

# 非理想情况下的远场信号参数估计方法

## 5.1 引言

第2章和第3章提出的方法是在理想情况下对远场信号角度进行估计,但是当受到阵列互耦和多径传播等实际环境的影响时,这些方法在非理想情况下的性能严重下降甚至完全失效。阵列互耦效应是由阵元之间的相互作用产生的,并且与阵元间距有关,阵元间距越小,阵列互耦效应会越强。此外,受到多径传播的影响,阵列接收信号中可能会包含直达波和多径波,由于直达波和多径波有很强的相干性,因此在非相干信号数学模型假设下的参数估计方法无法对相干信号进行参数估计。

本章考虑了非理想情况下的远场信号参数估计场景,针对阵列互耦情况下的远场信号参数估计问题,提出了深度展开稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)网络的参数估计方法。该方法通过建立嵌套阵列下的阵列互耦数学模型,将稀疏重构方法的迭代过程展开为神经网络级联形式,利用网络的输出对嵌套阵列下的互耦系数和远场信号角度进行估计。此外,针对多径传播情况下的远场信号参数估计问题,通过建立嵌套阵列下相干信号数学模型,利用实数域的相干信号协方差向量,提出了基于深度展开 FOCUSS 网络的参数估计方法,实现相干信号的角度和功率估计。为了减少计算复杂度,利用复数域的相干信号协方差矩阵,提出了基于深度展开迭代自适应算法(Iterative Adaptive Approach, IAA)网络的参数估计方法,实现相干信号的角度和功率估计。

本章各节内容安排如下:5.2节介绍了阵列互耦情况下的信号参数估计方法。其中,5.2.1节首先介绍了阵列互耦的数学模型,将嵌套阵列的协方差向量转化到实数域;5.2.2节提出了基于深度展开 SBL 网络的参数估计方法,实现互耦系数和远场信号角度估计;5.2.3节中通过仿真实验对所提出深度展开 SBL 网络的性能进行分析。5.3节介绍了多径传播情况下的信号参数估计方法。其中,5.3.1节首先介绍了相干信号的数学模型;5.3.2节在实数域相干信号协方差向量的基础上,提出了基于深度展开 FOCUSS 网络的参数估计方法,实现相干信号的角度和功率估计;5.3.3节在复数域相干信号协方差矩阵的基础上,提出了基于深度展开 IAA 网络的参数估计方法,实现相干信号的角度和功率估计;5.3.4

节中通过仿真实验对所提出深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络的性能进行分析；5.3.5 节通过实测数据对所提方法的有效性进行验证。5.4 节对本章的研究内容和主要成果进行了归纳和总结。

## 5.2 阵列互耦情况下的参数估计方法

本节针对阵列互耦情况下的信号参数估计问题,提出了深度展开 SBL 网络,实现嵌套阵列下的互耦系数和远场信号角度估计。在阵列互耦数学模型的基础上,该方法首先对包含互耦系数的嵌套阵列协方差矩阵进行向量化处理,形成由连续虚拟阵元构成的实数域协方差向量;接着将期望最大化方法的迭代步骤转化为网络的级联形式,构建出深度展开 SBL 网络,通过网络的输出对嵌套阵列的互耦系数和远场信号角度进行估计。

### 5.2.1 阵列互耦数学模型

相较于均匀线阵的互耦矩阵 (Mutual Coupling Matrix, MCM) 具有 Toeplitz 矩阵形式,嵌套阵列的互耦矩阵需要以分块矩阵的形式进行表示:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_P & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & 1 & c_1 & \cdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & c_1 & 1 & \ddots & \cdots & c_P & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_P & \cdots & \ddots & \ddots & c_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & c_1 & 1 & c_1 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_P & \cdots & c_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{M \times M}$$

$$= \begin{bmatrix} [\text{toeplitz}(\mathbf{c})]_{(M/2+1) \times (M/2+1)} & \mathbf{0}_{(M/2+1) \times (M/2-1)} \\ \mathbf{0}_{(M/2-1) \times (M/2+1)} & \mathbf{I}_{(M/2-1) \times (M/2-1)} \end{bmatrix}_{M \times M} \quad (5.1)$$

其中,互耦矩阵第  $m_1$  行第  $m_2$  列的元素表示第  $m_1$  个阵元与第  $m_2$  个阵元之间的互耦系数 (Mutual Coupling Coefficient, MCC),互耦系数与阵元的间距有关,阵元的间距越大,互耦系数越小。 $\mathbf{c} = [1 \ c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{P-1}]^T$  表示  $P$  维互耦向量, $\mathbf{0}_{(M/2+1) \times (M/2-1)}$ 、 $\mathbf{0}_{(M/2-1) \times (M/2+1)}$  和  $\mathbf{I}_{(M/2-1) \times (M/2-1)}$  分别表示  $(M/2+1) \times (M/2-1)$  维零矩阵、 $(M/2-1) \times (M/2+1)$  维零矩阵和  $(M/2-1) \times (M/2-1)$  维单位矩阵。可以看出,嵌套阵列的第一个阵元到第  $(M/2+1)$  个阵元之间的互耦矩阵具有 Toeplitz 矩阵形式,从第  $M/2+2$  个阵元到第  $M$  个阵元与其余阵元之间的互耦系数为 0。

因此,根据式(2.11),嵌套阵列在互耦情况下的第  $n$  个快拍的接收数据可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= [x_1(n) \ x_2(n) \ \cdots \ x_M(n)]^T \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{C} \mathbf{a}(\theta_k) s_k(n) + \mathbf{w}(n) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{CAs}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (5.2)$$

相应地,互耦情况下的协方差矩阵可以计算为

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \mathbf{B}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_M \quad (5.3)$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$$

其中,  $\mathbf{B} = \mathbf{CA}$  表示阵列互耦情况下的导向矩阵。

将互耦情况下的嵌套阵列协方差矩阵进行向量化,可以得到

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{R})$$

$$= (\mathbf{B}^* \odot \mathbf{B}) [\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \cdots \quad \sigma_K^2]^T + \sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T \quad (5.4)$$

其中,  $\mathbf{B}^* \odot \mathbf{B}$  可以表示为

$$\mathbf{B}^* \odot \mathbf{B} = [\mathbf{b}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{b}(\theta_1) \quad \mathbf{b}^*(\theta_2) \otimes \mathbf{b}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{b}^*(\theta_K) \otimes \mathbf{b}(\theta_K)] \quad (5.5)$$

$\mathbf{b}(\theta_k) = \mathbf{Ca}(\theta_k)$  表示阵列互耦情况下导向矩阵的第  $k$  列,  $k=1, 2, \dots, K$ 。

在角度集合  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  下,协方差向量  $\mathbf{y}$  的稀疏表示为

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z} + \sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T \quad (5.6)$$

其中,互耦情况下的超完备词典  $\boldsymbol{\Phi}$  可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}(\theta_1) \quad \boldsymbol{\varphi}(\theta_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}(\theta_Q)]$$

$$= [\mathbf{b}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{b}(\theta_1) \quad \mathbf{b}^*(\theta_2) \otimes \mathbf{b}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{b}^*(\theta_Q) \otimes \mathbf{b}(\theta_Q)] \quad (5.7)$$

$\mathbf{z}$  中  $\theta_k$  对应位置上的元素为  $\sigma_k^2$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ , 其余位置上的元素为 0。

将  $\mathbf{y}$  转换到实数域,可以表示为

$$\begin{bmatrix} \Re(\mathbf{y}) \\ \Im(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re(\boldsymbol{\Phi}) & -\Im(\boldsymbol{\Phi}) \\ \Im(\boldsymbol{\Phi}) & \Re(\boldsymbol{\Phi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{z}) \\ \Im(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Re(\sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T) \\ \Im(\sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

由于  $\mathbf{z}$  的元素表示信号的功率,因此  $\Im(\mathbf{z})$  为零向量,式(5.8)可以改写为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T \\ \mathbf{0}_{M^2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{y}} = [\Re(\mathbf{y}^T) \quad \Im(\mathbf{y}^T)]^T$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = [\Re(\boldsymbol{\Phi}^T) \quad \Im(\boldsymbol{\Phi}^T)]^T$ , 互耦情况下的超完备词典第  $q$  列的实部可以表示为

$$\Re(\boldsymbol{\varphi}(\theta_q)) = \Re(\mathbf{b}^*(\theta_q) \otimes \mathbf{b}(\theta_q))$$

$$= \Re(\mathbf{b}^*(\theta_q)) \otimes \Re(\mathbf{b}(\theta_q)) - \Im(\mathbf{b}^*(\theta_q)) \otimes \Im(\mathbf{b}(\theta_q)) \quad (5.10)$$

第  $q$  列的虚部可以表示为

$$\Im(\boldsymbol{\varphi}(\theta_q)) = \Im(\mathbf{b}^*(\theta_q) \otimes \mathbf{b}(\theta_q))$$

$$= \Re(\mathbf{b}^*(\theta_q)) \otimes \Im(\mathbf{b}(\theta_q)) + \Im(\mathbf{b}^*(\theta_q)) \otimes \Re(\mathbf{b}(\theta_q)) \quad (5.11)$$

由于  $\Re(\mathbf{b}^*(\theta_q)) = \Re(\mathbf{b}(\theta_q))$  和  $\Im(\mathbf{b}^*(\theta_q)) = -\Im(\mathbf{b}(\theta_q))$ ,  $\Re(\boldsymbol{\varphi}(\theta_q))$  和  $\Im(\boldsymbol{\varphi}(\theta_q))$  可以表示为

$$\Re(\boldsymbol{\varphi}(\theta_q)) = \Re(\mathbf{b}(\theta_q)) \otimes \Re(\mathbf{b}(\theta_q)) + \Im(\mathbf{b}(\theta_q)) \otimes \Im(\mathbf{b}(\theta_q)) \quad (5.12)$$

$$\Im(\boldsymbol{\varphi}(\theta_q)) = \Re(\mathbf{b}(\theta_q)) \otimes \Im(\mathbf{b}(\theta_q)) - \Im(\mathbf{b}(\theta_q)) \otimes \Re(\mathbf{b}(\theta_q)) \quad (5.13)$$

其中,

$$\Re(\mathbf{b}(\theta_q)) = \Re(\mathbf{C})\Re(\mathbf{a}(\theta_q)) - \Im(\mathbf{C})\Im(\mathbf{a}(\theta_q)) \quad (5.14)$$

$$\Im(\mathbf{b}(\theta_q)) = \Re(\mathbf{C})\Im(\mathbf{a}(\theta_q)) + \Im(\mathbf{C})\Re(\mathbf{a}(\theta_q)) \quad (5.15)$$

### 5.2.2 基于深度展开 SBL 网络的参数估计方法

由于式(5.9)中的噪声部分使优化问题变得模糊<sup>[215]</sup>,因此凸松弛的目标函数可以表示为

$$\min(\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\Phi}\mathbf{z}\|_2^2 + \zeta\|\mathbf{z}\|_1) \quad (5.16)$$

