

第3章

常用方法

3.1 定义法

题目

(多选题)过已知圆内一个定点作圆 C 与已知圆相切,则圆心 C 的轨迹不可能是().

A. 圆

B. 椭圆

C. 线段

D. 射线

【解析】 设定点为 A , 已知圆心为 B , 半径为 R , 分两种情形: ①如图 3.1(a) 所示, 当 A 与 B 重合时, 圆心 C 是以 B 为圆心, $\frac{R}{2}$ 为半径的圆. ②如图 3.1(b) 所示, 当 A 在圆内且不与 B 重合, $R = |BC| + |CD| = |BC| + |CA| > |AB|$, 故圆心 C 在以 A, B 为焦点的, 长轴长等于 R 的椭圆. 故选 CD.

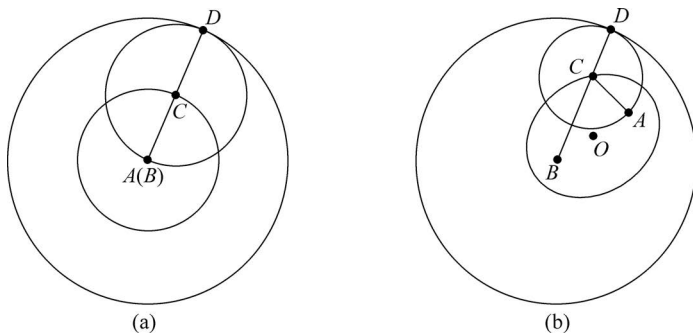


图 3.1

反思

(1) 如图 3.2(a) 所示, 若点 A 在已知圆 B 上, 过点 A 作圆 C 与已知圆相切, 则圆心 C 的轨迹是直线 AB 挖去 A, B 两点.

(2) 如图 3.2(b) 所示, 若点 A 在已知圆 B 外, 过点 A 作圆 C 与已知圆相切, 则圆心 C 的轨迹是双曲线. 理由: 分两种情况: ① 外切时, $|C_1B| = |BD| + |DC_1| = R + |C_1A|$, $|C_1B| - |C_1A| = R < |AB|$, 故点 C_1 的轨迹是以 A, B 为焦点, 实轴长为 R 的双曲线的右支; ② 内切时, $|C_2A| = |C_2E| = |C_2B| + |BE| = |C_2B| + R$, $|C_2A| - |C_2B| = R < |AB|$, 故点 C_2 的轨迹是以 A, B 为焦点, 实轴长为 R 的双曲线的左支.

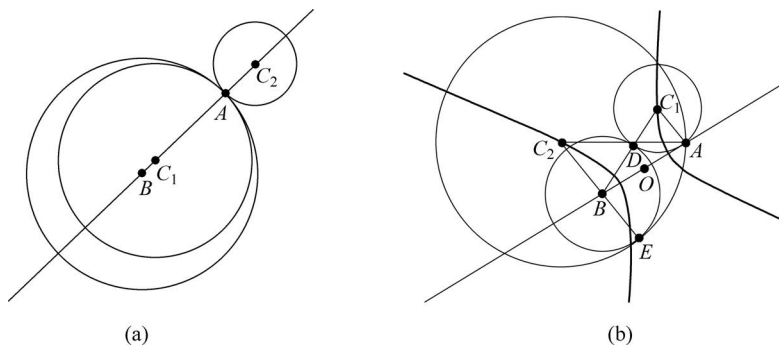


图 3.2

3.2 联立韦达法

题目

如图 3.3 所示, P 为双曲线 $xy=1$ 上的一点, Q 为 P 关于原点 O 的对称点, 以 P 为圆心且经过点 Q 的圆交双曲线于另外三点 A, B, C , 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形.

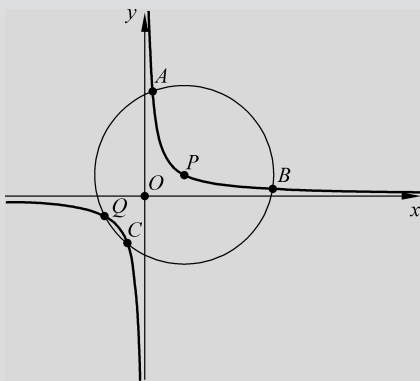


图 3.3

【解析】 设 $P\left(a, \frac{1}{a}\right), A\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), B\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), C\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right), Q\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$.

