第一章

函数的概念及其表示

第一节　函数的概念

题型 1　函数关系判断

1. 函数的定义

一般地，设 A,B 是非空的数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x),x\in A$. 其中 x 叫作自变量，x 的取值集合 A 叫作函数的定义域. 与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫作函数的值域.

2. 函数的四个特性

(1) 非空性：定义域与值域必须为非空数集(注意不仅是非空集合，还得是数集)，定义域或值域为空集的函数是不存在的. 例如，$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ 不是函数.

(2) 任意性：定义域中的每一个元素都有函数值. 若 $A=B=\{-1,0,1\}$，$f:y=\dfrac{1}{x}$，则集合 A 中的数 0 在集合 B 中没有数与它对应，所以 f 不符合函数的定义.

(3) 单值性：自变量的每一个值有且仅有唯一的函数值与之对应(可以多对一，不能一对多). 图 1.1 中的映射是多对一的，集合 B 中的数 2 可以没有原象，所以图 1.1 中的映射是一个函数；图 1.2 中的映射是一对多，集合 A 中数 1 对应两个数 1,2，所以图 1.2 中的映射不是函数.

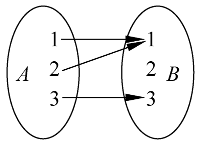


图 1.1

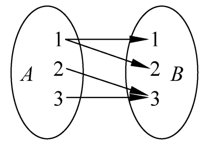


图 1.2

(4) 方向性：函数是从定义域到值域的对应关系，如果改变这个对应方向，那么新的对应关系不一定是函数关系.

【例 1】 已知 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,1,\sqrt{2},2,4\}$，下列对应关系不能作为从 A 到 B 的函数的是(　　)

A. $f:x\rightarrow y=\sqrt{x}$　　　　B. $f:x\rightarrow y=x^2$

C. $f:x\rightarrow y=\dfrac{1}{x}$　　　　D. $f:x\rightarrow y=|x|$

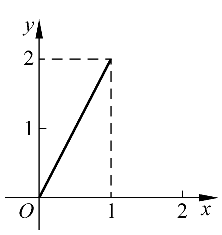
【详解】 对于 A，集合 A 的元素 0，1，2 分别对应 B 中的唯一元素 0，1，$\sqrt{2}$，A 能；对于 B，集合 A 的元素 0，1，2 分别对应着 B 中的唯一元素 0，1，4，B 能；对于 C，集合 A 的元素 0 在 B 中没有元素与之对应，C 不能；对于 D，集合 A 的元素 0，1，2 分别对应 B 中的唯一元素 0，1，2，D 能. 故选 C.

【例 2】 已知集合 $M=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 4\}$，$N=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$，下列对应关系能够构成从 M 到 N 的函数的是(　　)

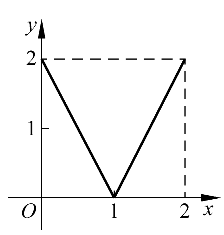
A. $f:x\rightarrow\sqrt{x}$　　B. $f:x\rightarrow x^2$　　C. $f:x\rightarrow|x|$　　D. $f:x\rightarrow x-1$

【详解】 对于 $f:x\rightarrow\sqrt{x}$，当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$0\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2$，对于任意 $x\in M=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 4\}$，在 $N=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$ 中都存在唯一确定的元素与之对应，满足函数定义，A 正确；对于 $f:x\rightarrow x^2$，当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$0\leqslant x^2\leqslant 16$；当 $\sqrt{2}<x\leqslant 4$ 时，在 $N=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$ 中无元素与之对应，不满足函数定义，B 错误；对于 $f:x\rightarrow|x|$，当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$0\leqslant|x|\leqslant 4$；当 $2<x\leqslant 4$ 时，在 $N=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$ 中无元素与之对应，不满足函数定义，C 错误；对于 $f:x\rightarrow x-1$，当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$-1\leqslant x-1\leqslant 3$；当 $0\leqslant x<1$ 或 $3<x\leqslant 4$ 时，在 $N=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$ 中无元素与之对应，不满足函数定义，D 错误. 故选 A.

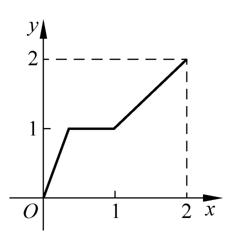
【例 3】 下列四个图形中，不是函数图像的是(　　)



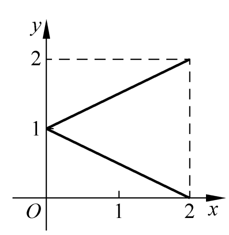
A.



B.



C.



D.