其中, $\zeta$ 表示正则化参数,用于平衡重构误差和稀疏性。

通过在 SBL 框架中对功率的幅度进行积分<sup>[69]</sup>, $\tilde{\mathbf{y}}$  相对于超参数 $\boldsymbol{\gamma}$  和  $\sigma_w^2$  的概率可以表示为

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{y}} | \boldsymbol{\gamma}, \sigma_w^2) &= \int p(\tilde{\mathbf{y}} | \mathbf{z}, \sigma_w^2) p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{z} \\ &= \frac{\exp(-\text{tr}(\tilde{\mathbf{y}}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}))}{\det(\pi \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}})} \end{aligned} \quad (5.17)$$

其中, $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_Q]^T$  表示空间谱, $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}} = \tilde{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\Phi}^H + \sigma_w^2\mathbf{I}_{2M^2}$  表示嵌套阵列的协方差矩阵, $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})$ 。超参数 $\boldsymbol{\gamma}$  和  $\sigma_w^2$  可以通过最大化  $p(\tilde{\mathbf{y}} | \boldsymbol{\gamma}, \sigma_w^2)$  来估计,即 II 型最大似然(Maximum Likelihood, ML)问题,利用期望最大化(Expectation Maximization, EM)方法中 E 步和 M 步的迭代步骤对超参数 $\boldsymbol{\gamma}$  和  $\sigma_w^2$  进行更新<sup>[69]</sup>。

将 SBL 方法的迭代步骤展开为网络级联的形式,阵列互耦情况下深度展开 SBL 网络如图 5.1 所示,其中网络共有  $L$  层, $\tilde{\mathbf{y}}$  和  $\tilde{\Phi}$  作为每一层的输入,超参数的初始值 $\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}$  和  $(\sigma_w^2)^{(0)}$  分别设置为  $\text{eye}(Q)$  和 0。

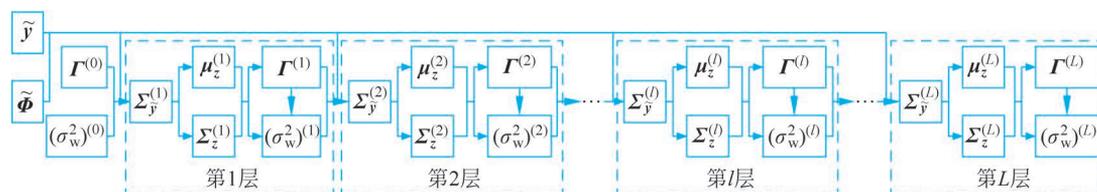
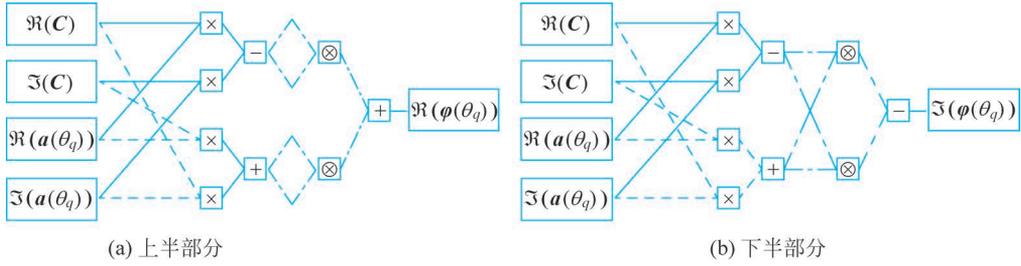


图 5.1 阵列互耦情况下的深度展开 SBL 网络结构图

由于网络的输入 $\tilde{\Phi}$ 中包含未知的互耦系数,互耦情况下的超完备词典中第  $q$  列上半部分构建网络和下半部分构建网络分别如图 5.2(a)和图 5.2(b)所示,其中,实线对应式(5.14)的计算过程,虚线对应式(5.15)的计算过程,图 5.2(a)中的点画线对应式(5.12)的计算过程,图 5.2(b)中的点画线对应式(5.13)的计算过程。

在深度展开 SBL 网络的前向传播过程中,EM 方法的 E 步通过将式(5.17)最大化,可以计算得到第  $l$  层的后验均值和后验协方差:

图 5.2 互耦情况下的超完备词典中第  $q$  列构建网络

$$\boldsymbol{\mu}_z^{(l)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(l-1)} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H (\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l-1)})^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \quad (5.18)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_z^{(l)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(l-1)} - \boldsymbol{\Gamma}^{(l-1)} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H (\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l-1)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Gamma}^{(l-1)} \quad (5.19)$$

其中,  $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l-1)} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Gamma}^{(l-1)} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H + (\sigma_w^2)^{(l-1)} \mathbf{I}_{2M^2}$  表示第  $l-1$  层的嵌套阵列协方差矩阵。

此外, EM 方法的  $M$  步利用  $\partial p(\tilde{\mathbf{y}} | \boldsymbol{\gamma}, \sigma_w^2) / \partial \boldsymbol{\gamma} = 0$ , 可以计算得到第  $l$  层输出的超参数:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{(l)} = \boldsymbol{\mu}_z^{(l)} (\boldsymbol{\mu}_z^{(l)})^T + \boldsymbol{\Sigma}_z^{(l)} \quad (5.20)$$

第  $l$  层的噪声功率可以计算为

$$(\sigma_w^2)^{(l)} = \frac{1}{2M^2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\mu}_z^{(l)}\|_2^2 + \frac{(\sigma_w^2)^{(l-1)}}{2M^2} \left( Q - \sum_{q=1}^Q \frac{(\boldsymbol{\Sigma}_z^{(l)})_{q,q}}{(\boldsymbol{\Gamma}^{(l)})_{q,q}} \right) \quad (5.21)$$

在深度展开 SBL 网络的训练过程中, 初始化的互耦矩阵设置为  $\text{diag}([1, 0+j0, 0+j0, \dots, 0+j0]^T)$ , 利用随机梯度下降方法更新互耦系数, 根据式(5.16), 损失函数定义为

$$\sum_{t=1}^T (\|\tilde{\mathbf{y}}_t - \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \text{diag}(\boldsymbol{\Gamma}_t^{(L)})\|_2^2 + \zeta \|\text{diag}(\boldsymbol{\Gamma}_t^{(L)})\|_1) \quad (5.22)$$

其中,  $t=1, 2, \dots, T$ ,  $T$  表示训练样本的数量,  $\tilde{\mathbf{y}}_t$  表示网络输入的第  $t$  个训练数据,  $\boldsymbol{\Gamma}_t^{(L)}$  表示第  $t$  个训练样本输入网络后的第  $L$  层的输出。由于损失函数的第一项和第二项分别与重构误差和网络输出的稀疏性有关, 因此在深度展开 SBL 网络的训练过程中没有使用标签(即训练数据对应的真实空间谱), 可以看作无监督学习过程。通过对深度展开 SBL 网络进行训练, 可以估计出互耦系数, 利用  $\boldsymbol{\Gamma}^{(L)}$  的对角线元素得到的空间谱, 可以实现互耦情况下的角度估计。

### 5.2.3 仿真实验与分析

本节利用仿真实验对所提深度展开 SBL 网络的收敛性能、泛化能力、计算复杂度和估计精度进行分析和验证, 其中嵌套阵列的阵元位置设置为  $[1, 2, 3, 4, 8, 12]d$ , 互耦向量设置为  $[1, 0.35+j0.46, 0.09-j0.12]^T$ , 互耦情况下超完备词典的角度间隔设置为  $1^\circ$ 。在深度展开 SBL 网络的训练过程中, 数据集中 80% 的样本用于网络的训练, 20% 的样本用于网络的验证, 每个样本由两个信号生成。第一个信号的角度从  $[-60^\circ, -55^\circ, \dots, 55^\circ]$  中进行选取, 第二个信号的角度从  $[-55^\circ, -50^\circ, \dots, 60^\circ]$  中进行选取, 可以组合成 300 个训练数据。训练数据的信噪比为  $0 \sim 20\text{dB}$ , 快拍数为  $100 \sim 500$ 。在深度展开 SBL 网络的训练过程中, 损失函数的正则化参数、随机梯度下降优化器的学习率、Batch Size 和 Epoch 分别设置为  $0.1, 0.001, 32$  和  $30$ 。

### 1. 网络层数和互耦系数分析

本节首先比较在训练过程中的 RMSE 来确定深度展开 SBL 网络的最优层数。在深度展开 SBL 网络的训练过程中,每个 Epoch 下的 RMSE 定义为

$$\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \|\text{diag}(\mathbf{\Gamma}_t^{(L)}) - \text{diag}(\mathbf{\Gamma}_t^{\text{label}})\|_2^2} \quad (5.23)$$

其中,  $t=1, 2, \dots, T$ ,  $T$  表示训练数据的数量,  $\text{diag}(\mathbf{\Gamma}_t^{(L)})$  表示由深度展开 SBL 网络输出  $\mathbf{\Gamma}_t^{(L)}$  的对角线元素构成的空间谱,  $\text{diag}(\mathbf{\Gamma}_t^{\text{label}})$  表示第  $t$  个训练数据对应空间谱的标签。

在深度展开 SBL 网络的训练和验证过程中,不同层数的 RMSE 随着 Epoch 的变化情况如图 5.3 所示,由图 5.3(a)可知,在训练过程中,10 层、20 层、30 层和 40 层网络的 RMSE 随着 Epoch 的增加逐渐减小,在初始阶段训练不充分,导致层数越多的网络累积的误差越大。由图 5.3 可知,当 Epoch 小于 5 时,40 层深度展开 SBL 网络的 RMSE 大于其他层数深度展开 SBL 网络的 RMSE。随着 Epoch 的增加,深度展开 SBL 网络的参数逐步更新和优化,在第 15 个 Epoch 后趋于平稳,并且 40 层深度展开 SBL 网络的 RMSE 小于其他层数深度展开 SBL 网络的 RMSE。此外,由于 40 层深度展开 SBL 网络的 RMSE 略小于 30 层深度展开 SBL 网络的 RMSE,但是计算时间增加了 1.33 倍,为了平衡参数估计的准确性和计算复杂度,深度展开 SBL 网络的层数设置为 30。由图 5.3(b)可知,在验证过程中,10 层、20 层、30 层和 40 层网络的 RMSE 随着 Epoch 的增加逐渐减小,这表明在深度展开 SBL 网络的训练过程中没有出现拟合情况。

