第 3 章

一元积分学

专题 15 好用的定积分公式

定积分难，难在公式之多、情况之复杂。经典例题 29 在一题之内融合定积分四大常考公式，考生可用此题又快又好地掌握相关解题公式。

知识清单

1. 奇偶性简化：$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{l}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{ 为奇函数} \\ 2\int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数} \end{cases}$。

2. 周期性简化：$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$。

3. 几何意义简化：$\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi a^2$。

4. 华里士公式：$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$。

5. 正弦简化公式：$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$。

经典例题

29 已知$\int_{0}^{\pi} x(\sin x+\cos^2 x)^2\mathrm{d}x = a\int_{0}^{1}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，求 a。

解

方程左边：

$$\int_{0}^{\pi} x(\sin x+\cos^2 x)^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}(\sin x+\cos^2 x)^2\mathrm{d}x$$

【笔记】$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}(\sin^2 x+\cos^4 x+2\sin x\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x+\pi\int_{0}^{\pi}\sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

【笔记】周期函数$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x-\pi\int_{0}^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\pi\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_{0}^{\pi}=\frac{7\pi^2}{16}+\frac{2\pi}{3}$$

【笔记】华里士公式

方程右边：$\int_{0}^{1}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,\mathrm{d}t = 1$

【笔记】使用了代换 $x=\sin t$

所以 $a=\frac{7\pi^2}{16}+\frac{2\pi}{3}$。

30 设函数 $f(x)=\arctan e^{x}$。

(1) 证明 $f(-x)+f(x)=A$。

(2) 对于任意实数 a，若 $g(x)$ 满足 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x$，求 $g(x)$ 满足的条件。

(3) 计算积分 $\int_{-\pi}^{\pi}|x\sin^4 x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x$。

解 (1) $f(x)+f(-x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$，有 $(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})'=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}+\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}\equiv 0$，所以 $\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=A$。令 $x=0$，可得 $A=\arctan 1+\arctan 1=\dfrac{\pi}{2}$。

(2) $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x$，在 $\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 中，令 $x=-t$，$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t)=\int_{0}^{a} f(-t)g(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-x)g(-x)\mathrm{d}x$，所以 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)g(x)+f(-x)g(-x)]\mathrm{d}x$。

又因为 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x$，且 $f(-x)+f(x)=A$，$\int_{0}^{a}[f(x)g(x)+f(-x)\cdot g(-x)]\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} g(x)[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$。对任意实数 a 均成立，所以 $f(x)g(x)+f(-x)g(-x)=g(x)[f(-x)+f(x)]\Rightarrow g(-x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 应为偶函数。

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}|x\sin^4 x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin^4 x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi^3}{32}。$$

解题心得

专题 16 变限积分函数

李白是独一无二的，他的文字无处不弥漫着他生命与个性的独特气息。他的诗，七分酿成了月光，余下的三分啸成了剑气，绣口一吐，就是半个盛唐。变限函数也是如此，不仅独一无二，而且无处不在，如绣口一吐，就是半本高数。

知识清单

1. 变限积分求导公式：$\left(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'_x=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)$。

2. 变限函数化为纯 t 公式。

(1) $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$。

(2) $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$。

(3) $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}\quad(x\neq 0)$。

3. 积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一个 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi)$。

经典例题

31 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点及某邻域内二阶导连续，又设 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)\neq 0$，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$。

解 由于 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

【笔记】被积函数中不能含上限 x

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

【笔记】使用了一次洛必达法则

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3f'(x)+xf''(x)}$$

【笔记】不能继续使用洛必达法则

【方法 1】 利用导数定义求解。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3f'(x)+xf''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f'(x)}{x}}{3\dfrac{f'(x)}{x}+f''(x)}$$

利用导数定义可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$。

所以，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(0)}{3f''(0)+f''(0)}=\dfrac{1}{4}$。

【方法 2】 利用拉格朗日公式求解。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3f'(x)+xf''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{3[f'(x)-f'(0)]+xf''(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(\xi)x}{3f''(\xi)x+xf''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(\xi)}{3f''(\xi)+f''(x)}=\frac{f''(0)}{3f''(0)+f''(0)}=\frac{1}{4}$$

