式有一种唯一的表达形式——主范式。

定义 5.22 在命题公式 A 的析取范式 $P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n(n\geqslant 1)$中，合取式 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$称为析取项。在命题公式 A 的合取范式 $P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n(n\geqslant 1)$中，析取式 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$称为合取项。

定义 5.23 设有命题公式 A，A 中的命题变量之集为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，在 A 的合取范式 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m(m\geqslant 1)$中，如果每一个合取项 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$的形式为 $A_i=Q_1\vee Q_2\vee\cdots\vee Q_n$，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$Q_j$ 不是 P_j 就是$\neg P_j$，则称 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m$ 为 A 的主合取范式。主合取范式中的合取项含有 A 中出现的所有变量，不过对于$\forall P_i\in\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，每个合取项只含有 P_i 和$\neg P_i$ 中的一个，称这种形式的简单析取式为极大项，记为 $M_i(1\leqslant i\leqslant m)$。

极大项 M_i 具有如下性质。

(1) 全体变量之集为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$的所有公式共有 2^n 种可能的极大项。

(2) 每个极大项 M_i 有 2^n 种指派，其值为 0 的指派是唯一的。

(3) 任意两个不同的极大项的真值不能同时为 0。

(4) 全体变量之集为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$的所有公式中所有可能的极大项的$\wedge$为 0，即 $\bigwedge\limits_{i=1}^{2^n}M_i=0$。

定理 5.11 任何含有 n 个变量的不是永真式的命题公式都存在一个与之逻辑等价的主合取范式，永真式没有主合取范式。

定义 5.24 设有命题公式 A，A 中的命题变量之集为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，在 A 的析取范式 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_m(m\geqslant 1)$中，如果每一个析取项 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$的形式为 $A_i=Q_1\wedge Q_2\wedge\cdots\wedge Q_n$，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$Q_j$ 不是 P_j 就是$\neg P_j$，则称 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_m$ 为 A 的主析取范式。主析取范式中的析取项含有 A 中出现的所有变量，不过对于$\forall P_i\in\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，每个析取项只含有 P_i 和$\neg P_i$ 中的一个，称这种形式的简单合取式为极小项，记为 $m_i(1\leqslant i\leqslant m)$。

极小项 m_i 具有如下性质。

(1) 全体变量之集为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$的所有公式共有 2^n 种可能的极小项。

(2) 每个极小项 m_i 有 2^n 种指派，其值为 1 的指派是唯一的。

(3) 任意两个不同的极小项的真值不能同时为 1。

(4) 全体变量之集为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$的所有公式中所有可能的极小项的$\vee$为 1，即 $\bigvee\limits_{i=1}^{2^n}m_i=1$。

定理 5.12 任何含有 n 个变量的不是永假式的命题公式都存在一个与之逻辑等价的

主析取范式，永假式没有主析取范式。

例 5.12 求 $A\wedge B$ 的主合取范式，求 $A\rightarrow B$ 的主析取范式。

【解】 通过在合取项中添加永假式 $P_i\wedge\neg P_i$，或者在析取项中添加永真式 $P_i\vee\neg P_i$ 来补齐缺少变量的合取项/析取项。

$$\begin{aligned}A\wedge B&\Leftrightarrow(A\vee(B\wedge\neg B))\wedge((A\wedge\neg A)\vee B)\\&\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\wedge(A\vee B)\wedge(\neg A\vee B)\\&\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\wedge(\neg A\vee B)\\A\rightarrow B&\Leftrightarrow\neg A\vee B\Leftrightarrow(\neg A\wedge(B\vee\neg B))\vee((A\vee\neg A)\wedge B)\\&\Leftrightarrow(\neg A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B)\\&\Leftrightarrow(\neg A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)\end{aligned}$$

设有命题公式 A，A 中的全体命题变量之集为 $\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$，假设全体变量之集为 $\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$ 的所有公式中所有可能的极大项之集为 $M_{\max}$，极小项之集为 $M_{\min}$，A 的主合取范式中的极大项之集为 $A_{\max}$，A 的主析取范式中的极小项之集为 $A_{\min}$，于是，$A^c_{\max}=M_{\max}\backslash A_{\max}$，$A^c_{\min}=M_{\min}\backslash A_{\min}$，则 A 的主合取范式 $\bigwedge\limits_{i=1}^{m}A_i$ 和主析取范式 $\bigvee\limits_{i=1}^{n}A_i$ 可以通过如下方式互相转换：

$$\bigvee_{i=1}^{n}A_i=\neg(\bigwedge_{B\in A^c{}_{\max}}B),\ \bigwedge_{i=1}^{m}A_i=\neg(\bigvee_{B\in A^c{}_{\min}}B)\tag{5.1}$$

例 5.13 设有命题公式 $A=(P\wedge Q)\rightarrow(\neg Q\wedge R)$，则

$$\begin{aligned}M_{\max}=\{&P\vee Q\vee R,P\vee Q\vee\neg R,P\vee\neg Q\vee R,P\vee\neg Q\vee\neg R,\neg P\vee Q\vee R,\\&\neg P\vee Q\vee\neg R,\neg P\vee\neg Q\vee R,\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\}\end{aligned}$$

因为 $(P\wedge Q)\rightarrow(\neg Q\wedge R)\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$

因此，A 的主合取范式为 $(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$，于是，

$$A_{\max}=\{\neg P\vee\neg Q\vee R,\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\}$$

$$\begin{aligned}A^c_{\max}=\{&P\vee Q\vee R,P\vee Q\vee\neg R,P\vee\neg Q\vee R,P\vee\neg Q\vee\neg R,\neg P\vee Q\vee R,\\&\neg P\vee Q\vee\neg R\}\end{aligned}$$

根据公式(5.1)可得，A 的主析取范式为

$$\begin{aligned}\bigvee_{i=1}^{n}A_i=\neg(\bigwedge_{B\in A^c{}_{\max}}B)=&(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee\\&(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\end{aligned}$$

设有命题公式 A，A 中的全体命题变量之集为 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，A 的真值表中前 n 列对应的是 A 的指派，每行对应一个指派，每个指派对应一个极小项(如 n 个 1 对应极小项 $P_1\wedge P_2\wedge\cdots\wedge P_n$，$n$ 个 0 则对应极小项 $\neg P_1\wedge\neg P_2\wedge\cdots\wedge\neg P_n$)，真值表的最后一列对应的是 A 在每个指派下的真值，真值为真时对应的指派就是弄真指派，真值为假时对应的指派就是弄假指派，于是，按照以下方式很容易就可以从真值表得到 A 的主析取范式和主合取范式。

(1) 所有弄真指派对应的极小项的析取就是 A 的主析取范式。

(2) 所有弄假指派对应的极小项的析取式的非就是 A 的主合取范式。