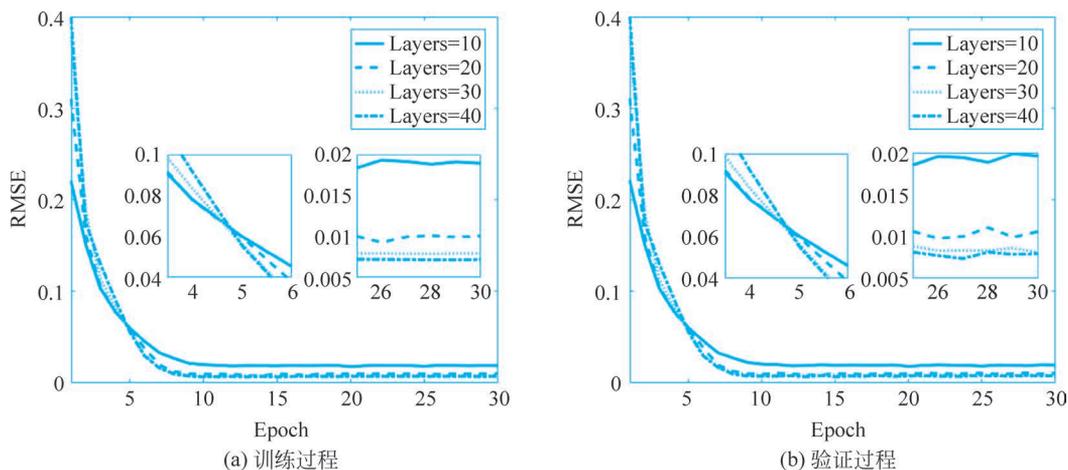


图 5.3 深度展开 SBL 网络在不同层数下的 RMSE

在 30 层深度展开 SBL 网络的训练过程中,不同 Epoch 下的互耦系数如图 5.4 所示,其中红色实线和红色虚线分别表示实部第一个互耦系数的实部和虚部,蓝色实线和蓝色虚线分别表示第二个互耦系数的实部和虚部。由图 5.4(a)可知,在训练过程中,第一个和第二个互耦系数的实部和虚部从初始值  $[0, 0, 0, 0]$  逐渐更新到设置值  $[0.35, 0.46, 0.09, -0.12]$ ,表明通过深度展开 SBL 网络的训练能够对互耦系数进行估计。由图 5.4(b)可知,在验证过程中,第一个和第二个互耦系数的实部和虚部也逐渐更新到设置值  $[0.35, 0.46, 0.09, -0.12]$ ,这表明在深度展开 SBL 网络的训练过程中没有出现拟合情况。

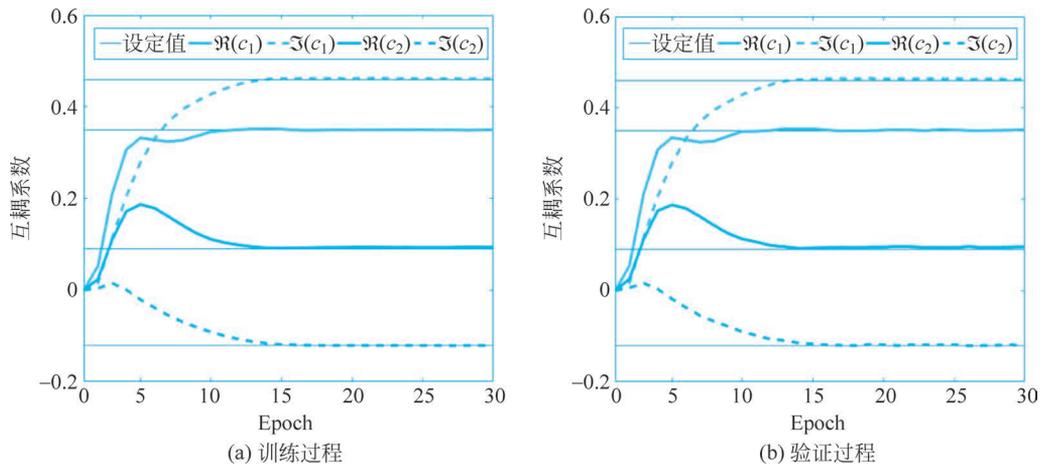


图 5.4 不同 Epoch 下的互耦系数

## 2. 泛化能力分析

本节对深度展开 SBL 网络在不同个数信号情况下的泛化能力进行分析。利用互耦系数估计结果,在深度展开 SBL 网络的测试过程中,第一个测试样本包含一个信号,角度设置为  $50.0^\circ$ ,第二个测试样本包含两个信号,角度分别设置为  $-2^\circ$  和  $2^\circ$ ,第三个测试样本包含 3 个信号,角度分别设置为  $-30^\circ$ 、 $-25^\circ$  和  $20^\circ$ 。图 5.5 给出了通过深度展开 SBL 网络得到不同个数信号的空间谱,其中红色曲线、蓝色曲线和绿色曲线分别表示一个信号、两个信号和 3 个信号的空间谱。由图 5.5 可知,利用空间谱的谱峰可以对信号的角度进行估计,这表明所提深度展开 SBL 网络具有在信号个数不同情况下的泛化能力。

此外,利用互耦系数估计结果,对欠定情况下的角度估计进行分析。在深度展开 SBL 网络的测试过程中,测试数据共包含 11 个信号,角度分别设置为  $[-50^\circ, -40^\circ, \dots, -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, \dots, 40^\circ, 50^\circ]$ ,可以看出,信号数目大于阵元数目。由于式(5.4)通过将嵌套阵列协方差矩阵进行向量化,可以形成由连续虚拟阵元构成的实数域协方差向量,因此增加了阵列自由度,由  $M$  个传感器构成两级嵌套阵列的 DOF 为  $(M^2 - 2)/2 + M$ 。图 5.6 给出了欠定情况

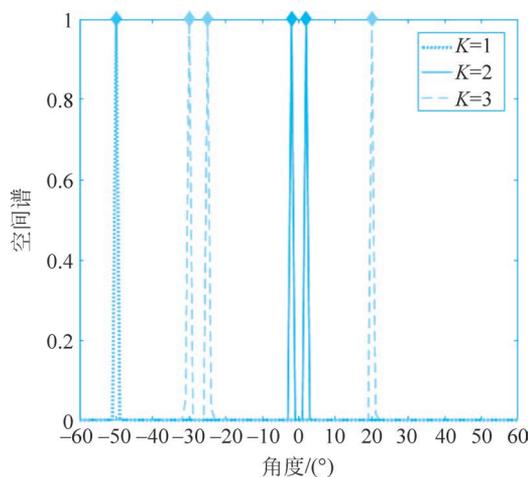


图 5.5 不同个数信号的空间谱

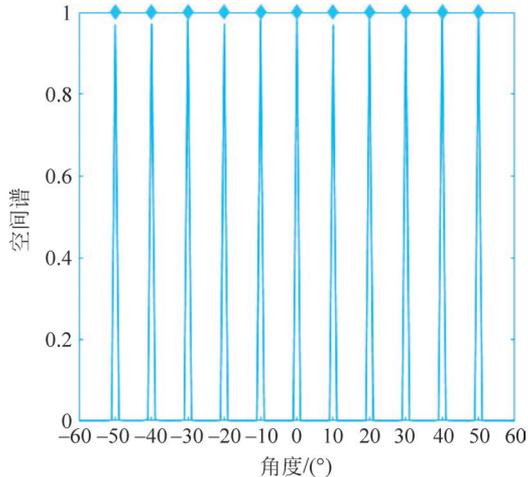


图 5.6 欠定情况下的空间谱

下的空间谱,其中蓝色曲线和洋红色点分别表示空间谱和 11 个信号的角度设定值。由图 5.6 可知,信号角度可以利用空间谱的谱峰进行估计,这表明深度展开 SBL 网络可以实现欠定情况下的信号角度估计。

### 3. 计算复杂度分析

本节对互耦情况下的深度展开 SBL 网络的计算复杂度进行分析。对于深度展开 SBL 网络的输入,式(5.3)中嵌套阵列协方差矩阵的计算需要  $M^2 N$  次乘法运算和  $M^2(N-1)$  次加法运算,式(5.4)中协方差矩阵的向量化和式(5.8)中实部和虚部的组合不需要额外的计算。在通过深度展开 SBL 网络进行角度估计时,式(5.18)和式(5.19)中  $\Sigma_{\tilde{y}}^{(l-1)}$  的计算需要  $4M^4 Q + 2M^2 Q$  次乘法运算和  $4M^4(Q-1)$  次加法运算,式(5.18)中  $\mu_z^{(l)}$  的计算需要  $4QM^2(M^2+1)$  次乘法运算、 $Q(4M^4-1)$  次加法运算和  $O(2M^2)$  求逆运算,式(5.19)中  $\Sigma_z^{(l)}$  的计算需要  $Q(4M^4+2M^2+2M^2 Q+Q^2)$  次乘法运算、 $Q(4M^4-2M^2+2M^2 Q+Q^2-2Q)$  次加法运算、 $2M^2$  次减法运算和  $O(2M^2)$  求逆运算,式(5.20)中  $\Gamma^{(l)}$  的计算需要  $Q^2$  次乘法运算和  $2Q^2$  次加法运算,式(5.21)中  $(\sigma_w^2)^{(l)}$  的计算需要  $2M^2(Q+1)$  次乘法运算、 $2QM^2+Q-2$  次加法运算、 $2M^2$  次减法运算和  $Q+2$  次除法运算。

在仿真实验中,通过 100 次 Monte-Carlo 实验得到的角度估计的平均计算时间,将所提出深度展开 SBL 网络与基于模型驱动的 SBL 方法<sup>[132]</sup>、联合稀疏恢复方法<sup>[131]</sup>和秩损迭代校正方法<sup>[130]</sup>进行比较,其中联合稀疏恢复方法利用联合阵列信号模型将互耦系数与超完备词典进行解耦,并通过 LASSO 方法实现互耦情况下的角度估计,基于模型驱动 SBL 方法和秩损迭代校正方法均利用变换矩阵将互耦系数与原始超完备词典解耦,接着分别通过 SBL 方法和子空间类方法实现角度估计。测试样本包含两个信号,角度分别设置为  $-2^\circ$  和  $2^\circ$ ,表 5.1 给出了阵列互耦情况下的不同方法角度估计的计算时间,由于模型驱动 SBL 方法和秩损迭代校正方法在分离互耦系数时将超完备词典的维度由  $M^2 \times Q$  增加到  $M^2 \times P^2 Q$ ,因此需要更多的计算时间。

表 5.1 阵列互耦情况下的角度估计的计算时间对比

阵列互耦情况下角度估计方法	计算时间/s
深度展开 SBL 网络	0.164
模型驱动 SBL 算法	0.393
联合稀疏恢复算法	0.082
秩损迭代校正算法	0.236