其中，ξ 位于 $0,x$ 之间。

32 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}\arctan(1+t)\mathrm{d}u}{x\sqrt{\cos x}-x}$。

解

【方法 1】 交换分子中累次积分的次序，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(\sqrt{1+\cos x-1}-1)}$$

【笔记】$\sqrt{\cos x}=\sqrt{1+\cos x-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{-\frac{1}{4}x^3}$$

【笔记】$x(\sqrt{1+\cos x-1}-1)=\frac{1}{2}x(\cos x-1)\sim-\frac{1}{4}x^3$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{-\frac{3}{4}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{-\frac{3}{2}x}$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}。$$

【方法 2】 本题被积函数简单，可直接积分：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}\arctan(1+t)\mathrm{d}u}{x\sqrt{\cos x}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)(x-\sqrt{t})\mathrm{d}t}{x(\sqrt{1+\cos x-1}-1)}$$

【笔记】下一步要纯化被积函数

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{-\frac{1}{4}x^3}$$

【笔记】下一步：变限积分极限，洛必达法则

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t+x\arctan(1+x^2)\cdot 2x-x\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{-\frac{3}{4}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{-\frac{3}{4}x^2}$$

【笔记】下一步：可以继续使用洛必达法则，也可以用积分中值定理

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+\xi)\cdot x^2}{-\frac{3}{4}x^2}=-\frac{\pi}{3}，其中，\xi\in(0,x^2)。$$

【笔记】积分中值定理：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

33 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$。

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

(2) 若 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=f(x)-x\mathrm{e}^{-x}$，求 $f(x)$ 的表达式。

解 (1) 由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 知，$f(0)=0$，$f'(0)=A$，且有 $\varphi(0)=0$。又

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}\ (x\neq 0)$$

【笔记】$u=xt$

于是 $\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}(x\neq 0)$。

由导数定义，有 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$。

所以 $\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$。

而 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=\varphi'(0)$，从而知 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(2) $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=f(x)-x\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=f(x)-x\mathrm{e}^{-x}$ 【笔记】$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$

$\Rightarrow\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)-x^2\mathrm{e}^{-x}$ 【笔记】化为整式更好求导

$\Rightarrow f(x)=f(x)+xf'(x)+(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)=(2-x)\mathrm{e}^{-x}$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^{-x}+C$，其中，$C$ 为任意常数。

34 设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t$。

(1) 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值。

(2) 说明函数 $f(x)$ 是否存在拐点。

(3) 求积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

解 (1) 当 $-1<x<1$ 时，有 【笔记】t^2 的最大值为 1，所以按照 x^2 与 1 的关系讨论

$$f(x)=\int_0^{|x|}(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_{|x|}^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}|x|^3-x^2+\frac{1}{3}$$

【笔记】当 $x^2<1$ 时，t^2 一部分大于 x^2，另一部分小于 x^2，故按照 x^2 分段

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\dfrac{1}{3}$。 【笔记】当 $x^2\geqslant 1$ 时，$t^2\leqslant x^2$ 恒成立，故不需要分段

则

$$f(x)=\begin{cases}x^2-\dfrac{1}{3}, & x\leqslant -1\\ -\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & -1<x<0\\ \dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<-1\\ -4x^2-2x, & -1<x<0\\ 4x^2-2x, & 0<x<1\\ 2x, & x>1\end{cases}$$

【笔记】公式法求解导数，但请注意无 $x=0,x=\pm1$

由导数的定义可知，$f'(-1)=-2,f'(0)=0,f'(1)=2$。

【笔记】注意分段点处用导数定义式

故

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant-1\\ -4x^2-2x, & -1<x<0\\ 4x^2-2x, & 0\leqslant x<1\\ 2x, & x\geqslant1\end{cases}$$

由于 $f(x)$是偶函数，所以只需求它在$[0,+\infty)$上的最小值。

令 $f'(x)=0$，即 $4x^2-2x=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$。又因为 $f(0)=\dfrac{1}{3}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，所以 $f(x)$的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$。

【笔记】可直接利用偶函数，只讨论 $f(x)$在$[0,+\infty)$的表达式

(2) 由公式法可得 $f''(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ -8x-2, & -1<x<0\\ 8x-2, & 0<x<1\\ 2, & x>1\end{cases}$。