【详解】 对于选项 A,B,C 中的图像,每一个 x 的取值均有唯一的 y 值与其对应,符合函数定义,则 A,B,C 中图像均为函数图像;对于选项 D,每一个 $x\in(0,2]$的取值,都有两个 y 值与其对应,不符合函数的定义,则 D 中图像不是函数图像. 故选 D.

同步 练习

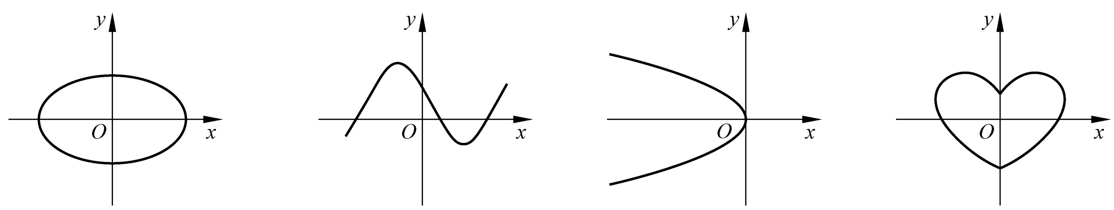
【练 1】 下列对应关系是集合 $M=\{-1,2,4\}$到集合 $N=\{1,2,4,16\}$的函数的是(　　)

A. $y=2x$　　B. $y=x+2$　　C. $y=x^2$　　D. $y=2^x$

【练 2】 设 $f:x\to y=x^2$ 是集合 A 到集合 B 的函数,如果集合 $B=\{1\}$,那么集合 A 不可能是(　　)

A. $\{1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0\}$

【练 3】 下列图形中,可以表示函数 $y=f(x)$的是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

题型 2　两类求值

两类求值包括:(1)已知对应关系,求某自变量的函数值;(2)已知某自变量的函数值,根据对应关系求自变量.

【例 4】 已知函数 $f(x)=1-x^3$,则 $f(-2)=$(　　)

A. -7　　B. 7　　C. -5　　D. 9

【详解】 因为 $f(x)=1-x^3$,将 $x=-2$ 代入得 $f(-2)=1-(-2)^3=9$. 故选 D.

【例 5】 已知 $f(x)=3^x-x^2$,则 $f[f(1)]=$________.

【详解】 由解析式知,$f(1)=3^1-1^2=2$,则 $f[f(1)]=f(2)=3^2-2^2=5$. 故答案为 5.

【例 6】 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$,若 $f(a)=1$ 则 a 的值为________.

【详解】 由 $f(a)=a^2+a-1=1$,解方程得 $a=-2$ 或者 $a=1$,故答案为-2 或 1.

【例 7】 已知函数 $f(x)=2x-4$,若 $f(2a^2-1)=10$,则 a 的值等于(　　).

A. 2　　B. -2　　C. ±2　　D. ±4

【详解】 将 $x=2a^2-1$ 代入解析式得 $f(2a^2-1)=2(2a^2-1)-4=10$,则 $a^2=4$,解得 $a=\pm2$. 故选 C.

同步练习

【练 4】 已知函数 $f(x)=2x^2+x$，则 $f(3)=$________.

【练 5】 已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)=2x-3$，$g(x)=3x$，则 $f[g(-1)]=$________.

【练 6】 已知 $f(x)=-5x+3$，且 $f(a)=8$，则 a 的值为________.

【练 7】 若 $f(x)=ax^2-\sqrt{2}$，a 为一个正的常数，且 $f[f(\sqrt{2})]=-\sqrt{2}$，则 a 的值为________.

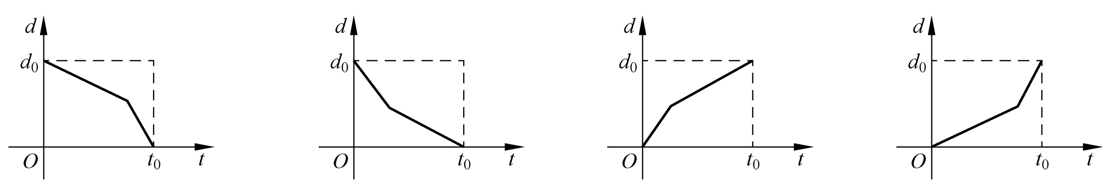
题型 3 函数的表示方法

函数的表示方法：解析式法、列表法、图像法.

【例 8】 一司机驾驶汽车从甲地去乙地，他以 80km/h 的平均速度用了 4h 到达乙地. 当他按照原路返回时，汽车的速度 v 与时间 t 的函数关系式是________.

【详解】 因为他以 80km/h 的平均速度用了 4h 到达乙地，所以甲乙两地之间的路程为 $80\times4=320$(km)，则当他按照原路返回时，速度 $v=\dfrac{320}{t}$(km/h). 故答案为 $v=\dfrac{320}{t}(t>0)$.