### 4. 估计精度分析

本节通过 500 次 Monte-Carlo 仿真实验得到的 RMSE 对基于深度展开 SBL 网络的角度估计精度进行分析,并与基于模型驱动的 SBL 方法<sup>[132]</sup>、联合稀疏恢复方法<sup>[131]</sup>和秩损迭代校正方法<sup>[130]</sup>和克拉美罗下界(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)进行了对比。角度估计的 RMSE 定义为

$$\sqrt{\frac{1}{VK} \sum_{v=1}^V \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k^{(v)} - \theta_k)^2} \quad (5.24)$$

其中,  $K$  和  $V$  分别表示信号和 Monte-Carlo 仿真实验的数量,  $\theta_k$  表示第  $k$  个信号的真实角度,  $\hat{\theta}_k^{(v)}$  表示第  $v$  次 Monte-Carlo 仿真实验中第  $k$  个信号的角度估计。

图 5.7 给出了互耦情况下两个信号角度估计的 RMSE, 其中信号的角度分别设置为  $-10.1^\circ$  和  $20.0^\circ$ 。当快拍数设置为 200 时, RMSE 随着信噪比的变化如图 5.7(a) 所示。当信噪比设置为 10dB 时, RMSE 随着快拍数的变化如图 5.7(b) 所示, 其中红线、蓝线、绿线、洋红线和黑线分别代表所提出的深度展开 SBL 网络的 RMSE, 模型驱动 SBL 方法的 RMSE, 联合稀疏恢复方法的 RMSE, 秩迭代校正方法的 RMSE 和 CRLB。由图 5.7 可知, 随着信噪比和快拍数的增加, RMSE 逐渐减小。由于所提深度展开 SBL 网络的每一层都对噪声功率进行更新, 而其他方法受噪声的影响较大。由图 5.7 可知, 所提深度展开 SBL 网络的 RMSE 低于其他方法的 RMSE, 这表明深度展开 SBL 网络的角度估计精度优于其他方法的角度估计精度。

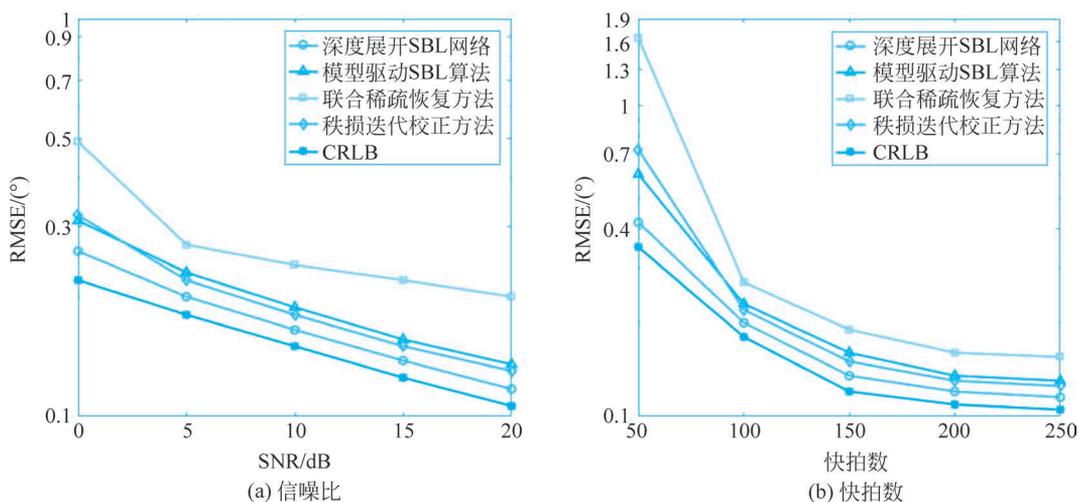


图 5.7 阵列互耦情况下不同方法的 RMSE

### 5.3 多径传播情况下的参数估计方法

多径传播场景如图 5.8 所示, 嵌套阵列接收信号中包含直达波和多径波, 由于直达波和多径波有很强的相干性, 需要建立相干信号数学模型对角度和功率的参数进行估计。本节提出的深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络分别将协方差向量和协方差矩阵作为网络的输入, 通过网络输出的空间谱对相干信号的角度和功率进行估计。

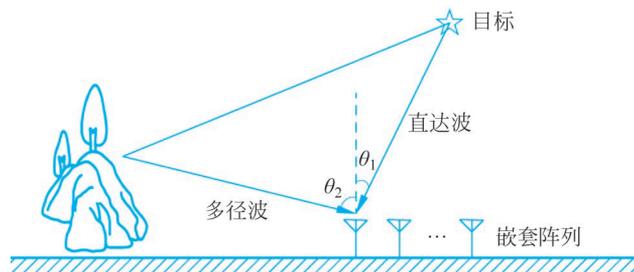


图 5.8 多径传播场景示意图

### 5.3.1 相干信号数学模型

根据式(2.11)中接收数据的信号模型,嵌套阵列在第  $n$  个快拍的相干信号接收数据可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \cdots \quad x_M(n)]^T \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(n) + \mathbf{w}(n) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n)\end{aligned}\quad (5.25)$$

其中,  $\mathbf{a}(\theta_k)$  表示第  $k$  个相干信号的导向向量,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_K)]$  表示由  $K$  个相干信号组成的导向矩阵,  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n) \quad s_2(n) \quad \cdots \quad s_K(n)]^T$  表示  $K$  个相干信号在第  $n$  个快拍的发射数据,  $\mathbf{w}(n) = [\omega_1(n) \quad \omega_2(n) \quad \cdots \quad \omega_M(n)]^T$  表示在第  $n$  个快拍接收的噪声。不同于式(2.12)中非相干信号的协方差矩阵,相干信号协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \\ &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}^2 & \sigma_{1,2}^2 & \cdots & \sigma_{1,K}^2 \\ \sigma_{2,1}^2 & \sigma_{2,2}^2 & \cdots & \sigma_{2,K}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{K,1}^2 & \sigma_{K,2}^2 & \cdots & \sigma_{K,K}^2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_M\end{aligned}\quad (5.26)$$

其中,  $\sigma_{k_1, k_2}^2 = E\{s_{k_1}(n) s_{k_2}^*(n)\} = (1/N) \sum_{n=1}^N s_{k_1}(n) s_{k_2}^*(n)$  表示第  $k_1$  个相干信号和第  $k_2$  个相干信号的相关函数,  $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, K$ 。当  $k_1 = k_2$  时,  $\sigma_{k_1, k_2}^2$  表示第  $k_1$  个相干信号的功率; 当  $k_1 \neq k_2$  时, 非相干信号的相关函数  $\sigma_{k_1, k_2}^2$  等于 0, 相干信号的相关函数  $\sigma_{k_1, k_2}^2$  不等于 0。

将相干信号的协方差矩阵进行向量化,可以得到协方差向量:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \text{vec}(\mathbf{R}) \\ &= [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_K] [\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \sigma_K^2]^T + \sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T\end{aligned}\quad (5.27)$$

其中,  $\boldsymbol{\eta}_m^T$  表示单位矩阵  $\mathbf{I}_M$  的第  $m$  列, 即第  $m$  个元素为 1, 其余元素为 0, 第  $k$  个分块矩阵  $\mathbf{B}_k$  可以表示为

$$\mathbf{B}_k = [\mathbf{a}^*(\theta_k) \otimes \mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}^*(\theta_k) \otimes \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}^*(\theta_k) \otimes \mathbf{a}(\theta_K)]\quad (5.28)$$

第  $k$  个分块功率  $\sigma_k^2$  可以表示为

$$\sigma_k^2 = [\sigma_{k,1}^2 \quad \sigma_{k,2}^2 \quad \cdots \quad \sigma_{k,K}^2]\quad (5.29)$$

将角度区域划分为  $Q$  个离散角度  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$ , 协方差向量  $\mathbf{y}$  的稀疏表示为

$$\mathbf{y} = \check{\Phi} \check{\mathbf{z}} + \sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_M^T]^T\quad (5.30)$$

其中,  $\check{\Phi}$  表示超完备词典:

$$\check{\Phi} = [\check{\Phi}_1 \quad \check{\Phi}_2 \quad \cdots \quad \check{\Phi}_Q]\quad (5.31)$$

第  $q$  个分块超完备词典  $\check{\Phi}_q$  可以表示为

$$\check{\Phi}_q = [\mathbf{a}^*(\theta_{q_1}) \otimes \mathbf{a}(\theta_{q_1}) \quad \mathbf{a}^*(\theta_{q_2}) \otimes \mathbf{a}(\theta_{q_2}) \quad \cdots \quad \mathbf{a}^*(\theta_{q_Q}) \otimes \mathbf{a}(\theta_{q_Q})] \quad (5.32)$$

$\mathbf{a}(\theta_{q_i})$  表示角度集合  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  中第  $q$  个角度对应的导向向量,  $\mathbf{z}$  表示  $Q^2$  维向量, 当第  $q_1$  个角度  $\theta_{q_1}$  和第  $q_2$  个角度  $\theta_{q_2}$  分别对应第  $k_1$  个相干信号角度  $\theta_{k_1}$  和第  $k_2$  个相干信号角度  $\theta_{k_2}$  时,  $\mathbf{z}$  的第  $(q_1-1) \times Q + q_2$  个元素为  $\sigma_{k_1, k_2}^2$ , 其余的元素为 0, 其中  $\theta_{q_1}, \theta_{q_2} \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}, \theta_{k_1}, \theta_{k_2} \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K\}$ 。

### 5.3.2 基于深度展开 FOCUSS 网络的参数估计方法

将相干信号协方差向量的稀疏表示  $\mathbf{y}$  转换到实数域, 可以得到:

$$\begin{bmatrix} \Re(\mathbf{y}) \\ \Im(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re(\check{\Phi}) & -\Im(\check{\Phi}) \\ \Im(\check{\Phi}) & \Re(\check{\Phi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{z}) \\ \Im(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Re(\sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T & \boldsymbol{\eta}_2^T & \cdots & \boldsymbol{\eta}_M^T]^T) \\ \Im(\sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T & \boldsymbol{\eta}_2^T & \cdots & \boldsymbol{\eta}_M^T]^T) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

由于  $\sigma_w^2$  和  $\mathbf{z}$  的元素表示噪声功率和相干信号功率, 其虚部  $\Im(\sigma_w^2)$  和  $\Im(\mathbf{z})$  均为 0。将  $[\Re(\mathbf{y}^T) \quad \Im(\mathbf{y}^T)]^T$  表示为  $\tilde{\mathbf{y}}, [\Re(\check{\Phi}^T) \quad \Im(\check{\Phi}^T)]^T$  表示为  $\check{\Psi}$ , 实数域的相干信号协方差向量可以表示为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \check{\Psi} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \sigma_w^2 [\boldsymbol{\eta}_1^T & \boldsymbol{\eta}_2^T & \cdots & \boldsymbol{\eta}_M^T]^T \\ \mathbf{0}_{M^2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