由导数定义可知 $f''(0)=-2$，$f''(-1)$，$f''(1)$均不存在。

① 先考查二阶导不存在的点是否为拐点。

因为二阶导 $f''(x)$在 $x=-1$ 左右两侧均大于零，所以 $x=-1$ 不是函数 $f(x)$的拐点。

同理可知，$x=1$ 也不是拐点。

② 再考查二阶导为 0 的点是否为拐点。

令

$$f''(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-8x-2=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}\\ 8x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

容易验证，二阶导 $f''(x)$在 $x=\dfrac{1}{4}$，$x=-\dfrac{1}{4}$左右两侧均异号，所以 $f(x)$在 $x=\dfrac{1}{4}$，$x=-\dfrac{1}{4}$处存在拐点。

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{3}$。

35 设函数 $f(t)$连续，令 $F(x,y)=\displaystyle\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\,dt$，则(　　)。

A. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　B. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

C. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　D. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

解 C。

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\,\mathrm{d}t=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

则$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\,\mathrm{d}t+(x-y)f(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\,\mathrm{d}t$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$。

同理，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\int_0^{x-y}f(t)\,\mathrm{d}t-(x-y)f(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\,\mathrm{d}t$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y)$。

综上所述，$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$，故选 C。

解题心得

专题 17　分部积分

分部积分是积分夜空中最亮的星，命题人对此一往情深，套路还固定，十分有良心。本题融合 4 道真题，总结了分部积分的核心考法，并加入一个十分有用但易忽略的小技巧，帮助同学们既能统筹全局，又能狠抓细节。

知识清单

1. 需使用分部积分的几种情况。

(1) 对变限积分函数再积分，用分部积分。

(2) 对形如 xf' 的函数积分，用分部积分。

(3) 对含对数或反三角的函数积分，用分部积分。

(4) 对形如 $x\mathrm{e}^x$，$x\sin x$，$x\cos x$ 的函数积分，用分部积分。

2. 函数平均值公式：$\bar{f}=\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$。

经典例题

36 计算下列积分。

(1) 计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中，$f(x)=\int_1^x\dfrac{\arcsin\sqrt{t}+\ln t}{t}\mathrm{d}t$。

（2）设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值。

解

（1）$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 2f(x)d\sqrt{x}$ 【笔记】变限函数再积分，用分部积分：变限留在 d 前，其他凑至 d 后

$=2f(x)\sqrt{x}\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)dx$ 【笔记】变限 $f(x)=\int_a^x g(t)dt$ 必有 $f(a)=0$

$=-2\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

第一个积分：

$-2\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=-4\int_0^1\arcsin\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$ 【笔记】反三角用分部积分，反三角放在 d 前，其他凑至 d 后

$=-4\int_0^1\arcsin t\,dt=-4t\arcsin t\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 【笔记】第一个等号用了代换 $\sqrt{x}=t$

$=-2\pi-2\int_0^1\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}=-2\pi-4\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1=4-2\pi$ 【笔记】此处用到 $\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+c$

第二个积分：

$-2\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=-4\int_0^1\ln x\,d\sqrt{x}$ 【笔记】含对数的积分，用分部积分：ln 放在 d 前，其他凑至 d 后

$=-4\sqrt{x}\ln x\Big|_{0^+}^1+4\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=\lim\limits_{x\to0^+}4\sqrt{x}\ln x+8\sqrt{x}\Big|_0^1=0+8=8$ 【笔记】$\lim\limits_{x\to0^+}x^\sigma\ln x=0(\sigma>0)$

所以，原式 $=12-2\pi$。

【笔记】证明 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\sigma\ln x=0(\sigma>0)$：$\lim\limits_{x\to0^+}x^\sigma\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\sigma}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\sigma x^{-\sigma-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^\sigma}{-\sigma}=0(\sigma>0)$

（2）$\bar{f}=\frac{\int_0^\pi f(x)dx}{\pi}$，$f(0)=\int_0^0\frac{\sin t}{\pi-t}dt=0$ 【笔记】平均值公式 $\bar{f}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)d(x-\pi)$ 【笔记】重要技巧 $dx=d(x-\pi)$，这一步可简化后续计算