圆 $P: (x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$, 与 $xy=1$ 联立得 $(x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)^2 = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$, 即 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2ax - \frac{2}{ax} - 3a^2 - \frac{3}{a^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 - 2ax^3 - \frac{2}{a}x - \left(3a^2 + \frac{3}{a^2}\right)x^2 = 0$, 此方程必有一个根为 $-a$. 于是, $x^4 + 1 - 2ax^3 - \frac{2}{a}x - \left(3a^2 + \frac{3}{a^2}\right)x^2 = (x+a)\left(x^3 - 3ax^2 - \frac{3}{a^2}x + \frac{1}{a}\right) = 0$, 方程 $x^3 - 3ax^2 - \frac{3}{a^2}x + \frac{1}{a} = 0$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 . 由韦达定理得 $x_1 + x_2 + x_3 = 3a, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{3}{a^2}, x_1x_2x_3 = -\frac{1}{a}$, 故 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{3}{a}$, $\triangle ABC$ 的重心与外心重合, $\triangle ABC$ 是等边三角形.

反思

要证 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 只需证重心与外心重合, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = 3a, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{3}{a}$.

3.3 坐标平移法

由于平移不改变斜率、面积、周长等, 在斜率问题和面积问题上经常通过平移简化问题.

题目

已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

【解析】 (1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, e = \frac{1}{2}$.

(2) 将坐标原点平移到点 A , 即 $x' = x, y' = y - 3$, 则 $A'(0, 0), P'(3, -\frac{3}{2})$, 椭圆变为 $\frac{x'^2}{12} + \frac{(y'+3)^2}{9} = 1$.

设 $B'(x'_0, y'_0)$, $S_{\triangle A'B'P'} = \frac{1}{2} \left| x'_0 \left(-\frac{3}{2} \right) - 3y'_0 \right| = 9$, $\left| \frac{x'_0}{2} + y'_0 \right| = 6$, 且 $\frac{x'^2_0}{12} + \frac{(y'_0+3)^2}{9} = 1$, 于是, $x'_0 = 0, y'_0 = -6$ 或者 $x'_0 = -3, y'_0 = -\frac{9}{2}$, 则 $B'(0, -6)$ 或 $B'(-3, -\frac{9}{2})$, 直线 $P'B'$ 方程为 $3x' - 2y' - 12 = 0$ 或 $x' - 2y' - 6 = 0$. 故直线 PB 的方程为 $3x - 2y - 6 = 0$ 或 $x - 2y = 0$.

题目

如图 3.4 所示, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 经过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦(不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

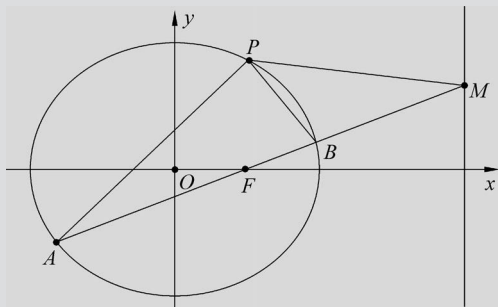


图 3.4

【解析】 (1) 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 将坐标原点平移到点 P , $x' = x - 1, y' = y - \frac{3}{2}$, 则椭圆方程变为

$\frac{(x'+1)^2}{4} + \frac{(y'+\frac{3}{2})^2}{3} = 1$, 即 $3x'^2 + 4y'^2 + (6x' + 12y') = 0$, F 点坐标变为

$(0, -\frac{3}{2})$, 直线 $AB: y' = kx' - \frac{3}{2}$, 即 $\frac{2}{3}kx' - \frac{2}{3}y' = 1$.

直线 AB 与椭圆联立得 $3x'^2 + 4y'^2 + (6x' + 12y')\left(\frac{2}{3}kx' - \frac{2}{3}y'\right) = 0$, 即

$$4\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - (8k - 4)\frac{y'}{x'} - (3 + 4k) = 0, k_1 + k_2 = 2k - 1, \text{ 直线 } x = 4 \text{ 变为 } x' = 3, \text{ 与直}$$

线 $AB: y' = kx' - \frac{3}{2}$ 联立得 $M\left(3, 3k - \frac{3}{2}\right), k_3 = \frac{3k - \frac{3}{2}}{3} = k - \frac{1}{2}$, 于是 $k_1 + k_2 = 2k_3$, 从而有 $\lambda = 2$.