基于权重最小化范数准则, 相干信号角度和功率估计的优化问题可以转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{z}\|_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & \tilde{\mathbf{y}} = \check{\Psi} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (5.35)$$

其中,  $\boldsymbol{\Omega}$  表示权重矩阵。

多径传播情况下的深度展开 FOCUSS 网络结构如图 5.9 所示, 将模型驱动 FOCUSS 方法的迭代步骤转化为深度展开网络的隐藏层, 在前向传播过程中, 第  $l$  层输出可以计算为

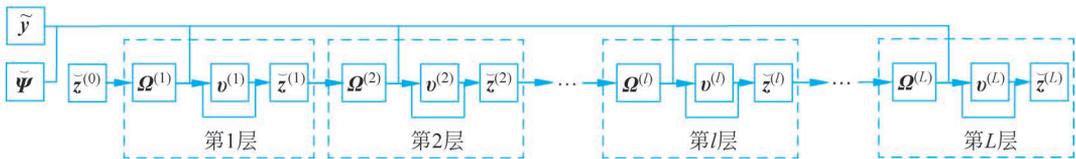


图 5.9 多径传播情况下的深度展开 FOCUSS 网络结构图

$$\boldsymbol{\Omega}^{(l)} = \text{diag}([\tilde{\mathbf{z}}^{(l-1)}]^\alpha) \quad (5.36)$$

$$\mathbf{v}^{(l)} = (\check{\Psi} \boldsymbol{\Omega}^{(l)})^T ((\check{\Psi} \boldsymbol{\Omega}^{(l)}) (\check{\Psi} \boldsymbol{\Omega}^{(l)})^T + \beta \mathbf{I}_{2M^2})^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \quad (5.37)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(l)} = \boldsymbol{\Omega}^{(l)} \mathbf{v}^{(l)} \quad (5.38)$$

其中,  $l=1, 2, \dots, L$ ,  $L$  表示深度展开网络的层数,  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示稀疏因子和正则化因子。在深度展开 FOCUSS 网络的训练开始前, 第 1 层的输入  $\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}$  为元素全为 1 的  $Q$  维向量。在训练过程中, 利用随机梯度下降方法对网络参数进行更新, 损失函数定义为

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\|(\boldsymbol{\Omega}_t^{(L)})^{-1} \boldsymbol{z}_t^{(L)}\|_2^2) \quad (5.39)$$

其中,  $t=1, 2, \dots, T$ ,  $T$  表示训练样本的数量,  $\boldsymbol{\Omega}_t^{(L)}$  和  $\boldsymbol{z}_t^{(L)}$  表示第  $t$  个训练样本输入至深度展开 FOCUSS 网络后的第  $L$  层的输出。可以看出, 损失函数只与网络的输出有关, 在网络的训练过程中没有使用标签(即训练样本对应的真实空间谱), 因此深度展开 FOCUSS 网络的训练可以视为无监督学习的过程。利用深度展开 FOCUSS 网络第  $L$  层的输出  $\boldsymbol{z}^{(L)}$ , 可以得到相干信号功率矩阵:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1^{(L)} & \tilde{\kappa}_2^{(L)} & \cdots & \tilde{\kappa}_Q^{(L)} \\ \tilde{\kappa}_{Q+1}^{(L)} & \tilde{\kappa}_{Q+2}^{(L)} & \cdots & \tilde{\kappa}_{2Q}^{(L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\kappa}_{(Q-1) \times Q+1}^{(L)} & \tilde{\kappa}_{(Q-1) \times Q+2}^{(L)} & \cdots & \tilde{\kappa}_{Q^2}^{(L)} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

通过功率矩阵对角线上的元素  $\tilde{\kappa}_{(q-1)Q+q}^{(L)}$  构成的向量可以得到相干信号的空间谱  $\boldsymbol{z}^{(L)} = [\tilde{\kappa}_1^{(L)} \quad \tilde{\kappa}_{Q+2}^{(L)} \quad \cdots \quad \tilde{\kappa}_{(q-1)Q+q}^{(L)} \quad \cdots \quad \tilde{\kappa}_{Q^2}^{(L)}]$ , 其中  $q=1, 2, \dots, Q$ , 通过谱峰的位置和数值可以对相干信号的角度和功率进行估计。

### 5.3.3 基于深度展开 IAA 网络的参数估计方法

从式(5.34)中可以看出, 实数域超完备词典的维度为  $2M^2 \times Q^2$ , 为了减小计算复杂度, 本节利用复数域的超完备词典对相干信号的角度和功率参数进行估计。在角度集合  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  下, 复数域超完备词典可以表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} &= [\boldsymbol{\varphi}(\theta_1) \quad \boldsymbol{\varphi}(\theta_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}(\theta_Q)] \\ &= [\boldsymbol{a}(\theta_1) \quad \boldsymbol{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}(\theta_Q)] \end{aligned} \quad (5.41)$$

其中,  $\boldsymbol{a}(\theta_q) = [a_1(\theta_q) \quad a_2(\theta_q) \quad \cdots \quad a_M(\theta_q)]^T$  表示  $\theta_q$  对应的导向向量, 其第  $m$  个元素为  $a_m(\theta_q) = \exp(-j(2\pi\xi_m \sin\theta_q/\lambda))$ 。可以看出, 复数域超完备词典的维度为  $M \times Q$ , 相较于 5.3.2 节通过  $M \times Q^2$  维的实数域的超完备词典对相干信号参数进行估计, 利用复数域的超完备词典能够大大减小计算复杂度。

根据 IAA 算法<sup>[216, 217]</sup>, 第  $q$  个角度对应的噪声协方差矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}_q = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{z}_q \boldsymbol{\varphi}(\theta_q) \boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \quad (5.42)$$

其中,  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{\Phi}^H$ ,  $\boldsymbol{Z} = \text{diag}([z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_Q])$ ,  $\boldsymbol{z}_q$  表示角度集合  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  中第  $q$  个角度对应的功率。根据最小二乘法, 目标函数可以表示为

$$\begin{aligned} \min J &= \sum_{n=1}^N \|\boldsymbol{x}(n) - s_q(n) \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)\|_{\boldsymbol{\Gamma}_q^{-1}}^2 \\ &= \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{x}(n) - s_q(n) \boldsymbol{\varphi}(\theta_q))^H \boldsymbol{\Gamma}_q^{-1} (\boldsymbol{x}(n) - s_q(n) \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)) \end{aligned} \quad (5.43)$$

其中,  $s_q(n)$  表示角度集合  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$  中第  $q$  个角度在第  $n$  个快拍的数据。当  $\partial J / \partial s_q(n) = 0$  时, 目标函数可以取得最小值,  $s_q(n)$  可以表示为

$$s_q(n) = \frac{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Gamma}_q^{-1} \mathbf{x}(n)}{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Gamma}_q^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)} \quad (5.44)$$

利用矩阵求逆定理,式(5.44)可进一步表示为

$$s_q(n) = \frac{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{x}(n)}{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)} \quad (5.45)$$

因此,角度集合 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q\}$ 中第 $q$ 个角度对应相干信号的功率可以计算为

$$\begin{aligned} z_q &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_q(n) s_q^*(n) \\ &= \frac{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Omega}^{-1}}{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)} \mathbf{R} \frac{(\boldsymbol{\Omega}^{-1})^H \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)}{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

其中,  $\mathbf{R} = (1/N) \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$  表示相干信号的协方差矩阵。通过式(5.42)和式(5.46)的循环迭代,利用空间谱  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_Q]$  的谱峰可以对相干信号的角度和功率进行估计。

多径传播情况下深度展开 IAA 网络结构如图 5.10 所示,网络共包含  $L$  层,将 IAA 算法的迭代步骤展开为网络的级联形式,在前向传播的过程中,第  $l$  层输出的协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}^{(l)}$  可计算为

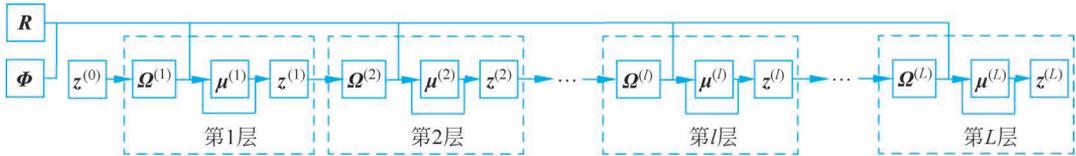


图 5.10 多径传播情况下深度展开 IAA 网络结构图

$$\boldsymbol{\Omega}^{(l)} = \boldsymbol{\Phi} \text{diag}(\mathbf{z}^{(l-1)}) \boldsymbol{\Phi}^H \quad (5.47)$$

其中,  $l=1, 2, \dots, L$ , 第 1 层的输入  $\mathbf{z}^{(0)}$  为全 1 的  $Q$  维向量。此外,第  $l$  层输出的第  $q$  个角度对应的加权向量  $\boldsymbol{\mu}_q^{(l)}$  可以计算为

$$\boldsymbol{\mu}_q^{(l)} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) (\boldsymbol{\Omega}^{(l)})^{-1}}{\boldsymbol{\varphi}^H(\theta_q) (\boldsymbol{\Omega}^{(l)})^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\theta_q)} \quad (5.48)$$

基于加权向量  $\boldsymbol{\mu}_q^{(l)}$ , 第  $l$  层输出  $\mathbf{z}^{(l)}$  的第  $q$  个角度可以计算为

$$z_q^{(l)} = \boldsymbol{\mu}_q^{(l)} \mathbf{R} (\boldsymbol{\mu}_q^{(l)})^H \quad (5.49)$$

其中,  $\mathbf{R}$  表示混合信号的协方差矩阵。

在深度展开 IAA 网络的训练过程中,利用随机梯度下降方法对网络参数进行更新,损失函数定义为

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\| \mathbf{z}_t^{(L)} - \mathbf{z}_t^{\text{label}} \|_2^2) \quad (5.50)$$

其中,  $t=1, 2, \dots, T$ ,  $T$  表示训练样本的数量,  $\mathbf{z}_t^{(L)}$  表示第  $t$  个训练样本对应的输出,  $\mathbf{z}_t^{\text{label}}$  表示第  $t$  个训练样本对应的标签。

### 5.3.4 仿真实验与分析

本节利用仿真实验来验证所提出的深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络对相干信号角度和功率估计的有效性和性能,其中嵌套阵列的 8 个阵元的位置设置为 $[1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20]d$ 。深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络使用相同的数据进行训练和测试,在深度展开网络的训练过程中,数据集中 80% 的样本用于网络的训练,20% 的样本用于网络的验证,每个样本由两个信号生成,其中信号角度为 $-60^\circ \sim 60^\circ$ ,功率为 $0 \sim 1$  dBm,信噪比为 $0 \sim 20$  dB,快拍数为 $50 \sim 300$  选择。在深度展开 FOCUSS 网络的训练过程中, Batch Size、Epoch 和 Learning Rate 分别设置为 16、10 和 0.01; 在深度展开 IAA 网络的训练过程中, Batch Size、Epoch 和 Learning Rate 分别设置为 16、20 和 0.01。