$=f(x)(x-\pi)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}(\pi-x)dx$

$=\int_0^\pi\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2$

所以，$\bar{f}=\frac{\int_0^\pi f(x)dx}{\pi}=\frac{2}{\pi}$。

37 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\ (n=1,2,3,\cdots)$。

（1）求 I_n 的递推关系，并求 $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^5 x\,dx$。

（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$。

(3)(仅数学一和数学三)试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{I_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

解 (1) 因为 $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}\tan x\xlongequal{\tan x=t}$ $\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$，所以 $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$。

$$I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-I_1\right)=I_1-\frac{1}{4},I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2,$$

所以 $I_5=\frac{2\ln 2-1}{4}$。

(2) $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ 且 I_n 单调递减 $\Rightarrow I_n>\frac{1}{2(n+1)},I_{n+2}<\frac{1}{2(n+1)}$，所以 $\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$，由夹逼准则可知：$\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$。

(3) $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1},I_{n+2}>0$，所以 $I_n<\frac{1}{n+1}$，所以 $\frac{I_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$。由于 $\lambda+1>1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{I_n}{n^{\lambda}}$ 也收敛。

解题心得

专题 18　定积分的几何应用

柱壳法与圆盘法是两大基本方法，复杂旋转体考虑大体积减小体积。本专题融合了深受命题人喜爱的 $\ln x$ 函数及其切线方程、方程根的个数、形心坐标等。小白不可绕行。

知识清单

1. 重要模型。

曲线 $y=\ln x$ 过原点的切线为 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$，对函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}-k$：

(1) 若 $k>0$，则函数 $f(x)$ 无零点。

(2) 若 $k=0$，则函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点。

(3) 若 $k<0$，则函数 $f(x)$ 有两个零点。

2. 定积分的几何应用微分法(不要死记硬背,学会画图推导)。

(1) 体积微元: $dV=\pi r^2\cdot dx$(圆盘), $dV=2\pi r\cdot y\cdot dx$(柱壳)。

(2) 弧长微元(仅数学一和数学二): $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$(极坐标)。

(3) 表面积微元(仅数学一和数学二): $dS=2\pi y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$。

3. 形心横坐标公式。

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}\text{(平面)};\ \bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dS}{\iint\limits_D dS}\text{(曲面)};\ \bar{x}=\frac{\iiint\limits_D x\,dV}{\iiint\limits_D dV}\text{(立体)}。$$

(曲面曲线、立体图形仅数学一)

4. 几类极坐标曲线。

(1) 心形线: $r=a(1+\cos\theta)$。

(2) 阿基米德螺旋线: $r=a\theta$。

(3) 对数螺旋线: $r=e^{\theta}$。

(4) 双纽线: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$; 极坐标形式: $r^2=a^2\cos2\theta$。

(5) 三叶玫瑰线: $r=\sin3\theta$。更一般地, $r=\sin n\theta$(n 为正整数),表示玫瑰线。

经典例题

38 设 $f(x)=\ln x$,直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 过原点的切线,其函数表达式记为 $g(x)$,曲线 $f(x)$、直线 L 和 x 轴围成的图形记为 D。

(1) 方程 $f(x)=g(x)-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$ 有几个不同的实根?

(2) 求图形 D 分别绕 x 轴、直线 $x=e$ 旋转一周所得几何体的体积。

(3) 求图形 D 的形心坐标。

解 (1) 求解过程如下。

【解题模板】 求解切线方程。

设切点的横坐标为 x_0,则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$,从而 $x_0=e$,所以该切线的方程为 $y=\frac{1}{e}x$,故 $g(x)=\frac{x}{e}$。

判定方程 $F(x)=f(x)-g(x)+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx=0$ 的根等价于判定函数 $F(x)$ 图像与 x 轴的交点个数。

$$F(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$$

其中, $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$ 是定积分,为常数,且被积函数 $\sqrt{1-\cos2x}$ 在 $(0,\pi)$ 非负,故 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx>0$。为简化计算,令 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx=k>0$, 【笔记】此处无须计算积分

即 $F(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k\,(k>0)$。

【解题步骤 1】　首先利用零点定理说明零点的存在性。

其导数 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$，令 $F'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$，

即 $\begin{cases} F'(x)>0, & 0<x<\mathrm{e} \\ F'(x)<0, & \mathrm{e}<x<+\infty \end{cases}$。