【例 9】 某学生从家出发去学校，走了一段时间后，由于怕迟到，就开始跑步. 四个选项中纵轴表示该学生离自己家的距离，横轴表示出发后的时间，则比较符合该学生走法的是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

【详解】 一开始离自己家的距离最小，故 AB 错误；一开始学生在走，所以在较短的时间内离家的距离增加得较慢，之后学生开始跑，所以离学校的距离增加得较快(倾斜程度越陡越快)，故 C 错误，D 正确. 故选 D.

【例 10】 对于函数 $y=f(x)$，部分 x 与 y 的对应关系如下表所示：

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	4	5	8	1	3	4

则 $f[f(1)]$值为(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【详解】 由表格可得 $f(1)=7$，所以 $f[f(1)]=f(7)=4$. 故选 C.

同步练习

【练 8】 购买某种饮料 x 听，所需钱数为 y 元.若每听 2 元，用解析法将 y 表示成 $x(x\in\{1,2,3,4\})$的函数为________.

【练 9】 某工厂 8 年来某产品产量 y 与时间 t 的函数关系如图 1.3 所示，则以下说法中正确的是(　　)

A. 前 2 年的产品产量增长速度越来越快

B. 前 2 年的产品产量增长速度越来越慢

C. 第 2 年后，这种产品停止生产

D. 第 2 年后，这种产品产量保持不变

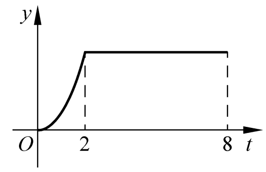


图 1.3

【练 10】 已知函数 $f(x)$，$g(x)$分别由下表给出，若 $f[g(a)]=2$，则 a 的值可以是(　　)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	1	2
$g(x)$	3	4	1	4

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

题型 4　相等函数

一般地，如果两个函数的定义域相同，对应关系也相同，则这两个函数是同一个函数.定义域、值域、解析式在后续章节有详细的讲解，这里只介绍几个比较简单的题目.

【例 11】 与函数 $y=\sqrt{-x^3}$ 相同的函数是(　　)

A. $y=x\sqrt{-x}$　　B. $y=-\sqrt{x^3}$

C. $y=-x\sqrt{-x}$　　D. $y=-|x|\sqrt{|x|}$

【详解】 由 $-x^3\geqslant 0$ 得 $x\leqslant 0$，所以 $y=\sqrt{-x^3}=\sqrt{-x\cdot x^2}=|x|\sqrt{-x}=-x\sqrt{-x}\ (x\leqslant 0)$.故选 C.

【例 12】 下列各组中的函数 $f(x)$，$g(x)$表示同一函数的是(　　)

A. $f(x)=x-2,g(x)=(\sqrt{x-2})^2$　　B. $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

C. $f(x)=(\sqrt{x})^2,g(x)=\sqrt{x^2}$　　D. $f(x)=x,g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

【详解】 选项 A，定义域不同，不是同一函数；选项 B，定义域不同，不是同一函数；选项 C，定义域不同，对应关系也不同，不是同一函数；选项 D，定义域、值域、对应关系都相同，是同一函数，故选 D.

同步 练习

【练 11】 下列函数中与函数 $y=x$ 相同的函数是(　　)

A. $y=(\sqrt{x})^2$　　B. $y=\sqrt[3]{x^3}$　　C. $y=\dfrac{x^2}{x}$　　D. $y=\sqrt{x^2}$

【练 12】 下列四组函数中是同一个函数的是(　　)

A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$

B. $f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

C. $f(n)=2n-1, g(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$

D. $f(x)=x^2-2x-1, g(t)=t^2-2t-1$

同步练习参考答案

【练 1】 对于 A,按照对应关系 $y=2x$,集合 M 中的元素 -1 在集合 N 中没有元素与之对应,A 不是;
对于 B,按照对应关系 $y=x+2$,集合 M 中的元素 4 在集合 N 中没有元素与之对应,B 不是;
对于 C,按照对应关系 $y=x^2$,集合 M 中的每个元素在集合 N 中都有唯一元素与之对应,C 是;
对于 D,按照对应关系 $y=2^x$,集合 M 中的元素 -1 在集合 N 中没有元素与之对应,D 不是. 故选 C

【练 2】 由题意得 $x^2=1$,解得 $x=1$ 或 $x=-1$,所以集合 A 可以为 $\{1\},\{-1\},\{-1,1\}$,故选 D.

【练 3】 通过平移直线 $x=t$,只有选项 B 的图像满足和直线 $x=t$ 至多有一个交点. 故选 B.

【练 4】 由 $f(x)=2x^2+x$,可得 $f(3)=2\times3^2+3=21$. 故答案为 21.