#### 1. 收敛性能分析

本节通过比较在训练过程中的 RMSE 以确定深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络中的最优层数,并对深度展开网络和相应的模型驱动算法的收敛性能进行了比较。

在深度展开网络的训练过程中,每个 Epoch 下的 RMSE 定义为

$$\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \| \mathbf{z}_t^{(L)} - \mathbf{z}_t^{\text{label}} \|_2^2} \quad (5.51)$$

其中, $t=1, 2, \dots, T$ ,  $T$  表示训练样本的个数, $\mathbf{z}_t^{(L)}$  表示深度展开网络输出的第  $t$  个训练样本的空间谱, $\mathbf{z}_t^{\text{label}}$  表示第  $t$  个训练样本对应空间谱的标签。

在深度展开网络的训练过程中, RMSE 随着 Epoch 的变化情况如图 5.11 和图 5.12 所示。对于深度展开 FOCUSS 网络,由图 5.11(a)可知,在训练过程中,4 层、5 层、6 层和 7 层的 RMSE 随着 Epoch 的增加逐渐减小,并且 7 层网络的 RMSE 小于其他层数网络的 RMSE,这表明 7 层网络的精度优于其他层数网络的精度。考虑到网络的计算复杂度与网络的层数呈正比关系,由于 7 层网络的 RMSE 略小于 6 层网络的 RMSE,为了平衡参数估计精度和计算复杂度,将深度展开 FOCUSS 网络设置为 6 层。此外,由图 5.11(b)可知,在验证过程中,4 层、5 层、6 层和 7 层网络的 RMSE 随着 Epoch 的增加逐渐减小,这表明在深度展开 FOCUSS 网络的训练过程中没有出现过拟合情况。

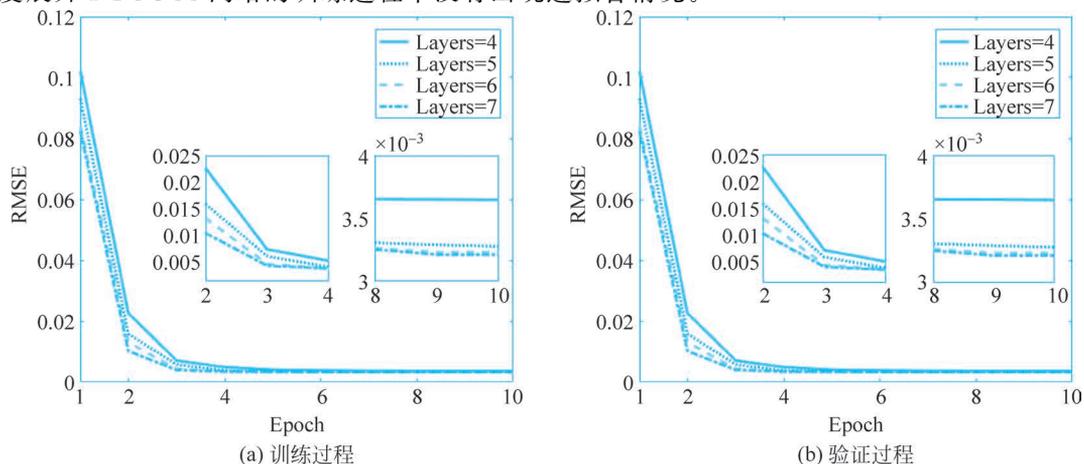


图 5.11 深度展开 FOCUSS 网络在不同层数下的 RMSE

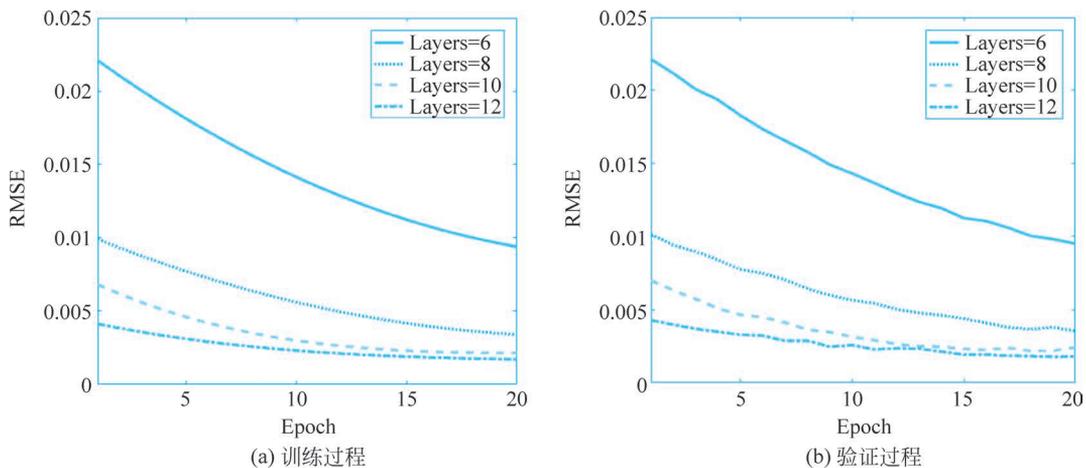


图 5.12 深度展开 IAA 网络在不同层数下的 RMSE

对于深度展开 IAA 网络,由图 5.12(a)可知,在训练过程中,6 层、8 层、10 层和 12 层的 RMSE 随着 Epoch 的增加逐渐减小,并且 12 层网络的 RMSE 小于其他层数网络的 RMSE,这表明 12 层网络的精度优于其他层数网络的精度。当深度展开 IAA 网络的训练过程完成后,10 层网络的 RMSE 略小于 12 层网络的 RMSE,为了平衡参数估计精度和计算复杂度,将深度展开 IAA 网络设置为 10 层。此外,由图 5.12(b)可知,在验证过程中,6 层、8 层、10 层和 12 层网络的 RMSE 随着 Epoch 的增加逐渐减小,这表明在深度展开 IAA 网络的训练过程中没有出现过拟合情况。

此外,在测试过程中,深度展开网络中的第  $l$  层或模型驱动算法中的第  $l$  次迭代的相对误差定义为

$$\frac{\|\mathbf{z}^{(l)} - \mathbf{z}^{(l-1)}\|_2}{\|\mathbf{z}^{(l)}\|_2} \quad (5.52)$$

其中,  $l=1,2,\dots,L$ ,  $L$  表示网络中的层数或模型驱动算法中的迭代次数。

当测试样本的角度设置为  $-10^\circ$  和  $30^\circ$ ,功率设置为 0.8dBm 和 1dBm 时,图 5.13 给出了相干信号参数估计的相对误差。由图 5.13(a)可知,相较于 6 层深度展开 FOCUSS 网络,模型驱动 FOCUSS 算法经过 12 次迭代达到收敛,由于深度展开 FOCUSS 网络中每一层的计算复杂度与模型驱动 FOCUSS 算法中每一次迭代的计算复杂度相同,因此深度展开 FOCUSS 网络可以在更短的时间内收敛,收敛速度提高了 2 倍。此外,由图 5.13(b)可知,相较于 10 层深度展开 IAA 网络,模型驱动 IAA 算法经过 16 次迭代达到收敛,因此深度展开 IAA 网络可以在更短的时间内收敛,收敛速度提高了 1.6 倍。

## 2. 泛化能力分析

本节对深度展开网络在不同相干信号个数情况下的泛化能力进行分析。由于训练样本是由两个相干信号生成的,为了验证 6 层深度展开 FOCUSS 网络和 10 层深度展开 IAA 网络的有效性,测试样本也由两个相干信号生成,相干信号的角度设置为  $-10^\circ$  和  $30^\circ$ ,功率设置为 0.8dBm 和 1dBm。通过深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络得到的空间谱分别如图 5.14(a)和图 5.14(b)所示,其中红点表示相干信号的角度和相应的功率设定值。由图 5.14 可知,通过谱峰所在位置可以估计出相干信号的角度,通过谱峰的数值可以估计

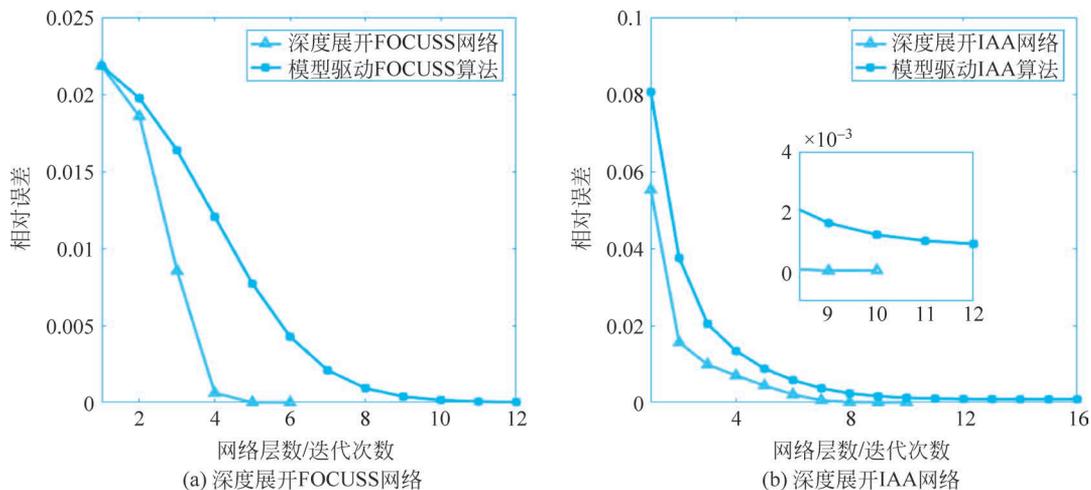


图 5.13 相干信号参数估计的相对误差

出相干信号的功率,从而验证了深度展开网络可以实现两个相干信号的角度和功率估计。此外,通过深度展开 IAA 网络得到的空间谱出现波动,这表明深度展开 IAA 网络的性能低于深度展开 FOCUSS 网络的性能。