所以 $x=\mathrm{e}$ 是最大值点，最大值为 $F(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}+k=k>0$。

又因为 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k\right)=-\infty \end{cases}$，由连续函数的介值定理知，在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 各有 1 个零点（不相同）。

【解题步骤 2】　再利用单调性（或凹凸性或罗尔定理反证）说明零点的至多性。

下面分别用 3 种方法说明零点的至多性。

【方法 1】　利用单调性说明至多 2 个零点。

因为 $F(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 上有 $F'(x)>0$，在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上有 $F'(x)<0$，所有 $F(x)$ 在上述两个区间上单调，故在区间 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上各最多存在 1 个零点。

【方法 2】　利用凹凸性说明。

$F(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k\ (k>0)$，所以 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$，进而有 $F''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$。

函数的二阶导恒小于 0（不变号），所以曲线 $y=F(x)$ 在区间上 $(0,+\infty)$ 为凸曲线，最多穿过 x 轴 2 次。故 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上最多存在 2 个零点。

【方法 3】　罗尔定理反证。

$F(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k\ (k>0)$，所以 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$，进而有 $F''(x)=-\frac{1}{x^2}\neq0$。

若 $F(x)$ 存在 3 个不同的零点，即 $F(a)=F(b)=F(c)=0$。

则由罗尔定理，至少存在一个 $\xi_1\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$。至少存在一个 $\xi_2\in(b,c)$ 使得 $F'(\xi_2)=0$。

又因为 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$。由罗尔定理，至少存在一个 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F''(\xi_3)=0$，这与 $F''(x)=-\frac{1}{x^2}\neq0$ 矛盾。所以 $F(x)$ 至多有 2 个零点。

【笔记】罗尔定理反证：若 $F^{(n)}(x)\neq0$，则 $F(x)$ 最多有 n 个零点

【解题步骤 3】　综合至少与至多说明零点个数。

综上，$F(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 各有且仅有 1 个零点。

故方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有 2 个不同实根。

(2) 切线 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体积为 $V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$，如图 3-1 所示。

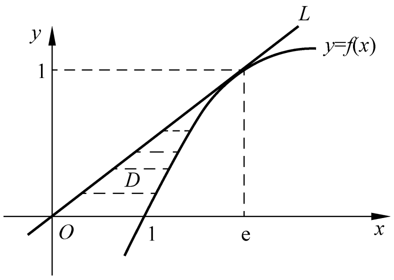

图　3-1

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\,\mathrm{d}y$$

因此图形 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2-\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3)$$

同理可得，图形 D 绕 x 轴旋转所得的圆锥体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot\mathrm{e}-\int_1^{\mathrm{e}}\pi(\ln x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi(6-2\mathrm{e})}{3}$$

(3) 设形心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，则有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1$$

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}y}^{\mathrm{e}^y}x\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}y}^{\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{e}^2-3}{12}}{\frac{\mathrm{e}-2}{2}}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{6(\mathrm{e}-2)}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}y}^{\mathrm{e}^y}y\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}y}^{\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x}=\frac{\frac{3-\mathrm{e}}{3}}{\frac{\mathrm{e}-2}{2}}=\frac{2(3-\mathrm{e})}{3(\mathrm{e}-2)}$$

所以形心坐标为$\left(\frac{\mathrm{e}^2-3}{6(\mathrm{e}-2)},\frac{2(3-\mathrm{e})}{3(\mathrm{e}-2)}\right)$。

39 对数螺旋线 $r=\mathrm{e}^\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，在点$\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$处的切线为 L。

(1) 求切线 L 的直角坐标方程(仅数学一和数学二)。

(2) 求对数螺旋线、极轴、直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成图形的面积。

(3) 求此段对数螺旋线的弧长(仅数学一和数学二)。

解 (1) 求切线方程的主要问题是求其斜率 $k=y'_x$，而 y'_x 可由 $r=\mathrm{e}^\theta$ 的参数方程

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=\mathrm{e}^\theta\cos\theta\\y=r\sin\theta=\mathrm{e}^\theta\sin\theta\end{cases}$$