3.4 代换消元和放缩消元

1. 代换消元

题目

如图 3.5 所示, P 为圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ 上一动点, 圆 O 在点 P 处切线交椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 于 A, C 两点, 再过点 A, C 作圆 O 的另一条切线分别交椭圆 C 于 B, D 两点, 过点 B, D 作圆 O 另一条切线相交于点 Q , 求动点 Q 的轨迹方程.

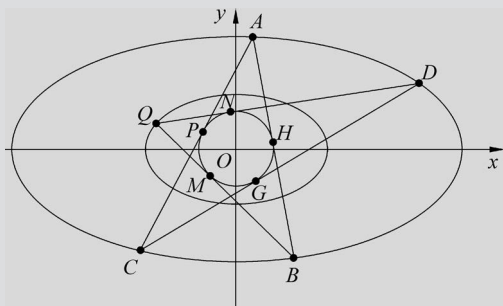


图 3.5

【解析】 设 P, G, H, N, M 对应的参数为 t, t_1, t_2, t_3, t_4 , 直线 $AC: (1 - t^2)x + 2ty = \frac{1+t^2}{3}$, 直线 $CD: (1 - t_1^2)x + 2t_1y = \frac{1+t_1^2}{3}$, 联立求得 $C\left(-\frac{t_1t-1}{3(t_1t+1)}, \frac{t_1+t}{3(t_1t+1)}\right)$, 代入椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得 $-35t^2t_1^2 + 4t^2 - 66t_1t + 4t_1^2 - 35 = 0$ ①. 又直线 $AB: (1 - t_2^2)x + 2t_2y = \frac{1+t_2^2}{3}$, 与直线 AC 联立得 $A\left(-\frac{t_2t-1}{3(t_2t+1)}, \frac{t_2+t}{3(t_2t+1)}\right)$ 代入椭圆得 $-35t^2t_2^2 + 4t^2 - 66t_2t + 4t_2^2 - 35 = 0$ ②.

下面消去①②中的 t . 令 $t^2 = m, t = n, -35mt_1^2 + 4m - 66t_1n + 4t_1^2 - 35 = 0$ ③,

$-35mt_2^2 + 4m - 66t_2n + 4t_2^2 - 35 = 0$ ④, 将③④视为关于 m, n 的二元一次方程

(其余 t_1, t_2 看作常数), 于是 $m = \frac{4t_1t_2 + 35}{35t_1t_2 + 4}, n = -\frac{403(t_1 + t_2)}{22(35t_1t_2 + 4)}$, 故由 $m - n^2 = 0$

得 $h(t_1, t_2) = 67760t_1^2t_2^2 - 162409t_1^2 + 275826t_1t_2 - 162409t_2^2 + 67760$, 于是,

$(67760t^2 - 162409)t_3^2 + 275826t_3t - 162409t^2 + 67760 = 0, (67760t^2 - 162409) \cdot$

$t_4^2 + 275826t_4t - 162409t^2 + 67760 = 0$.

t_3, t_4 是方程 $(67760t^2 - 162409)x^2 + 275826xt - 162409t^2 + 67760 = 0$ 两

根, 故 $t_3t_4 = \frac{-162409t^2 + 67760}{67760t^2 - 162409}, t_3 + t_4 = -\frac{-275826t}{67760t^2 - 162409}$, 同点 C 坐标求

法可得 $Q\left(-\frac{t_3t_4 - 1}{3(t_3t_4 + 1)}, \frac{t_3 + t_4}{3(t_3t_4 + 1)}\right) = \left(\frac{76723(1 - t^2)}{94649(1 + t^2)}, \frac{91942t}{94649(1 + t^2)}\right), x =$

$\frac{76723(1 - t^2)}{94649(1 + t^2)} = \frac{76723}{94649}\cos\theta, y = \frac{91942t}{94649(1 + t^2)} = \frac{45971}{94649}\sin\theta$. 故动点 Q 的轨迹方

程为 $\frac{x^2}{\left(\frac{76723}{94649}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{45971}{94649}\right)^2} = 1$.



反思

若 t, t_1 满足方程, 则 t, t_2 同样满足这个方程. 另外 t_1 到 t_2 是通过三条切线 DC, CA, AB, t 到 t_3 是通过三条切线 AC, CD, DQ, t 到 t_4 是通过三条切线 CA, AB, BQ , 所以 t_1, t_2 满足的方程也是 t, t_3 和 t, t_4 满足的方程.