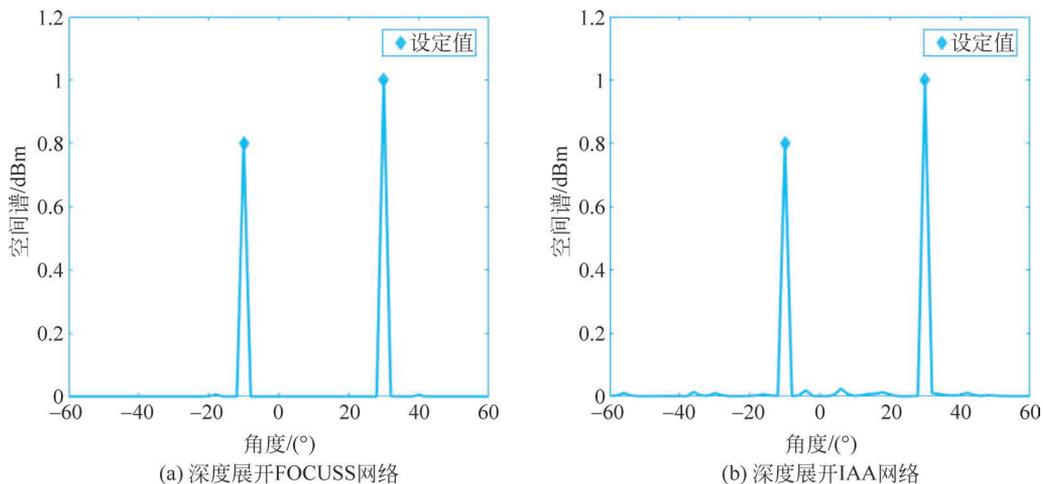


图 5.14 两个相干信号空间谱

为了证明深度展开网络的泛化能力,将测试样本中相干信号与训练样本中相干信号设置为不同数量。当一个信号的角度设置为 $-30^\circ$ ,功率设置为 $1\text{dBm}$ 时,深度展开网络输出的空间谱如图 5.15 所示;当 3 个相干信号的角度设置为 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 和 $30^\circ$ ,功率设置为 $0.8\text{dBm}$ 、 $0.6\text{dBm}$ 和 $1\text{dBm}$ 时,深度展开网络输出的空间谱如图 5.16 所示。由图 5.15 和图 5.16 可知,通过谱峰所在位置可以估计出相干信号的角度,通过谱峰的数值可以估计出相干信号的功率,从而验证了深度展开网络具有对不同个数相干信号进行参数估计的泛化能力。此外,通过深度展开 IAA 网络得到的空间谱出现波动,这表明深度展开 IAA 网络低于深度展开 FOCUSS 网络的性能。

### 3. 计算复杂度分析

本节对深度展开网络的计算复杂度进行分析。由于深度展开网络的每一层的计算过程

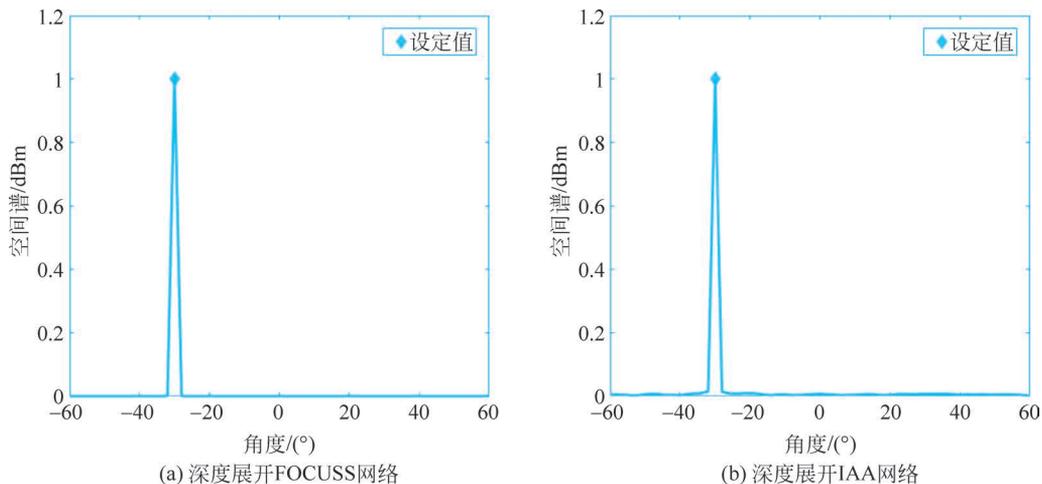


图 5.15 一个信号空间谱

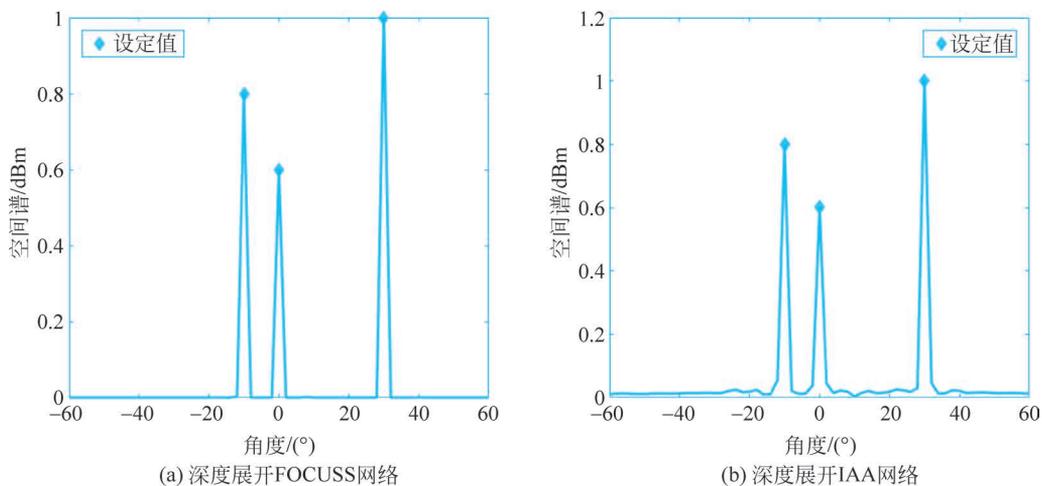


图 5.16 3 个相干信号空间谱

相同,因此计算复杂度与层数成正比关系。对于深度展开 FOCUSS 网络,网络的输入为实数域协方差向量,计算嵌套阵列下的协方差矩阵需要  $M^2 N$  次乘法运算和  $M^2(N-1)$  次加法运算,将嵌套阵列协方差矩阵进行向量化,并利用其实部与虚部转化为式(5.34)中实数域协方差向量的过程不需要额外的计算。对于深度展开 FOCUSS 网络的第  $l$  层,式(5.37)中  $\boldsymbol{v}^{(l)}$  的计算复杂度为  $O(2M^2 Q^4)$ ,并且需要对  $2M^2 \times 2M^2$  维的实矩阵进行求逆运算,式(5.38)中  $\boldsymbol{z}^{(l)}$  的计算复杂度为  $O(Q^2)$ ,式(5.36)中  $\boldsymbol{\Omega}^{(l)}$  需要进行指数运算。对于深度展开 IAA 网络的输入,网络的输入为复数域协方差矩阵,计算嵌套阵列下的协方差矩阵需要  $M^2 N$  次乘法运算和  $M^2(N-1)$  次加法运算,式(5.47)中  $\boldsymbol{\Omega}^{(l)}$  的计算复杂度为  $O(4M^2 Q^2)$ ,式(5.48)中  $\boldsymbol{\mu}^{(l)}$  的计算复杂度为  $O(4Q^2)$ ,并且需要对  $M \times M$  维的复矩阵进行求逆运算,式(5.49)中  $\boldsymbol{z}^{(l)}$  的计算复杂度为  $O(4Q^2)$ 。

在 CPU 为 Intel i5-337U 的环境下,表 5.2 给出了深度展开网络通过 100 次 Monte-Carlo 实验的平均计算时间,并与  $\ell_1$  范数奇异值分解方法<sup>[56]</sup>的平均计算时间进行了对比。测试样本包含两个相干信号,角度设置为  $-10^\circ$  和  $30^\circ$ ,功率设置为 0.8dBm 和 1dBm。由于深度展开网络每一层的计算复杂度和模型驱动算法的每一次迭代的计算复杂度相同,深度

神经网络能够利用较少的层数实现收敛,从而所需时间较短。此外,相较于深度展开 FOCUSS 网络中超完备词典的维度为  $2M^2 \times Q^2$ ,深度展开 IAA 网络中超完备词典的维度为  $M \times Q$ ,因此,深度展开 IAA 网络的计算复杂度相对更低,所需计算时间更少。

表 5.2 相干信号参数估计的计算时间对比

相干信号参数估计方法	计算时间/s
深度展开 FOCUSS 网络	0.890
模型驱动 FOCUSS 网络	1.817
深度展开 IAA 网络	0.159
模型驱动 IAA 网络	0.326
$\ell_1$ 范数奇异值分解	2.241

#### 4. 估计精度分析

本节通过 500 次 Monte-Carlo 实验得到的 RMSE 对深度展开网络的估计精度进行分析,并与  $\ell_1$  范数奇异值分解方法<sup>[56]</sup>的参数估计精度进行了对比。参数估计的 RMSE 定义为

$$\sqrt{\frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \|\hat{\mathbf{z}}_v - \mathbf{z}\|_2^2} \quad (5.53)$$

其中,  $V$  表示 Monte-Carlo 实验次数,  $\mathbf{z}$  表示相干信号真实的空谱,  $\hat{\mathbf{z}}_v$  表示第  $v$  次 Monte-Carlo 实验中得到的空谱。

测试样本包含两个相干信号,角度设置为  $-10^\circ$  和  $30^\circ$ ,功率设置为 0.8dBm 和 1dBm。相干信号参数估计的 RMSE 如图 5.17 所示,当快拍数设置为 200 时,图 5.17(a)给出了在不同信噪比下的 RMSE;当信噪比设置为 10dB 时,图 5.17(b)给出了在不同快拍数下的 RMSE,其中红线、蓝线、绿线、洋红线和黑线分别代表基于深度展开 FOCUSS 网络的 RMSE、基于模型驱动 FOCUSS 算法的 RMSE、基于深度展开 IAA 网络的 RMSE、基于模型驱动 IAA 算法的 RMSE 以及  $\ell_1$  范数奇异值分解方法的 RMSE。由图 5.17 可知,随着信噪比和快拍数的增加, RMSE 逐渐减小,  $\ell_1$  范数奇异值分解方法的参数估计性能相对较差,