求得，即 $y'_x=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\mathrm{e}^\theta\sin\theta+\mathrm{e}^\theta\cos\theta}{\mathrm{e}^\theta\cos\theta-\mathrm{e}^\theta\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，所以 $y'_x\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$。

又由参数方程可知，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$，所以切线的方程为 $y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$，即 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$。

(2) $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta$，$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^\pi-1)$。

(3) $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^\theta\mathrm{d}\theta$，$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1)$。

40 已知 $f(x)$是微分方程 $x^2f''(x)+f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 满足条件 $f(1)=f'(1)=0$ 的特解，则 $f(x)$在$[0,1]$上的平均值为________。

解 $\frac{\pi}{24}$。

对原方程左右两边积分可得

$$\int_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

其中，$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x = \left[x^2 f'(x) - 2xf(x) + 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\Bigg|_0^1 = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (f(1)=f'(1)=0),$$

所以①式可化为 $3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$，即$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{24}$。

41 设 $f(x)$是以 T 为周期的连续周期函数。

(1) 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t}{x}$ 的值。

(2) 求证$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \varphi(x) + kx$ 并求 k，其中 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。

证 对任意 $x>T$，存在自然数 n 使得 $nT\leqslant x<(n+1)T$。设 $x=nT+y$，$0\leqslant y<T$，当 $x\to+\infty$ 时，$n\to\infty$。

(1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+y}\int_0^{nT+y} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+y}\left(\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t + \int_{nT}^{nT+y} f(t)\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+y}\left(n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_{nT}^{nT+y} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T+\frac{y}{n}}\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_{nT}^{nT+y} f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}。$$

因为 $|\cos t|$ 是以 π 为周期的周期函数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t}{x} = \frac{\int_0^\pi |\cos t|\,\mathrm{d}t}{\pi} = \frac{2}{\pi}$。

(2) 问题等价于求证存在 k 使得 $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - kx$ 是以 T 为周期的周期函数。

$\varphi(x+T) = \int_0^{x+T} f(x)\mathrm{d}x - k(x+T) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - kx + \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t - kT$，又因为$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，所以 $k = \frac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}$ 时，有 $\varphi(x+T) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - kx = \varphi(x)$，所以命题得证，且 $k = \frac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}$。

42 (仅数学一和数学二)在平面上，有一条从点$(a,0)$向 x 轴正方向的射线，线密度为 ρ。在点$(0,h)$处(其中 $h>0$)有一个质量为 m 的质点。则射线对该质点的引力为________。

解 $\left(\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}, \frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\left(\arctan\frac{a}{h}\right)\right)\right)$。

在 x 轴的 x 处取一小段 $\mathrm{d}x$，其质量为 $\rho\mathrm{d}x$，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是 $\mathrm{d}F = \frac{Gm\rho\mathrm{d}x}{h^2+x^2}$(其中 G 为引力常数)，则有 $\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$，$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$，

$$F_x = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_x = \int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2+h^2)}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-Gm\rho(h^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}。$$

类似有

$$F_y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho h\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{h^3\sec^3 t}$$

$$=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\left(\arctan\frac{a}{h}\right)\right)。$$

所求引力向量为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)=\left(\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}},\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\left(\arctan\frac{a}{h}\right)\right)\right)$。

解题心得

专题 19 有理函数积分

有理函数积分在许多场合作为"绿叶"考查。近年来,命题人有将有理积分作为"红花"的趋势。瑕点函数法与待定系数法是两大方法,两者犹如大炮与步枪。战端开启后,先用炮兵火力压制,继而步兵冲锋。当然,有时仅炮兵足矣。

知识清单

1. 分母一次方:$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$。

2. 分母二次方。

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$。

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$。

经典例题

43 求不定积分 $\int\frac{2x+4}{(x-1)(x^3-x)}\mathrm{d}x$。

解 设 $\frac{2x+4}{(x-1)(x^3-x)}=\frac{2x+4}{x(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}$。