2. 放缩消元

题目

如图 3.6 所示, 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的距离. 记动点 P 的轨迹为 w . 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 w 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

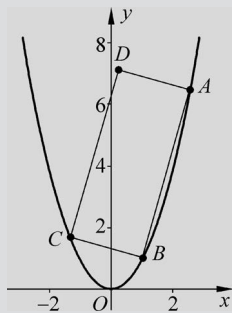


图 3.6

证明 $y = x^2 + \frac{1}{4}$, 将抛物线下移 $\frac{1}{4}$ 个单位后矩形 $ABCD$ 周长不变, 所以不妨设 A, B, C 三点在抛物线 $y = x^2$ 上.

设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$, 基本点 $x_A, x_B, x_C, k_{BC} = \frac{x_C^2 - x_B^2}{x_C - x_B} = x_C + x_B = k (|k| \leq 1), k_{AB} = x_A + x_B = -\frac{1}{k}$, 所以 $x_C = k - x_B$,

$x_A = -\frac{1}{k} - x_B$, 则 $|BC| = \sqrt{1+k^2} |k - 2x_B|, |BA| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| -\frac{1}{k} - 2x_B \right| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2x_B \right|$.

$$\begin{aligned} \text{周长} &= 2 \left(\sqrt{1+k^2} |k - 2x_B| + \frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|} \left| \frac{1}{k} + 2x_B \right| \right) \\ &\geq 2 \left(\sqrt{1+k^2} |k - 2x_B| + \sqrt{1+k^2} \left| \frac{1}{k} + 2x_B \right| \right) \textcircled{1} \\ &\geq 2\sqrt{1+k^2} \left| k + \frac{1}{k} \right| = 2\sqrt{1+k^2} \left(|k| + \frac{1}{|k|} \right). \end{aligned}$$

解法 1 (用导数): 求证 $f(t) = 2\sqrt{1+t^2} \left(t + \frac{1}{t} \right) (0 < t \leq 1), f'(t) = 2\sqrt{1+t^2} \cdot$

$\left(\frac{2t^2-1}{t^2} \right)$, 易知 $f(t)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ 上单调递增, $f(t) \geq$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$. 此时 $|k| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 与式①取等条件 $|k| = 1$ 不能同时成立, 所以矩形

$ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

解法 2 (不等式): $\sqrt{1+t^2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{t} = \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(t^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1+t^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} =$

$\left(t^{\frac{4}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(t^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \geq \left[3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. 所以矩形 $ABCD$ 的

周长大于 $3\sqrt{3}$.

反思1

设 $|k| \leq 1$ 的原因

由于 $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$, 故 $|k_{AB}|$ 与 $|k_{BC}|$ 肯定有一个小于等于 1. 若 $|k_{BC}| \leq 1$ 解法如上; 若 $|k_{AB}| \leq 1$, 则只需设 $k_{AB} = \frac{x_A^2 - x_B^2}{x_A - x_B} = x_A + x_B = k$, $k_{BC} = x_C + x_B = -\frac{1}{k}$, 所以 $x_A = k - x_B$, $x_C = -\frac{1}{k} - x_B$, 则 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |k - 2x_B|$, $|BC| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| -\frac{1}{k} - 2x_B \right| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2x_B \right|$, 周长还是 $2 \left(\sqrt{1+k^2} |k - 2x_B| + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2x_B \right| \right)$.

但周长 $2 \left(\sqrt{1+k^2} |k - 2x_B| + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2x_B \right| \right)$ 是关于 k, x_B 的双变量问题, 除了用绝对值不等式消元, 还能怎么消元?

先固定周长中的 k , 将周长视为 x_B 的函数, 结合常见绝对值函数 $f(x) = m|x-p| + n|x-q|$, $m > 0, n > 0$ 图像, 易知 $f(x)$ 的最小值为 $\min\{f(p), f(q)\}$, 于是周长的最小值为 $2 \min \left\{ \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| k + \frac{1}{k} \right|, \sqrt{1+k^2} \left| k + \frac{1}{k} \right| \right\}$. 当 $|k| \in (0, 1]$ 时, 周长的最小值为 $2\sqrt{1+k^2} \left| k + \frac{1}{k} \right|$.

接下来松动 k , 变为关于 k 的单变量问题.

反思2

此题的关键是利用对称性和绝对值不等式, 通过放缩将多变量问题转变为单变量问题, 再利用导数和基本不等式求最值.