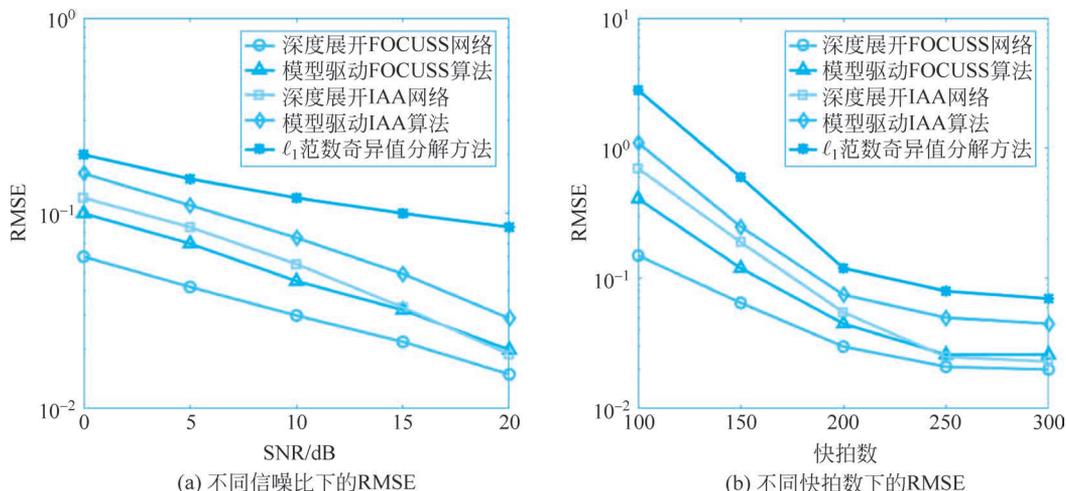


图 5.17 相干信号参数估计的 RMSE

深度展开 FOCUSS 网络和深度展开 IAA 网络的参数估计精度分别高于模型驱动 FOCUSS 算法和模型驱动 IAA 算法的参数估计精度,并且深度展开 FOCUSS 网络的参数估计精度高于深度展开 IAA 网络的参数估计精度。

### 5.3.5 实测数据验证

本节通过 MIMO 雷达和超表面获取实测数据,对所提基于深度展开网络的相干信号参数估计方法进行验证。

#### 1. MIMO 雷达接收数据的相干信号参数估计结果

通过 MIMO 雷达获取相干信号实测数据的实验场景如图 5.18 所示,将角反射器 1 和角反射器 3 放置在相同的距离单元,可以将其等效为相干窄带信号。

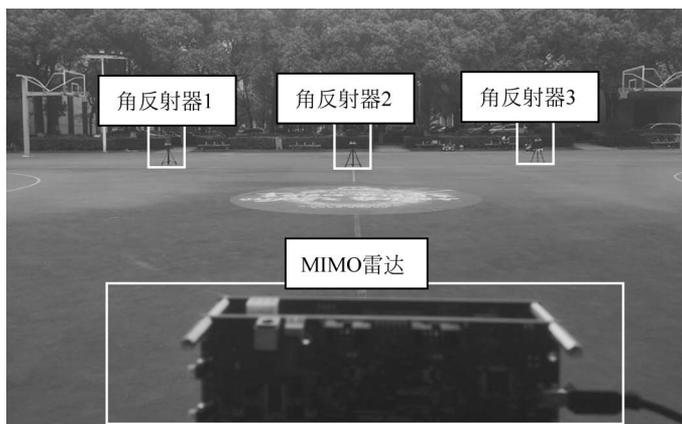


图 5.18 MIMO 雷达接收相干信号实验场景

在数据处理过程中,将第 1、2、3、4、8、12 个接收通道的信号分别与第 1 个发射通道的信号进行匹配滤波,并计算匹配滤波数据的协方差矩阵。利用实数域的相干信号协方差向量,通过深度展开 FOCUSS 网络得到的实测数据处理结果如图 5.19(a)所示;利用复数域的相干信号协方差矩阵,通过深度展开 IAA 网络得到的实测数据处理结果如图 5.19(b)所示。由图 5.19 可知,利用网络输出的空间谱可以实现相干信号的角度和功率估计,通过深度展开 FOCUSS 网络得到 3 个角反射器的角度分别为  $-18^\circ$ 、 $0^\circ$  和  $18^\circ$ ,功率分别为 19.59dBm、21.75dBm 和 19.79dBm。通过深度展开 IAA 网络得到 3 个角反射器的角度分别为  $-18^\circ$ 、 $0^\circ$  和  $18^\circ$ ,功率分别为 19.59dBm、21.76dBm 和 19.79dBm。

#### 2. 超表面接收数据的相干信号参数估计结果

通过超表面获取相干信号实测数据的实验场景如图 5.20 所示,在实验中将两个信号设置为相同的频率和功率。

在数据处理过程中,利用实数域的相干信号协方差向量,通过深度展开 FOCUSS 网络得到的实测数据处理结果如图 5.21(a)所示;利用复数域的相干信号协方差矩阵,通过深度展开 IAA 网络得到的实测数据处理结果如图 5.21(b)所示。可以看出,利用网络输出的空间谱可以实现相干信号的角度和功率估计,通过深度展开 FOCUSS 网络得到的角度分别为  $-20^\circ$  和  $22^\circ$ ,功率分别为 8.19dBm 和 8.22dBm。通过深度展开 IAA 网络得到的角度分别为  $-20^\circ$  和  $22^\circ$ ,功率分别为 8.18dBm 和 8.23dBm。

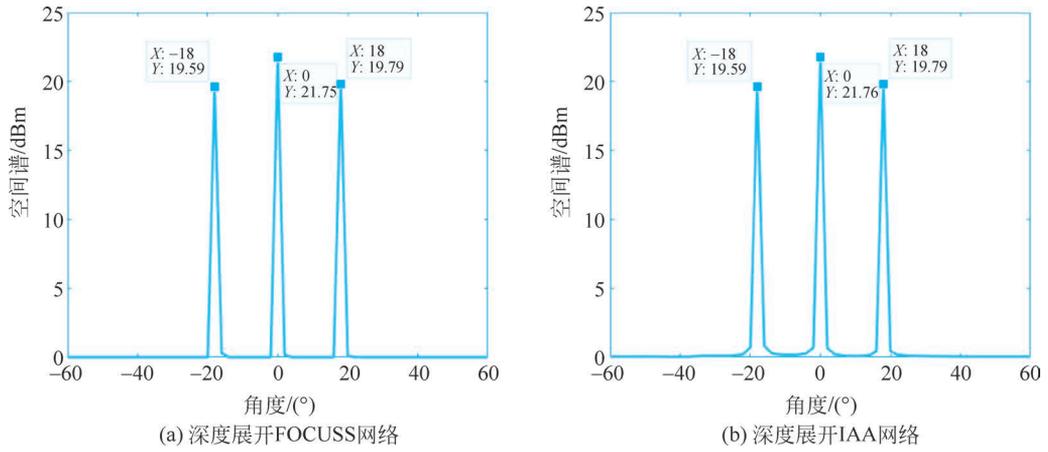


图 5.19 MIMO 雷达接收相干信号实测数据处理结果

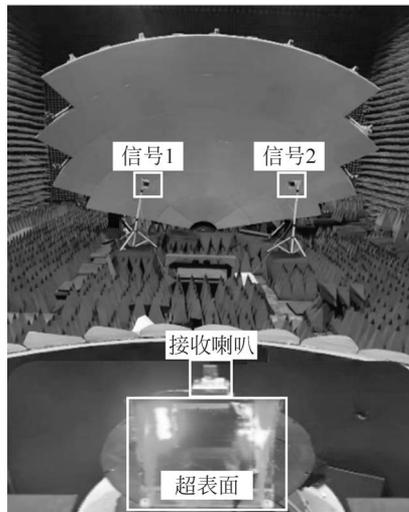


图 5.20 超表面接收相干信号实验场景

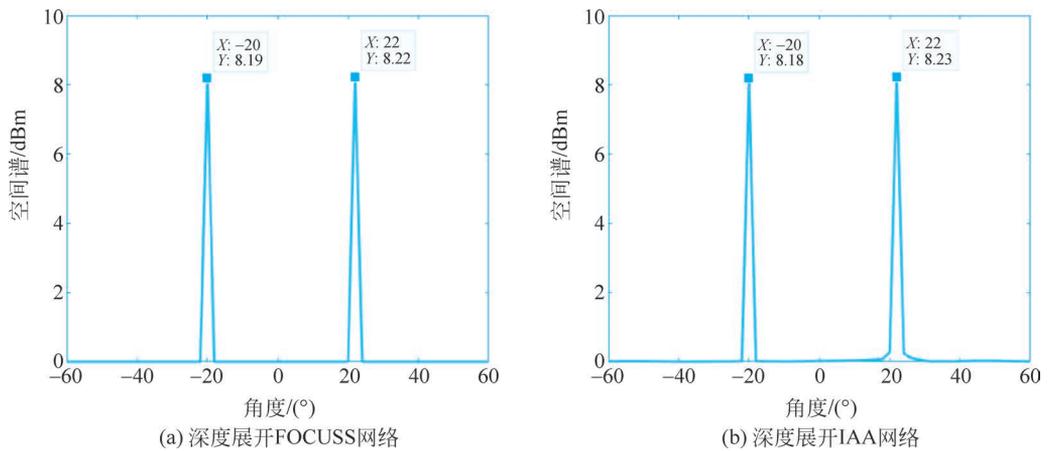


图 5.21 超表面接收相干信号实测数据处理结果

## 5.4 本章小结

本章针对非理想情况下的信号参数估计问题,通过将稀疏重构方法的迭代过程展开为神经网络的级联形式,实现嵌套阵列下的远场信号参数估计,所取得的研究成果主要包括:

(1) 提出了阵列互耦情况下的基于深度展开 SBL 网络的参数估计方法,该方法首先对包含互耦系数的嵌套阵列协方差矩阵进行向量化处理,形成由连续虚拟阵元构成的实数域协方差向量,接着将期望最大化方法的迭代步骤转化为神经网络的级联形式,通过对网络训练实现嵌套阵列的互耦系数估计,利用网络输出的空间谱实现信号的角度估计;实验结果表明,相较于模型驱动 SBL 算法,所提深度展开 SBL 网络能够提高信号的角度估计精度,并且具有在欠定情况下进行角度估计的泛化能力。

(2) 提出了基于深度展开 FOCUSS 网络的相干信号参数估计方法,该方法利用实数域的相干信号协方差向量,将原始模型驱动算法的迭代过程转化为深度展开网络的隐藏层,利用网络输出的空间谱实现相干信号的角度和功率估计。实验结果表明,相较于模型驱动 FOCUSS 算法,深度展开 FOCUSS 网络可以在更短的时间内收敛,收敛速度提高了 2 倍。此外,所提深度展开 FOCUSS 网络能够提高相干信号参数估计精度,并且具有对不同个数信号进行参数估计的泛化能力。

(3) 提出了基于深度展开 IAA 网络的相干信号参数估计方法,该方法利用复数域的相干信号协方差矩阵,将原始模型驱动算法的迭代过程转化为深度展开网络的隐藏层,利用网络输出的空间谱实现相干信号的角度和功率估计。实验结果表明,相较于基于深度展开 FOCUSS 网络的参数估计方法,深度展开 IAA 网络能够降低相干信号参数估计的计算复杂度;相较于模型驱动 IAA 算法,深度展开 IAA 网络的收敛速度提高了 1.6 倍,并且能够提高相干信号角度和功率的估计精度。