【笔记】找出分母 $(x-1)(x^3-x)$ 的因子 $x,x+1,x-1$,所以 $(x-1)(x^3-x)=x(x+1)(x-1)^2$

【瑕点法】　令 $f(x)=\dfrac{2x+4}{x(x+1)(x-1)^2}$，

$A=xf(x)|_{x=0}=\dfrac{2x+4}{(x+1)(x-1)^2}\Big|_{x=0}=4$，

【笔记】挖瑕点 $x=0$：$xf(x)$，代瑕点 $xf(x)|_{x=0}$

$B=(x+1)f(x)|_{x=-1}=\dfrac{2x+4}{x(x-1)^2}\Big|_{x=-1}=-\dfrac{1}{2}$，

【笔记】挖瑕点 $x=-1$：$(x+1)f(x)$，代瑕点 $(x+1)f(x)|_{x=-1}$

$D=(x-1)^2f(x)|_{x=1}=\dfrac{2x+4}{x(x+1)}\Big|_{x=1}=3$，

【笔记】挖瑕点 $x=1$：$(x-1)^2f(x)$，代瑕点 $(x-1)^2f(x)|_{x=1}$

$C=[(x-1)^2f(x)]'|_{x=1}=\dfrac{-2x^2-8x-4}{(x^2+x)^2}\Big|_{x=1}=-\dfrac{7}{2}$，

【笔记】挖 C 对应的瑕点必须乘 $(x-1)^2$，但 C 对应 $(x-1)$ 的一次方，故对 $(x-1)^2f(x)$ 求导（可理解成对二次方求导是一次方）

所以
$$\int\frac{2x+4}{(x-1)^2(x^2+x)}dx=4\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{7}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+3\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$=4\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{7}{2}\ln|x-1|-3\frac{1}{x-1}+c。$$

解题心得

专题 20　反常积分审敛

反常积分从诞生的那一天开始便是众多考生的噩梦。反常积分的计算不难，难在积分审敛。本专题汇总了 4 类核心考法。掌握这 4 类考法的考生，在考场之上必能“心诗飞逸九重天”。

知识清单

1. 高低阶审敛法。

(1) 被积函数无穷小时：

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}=l$。

① 当 $0\leqslant l<+\infty$，且 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

② 当 $0<l\leqslant+\infty$，且 $p\leqslant1$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

（2）被积函数无穷大时：

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上非负连续，$x=a$ 为瑕点，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{(x-a)^p}}=l$。

① 当 $0\leqslant l<+\infty$，且 $p<1$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

② 当 $0<l\leqslant+\infty$，且 $p\geqslant 1$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

2. 比较审敛法中两类重要的反常积分：$\begin{cases}\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x, & \begin{cases}0<p<1, & \text{收敛}\\ p\geqslant 1, & \text{发散}\end{cases}\\ \int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x, & \begin{cases}p>1, & \text{收敛}\\ p\leqslant 1, & \text{发散}\end{cases}\end{cases}$。

3. 反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^m\ln^n x}\mathrm{d}x$ 的敛散性 $(m,n>0)$：$\begin{cases}m>1, & \text{必收敛}\\ m=1, & \begin{cases}n>1, & \text{收敛}\\ n\leqslant 1, & \text{发散}\end{cases}\\ m<1, & \text{必发散}\end{cases}$。

经典例题

44 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，给出以下三个命题：

① 若 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

② 若存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在，则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

③ 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在。

其中真命题的个数为（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解 B。

① 取 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ 发散，错误。

② 为比较判别法的原文表述，正确。

③ 中的极限比较判别法为充分不必要条件，错误。

比如取 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\mathrm{d}x$ 收敛，$p>1$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=+\infty$。

45 关于反常积分，下列说法正确的有（　　）个。

（1）设 m,n 是正整数，则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性与 m,n 取值均无关

（2）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e}\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $0<\alpha<2$

(3) 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x(\ln x)^k}{2+x^2}\mathrm{d}x\ (k\in(-\infty,+\infty))$ 的敛散性与 k 无关

(4) 设 m,n 均为正数，若反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x\cos^m x}$ 收敛，则 $m<1$，且 $n<1$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 D。

说法(1)对。$x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点，应写成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$$

对于第一个积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$，显然，当 $0<\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$ 时，该反常积分收敛。

【笔记】对无穷大的被积函数 $\frac{1}{(x-x_0)^p}$，$0<p<1$ 时对应的反常积分收敛

当 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}\leqslant0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在，此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 实际上不是反常积分，故收敛。

不论 m,n 是什么正整数，$\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$ 总成立，故 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 总收敛。