常见的消元类型: (1) 代入型 $\begin{cases} \frac{y-1}{x+2} \cdot k = -1 \\ y = k(x-2) \end{cases}$;

(2) 互换型: $\begin{cases} x = \frac{1-k^2}{1+k^2} \\ y = \frac{2k}{1+k^2} \end{cases}$, 先求 $k^2 = \frac{1-x}{1+x}$, 再求 $y^2 = \frac{4k^2}{(1+k^2)^2}$;

$$(3) \text{ 相除型} \begin{cases} x = \frac{4k^2}{1+2k^2}; \\ y = \frac{-2k}{1+2k^2} \end{cases};$$

$$(4) \text{ 相乘型} \begin{cases} x = \frac{y_0(x-\sqrt{2})}{x_0-\sqrt{2}} \\ y = \frac{y_0(x+\sqrt{2})}{x_0+\sqrt{2}}; \\ \frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$(5) \text{ 平方型} \begin{cases} x = k - \frac{1}{k} \\ y = k + \frac{1}{k} \end{cases}.$$

3.5 先猜后证

题目

已知椭圆的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 如图 3.7 所示, 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交椭圆于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 证明: 直线 HN 过定点.

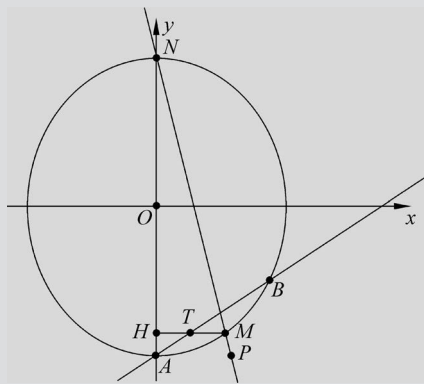


图 3.7

【解析】 (1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 当点 N 运动到点 $(0, 2)$ 时, 直线 NH 为 y 轴; 当点 N 运动到点 B 时, 此时点 M, N, T, H 与点 B 重合, 如图 3.8 所示, 直线 NH 为直线 AB , 由此可以猜出直线 NH 过定点 A .

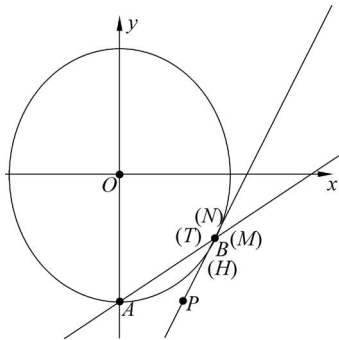


图 3.8

反思1

定点问题可以先通过特殊情况得到, 再证一般情形下也过该定点.

证明 如图 3.9 所示, 以 A 为原点重新建系, $x = x', y = y' - 2$, 椭圆方程变为 $\frac{x'^2}{3} + \frac{(y' - 2)^2}{4} = 1$, $4x'^2 + 3y'^2 - 12y' = 0$, 直线 $AB: y' = \frac{2}{3}x'$.

设 $M(x_1, y_1)$, 故 $T(\frac{3}{2}y_1, y_1)$, $H(3y_1 - x_1, y_1)$, 设 $N(x_2, y_2)$, 要证明直线 NH 过点 A , 只需

证明 $k_{AH} = k_{AN} \Leftrightarrow \frac{y_1}{3y_1 - x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow x_1y_2 + x_2y_1 = 3y_1y_2$. 在新坐标系下 $P(1, 0)$, 设直线 $PMN: x' = my' + 1$, 只需证 $(my_1 + 1) \cdot y_2 + (my_2 + 1)y_1 = 3y_1y_2 \Leftrightarrow (2m - 3)y_1y_2 + (y_1 + y_2) = 0$.

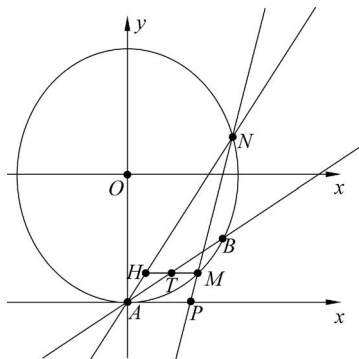


图 3.9

联立直线 PMN 与椭圆得 $(4m^2 + 3)y'^2 + (8m - 12)y' + 4 = 0$, $y_1y_2 = \frac{4}{4m^2 + 3}$, $y_1 + y_2 = \frac{12 - 8m}{4m^2 + 3}$, 于是 $(2m - 3)y_1y_2 + (y_1 + y_2) = 0$.