对第二个积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{0.5}}}=\lim\limits_{x\to1^-}[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}(1-x)^{0.5}=0$，说明 $\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\ll\dfrac{1}{(1-x)^{0.5}}$，而积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{(1-x)^{0.5}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛。

【笔记】对无穷大的被积函数 $\frac{1}{(x-x_0)^p}$，$0<p<1$ 时对应的反常积分收敛，故 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{(1-x)^{0.5}}\mathrm{d}x$ 收敛

【笔记】证明 $\lim\limits_{x\to1^-}[\ln(1-x)](1-x)^{0.5}=0$

$$\lim_{x\to1^-}[\ln(1-x)](1-x)^{0.5}=\lim_{t\to0^+}t^{0.5}\ln t=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{t^{-0.5}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{-1}}{-0.5t^{-1.5}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{0.5}}{-0.5}=0$$

同理可证 $\lim\limits_{x\to1^-}[\ln(1-x)]^n(1-x)^{0.5}=0\ (n=2,3,\cdots)$

说法(2)对。$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$。

由 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛可知，$\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛。

$\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$，$x=1$ 是瑕点，因为 $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\alpha-1<1\Rightarrow\alpha<2$。

$\int_{e}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{e}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_{e}^{+\infty}$，要使其收敛，则 $\alpha>0$。

所以，$0<\alpha<2$。

说法(3)对。无论 k 取何值，反常积分总发散。

反常积分有一个奇点 $x=+\infty$，两个瑕点 $x=0$ 和 $x=1$，将反常积分化为

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\frac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x&=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\frac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x+\int_{2}^{+\infty}\frac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2+I_3+I_4\end{aligned}$$

① 对 $I_1=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$，因为 $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\frac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}=0(k\in(-\infty,+\infty))$ 并且

$\int_{0}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以$\int_{0}^{1}\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$ 对于 $k\in(-\infty,+\infty)$ 均收敛。

② 对 $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$ 与 $I_3=\int_{1}^{2}\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$，当 $x\to1$ 时，有 $\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1$，

$\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\sim\dfrac{1}{3}\cdot(x-1)^{k}$，若 $k>0$，则两个积分收敛。

当 $k<0$ 时，有$\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\sim\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^{-k}}$，此时若有 $0<-k<1$，即$-1<k<0$，则两个积分收敛；此时若有$-k\geqslant1$，即 $k\leqslant-1$，则两个积分发散。

③ 对 $I_4=\int_{2}^{+\infty}\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$，当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\sim\dfrac{(\ln x)^{k}}{x}$，所以$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{x(\ln x)^{k}}{2+x^{2}}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{2}^{+\infty}\dfrac{(\ln x)^{k}}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性相同。又

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{(\ln x)^{k}}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(\ln x)^{k+1}}{k+1}\Big|_{2}^{+\infty}=0, & k<-1\\[2ex]\dfrac{(\ln x)^{k+1}}{k+1}\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty, & k>-1\\[2ex]\ln(\ln x)\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty, & k=-1\end{cases}$$

所以反常积分 I_4 在 $k<-1$ 时收敛，在 $k\geqslant-1$ 时发散。

综上，无论 k 取何值，反常积分总发散。

说法(4)对。$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{n}x\cos^{m}x}=\int_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{n}x\cos^{m}x}+\int_{1}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{n}x\cos^{m}x}$。

① 对于积分 $I_1=\int_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{n}x\cos^{m}x}$，被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^{n}x\cos^{m}x}$。

当 $x\to0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{p}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\frac{1}{\sin^{n}x\cos^{m}x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{p}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{x^{p}}{\sin^{n}x}=c$，可取 $p=n$，当 $p=n<1$ 时，积分 I_1 收敛。

② 对于积分 $I_2=\int_{1}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{n}x\cos^{m}x}$，被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^{n}x\cos^{m}x}$。

当 $x \to \frac{\pi}{2}^{-}$ 时，有

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^{p}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\frac{1}{\sin^{n} x \cos^{m} x}}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^{p}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{p}}{\cos^{m} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{p}}{\sin^{m}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = c$$

可取 $p=m$，当 $p=m<1$ 时，积分 I_2 收敛。所以说法(4)正确。

综上所述，4 种说法均正确，故选 D。

解题心得