【练 5】 依题意,$g(-1)=-3$,所以 $f[g(-1)]=f(-3)=2\times(-3)-3=-9$. 故答案为 -9.

【练 6】 因为 $f(x)=-5x+3$,且 $f(a)=8$,所以 $-5a+3=8$,解得 $a=-1$. 故答案为 -1.

【练 7】 因为 $f(\sqrt{2})=a\sqrt{2}^2-\sqrt{2}=2a-\sqrt{2}$,所以 $f[f(\sqrt{2})]=f(2a-\sqrt{2})=a(2a-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$,于是 $a(2a-\sqrt{2})^2=0$,因为 a 为一个正的常数,所以 $(2a-\sqrt{2})^2=0$,即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故答案为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【练 8】 根据题意数量与总价成正比例关系,可得 $y=2x$,$x\in\{1,2,3,4\}$,故答案为 $y=2x,x\in\{1,2,3,4\}$.

【练 9】 由给定的年产量 y 与时间 t 的函数关系图可知前 2 年的产品产量增长速度越来越快,所以 A 正确,B 不正确;第 2 年后,这种产品的年产量保持不变,所以 C 错误,D 正确. 故选 AD.

【练 10】 因为 $g(1)=3$,所以 $f[g(1)]=f(3)=1$;因为 $g(2)=4$,所以 $f[g(2)]=f(4)=2$;因为 $g(3)=1$ 所以 $f[g(3)]=f(1)=2$;因为 $g(4)=4$,所以 $f[g(4)]=f(4)=2$. 故选 BCD.

【练 11】 对于 A,$y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,而 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域$[0,+\infty)$,故两者不是相等函数,故 A 错误;对于 B,$y=\sqrt[3]{x^3}=x$ 定义域为 $\mathbf{R}$,则其与 $y=x$ 为相等函数,故 B 正确;对于 C,$y=\dfrac{x^2}{x}$的定义域为$\{x\mid x\neq0\}$,而 $y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,故两者不是相等函数,故 C 错误;对于 D,$y=\sqrt{x^2}=|x|$与 $y=x$ 的对应法则不同,故两者不是相等函数,故 D 错误. 故选 B.

【练 12】 对于 A,函数 $f(x)=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,函数 $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为$[0,+\infty)$,则两函数的定义域不同,所以不是同一函数,故 A 错误;对于 B,函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$,两函数定义域相同,且对应关系也相同,所以为同一函数,故 B 正确;对于 C,函数 $f(n)=2n-1$ 与 $g(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$的对应关系不相同,所以两函数不是同一函数,故 C 错误;对于 D,函数 $f(x)=x^2+3x-1$ 与 $g(t)=t^2+3t-1$ 的定义域相同,且对应关系也相同,所以两函数为同一函数,故 D 正确. 故选 BD.

第二节　函数的定义域

题型 1　偶次根式型

求函数 $f(x)=\sqrt{g(x)}$ 的定义域，只需求解不等式 $g(x)\geqslant 0$，其解集就是 $f(x)$ 的定义域.

【例 1】 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+x^2$ 的定义域为________.

【详解】 由 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$. 故答案为 $[-1,1]$.

【例 2】 函数 $f(x)=\sqrt{2-2x-x^2}$ 的定义域为(　　)

A. $[-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}]$

B. $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$

C. $[1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}]$

D. $(-\infty,-1-\sqrt{3}]\cup[-1+\sqrt{3},+\infty)$

【详解】 令 $2-2x-x^2\geqslant 0$，解得 $x\in[-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}]$. 故选 A.

同步练习

【练 1】 函数 $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}-2x+1$ 的定义域为________.

【练 2】 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ 的定义域为________.

题型 2　分式型

分式中分母不能为零.

【例 3】 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是________.

【详解】 令 $\begin{cases}x^2-4\neq 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$，解得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq -2$，故定义域是 $(-\infty,-2)\cup(-2,1]$. 故答案为 $(-\infty,-2)\cup(-2,1]$.

【例 4】 函数 $y=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{9-x^2}}$ 定义域为________.

【详解】 由题知 $9-x^2>0$，解得 $-3<x<3$，所以函数的定义域为 $(-3,3)$，故答案为 $(-3,3)$.

同步练习

【练 3】 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}$ 的定义域为________.

【练 4】 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}+1}$ 的定义域为________.

题型 3 绝对值型

求解绝对值不等式要将不等式的绝对值去掉，进行同解变形. 求定义域涉及的绝对值不等式等价变换如下：

$[|f(x)|>g(x)]$ 与 $[f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)]$ 同解；

$[|f(x)|<g(x)]$ 与 $[-g(x)<f(x)<g(x)]$ 同解.

【例 5】 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{|x|-3}$ 的定义域为________.

【详解】 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{|x|-3}$ 的定义域满足 $x-2\geqslant 0$ 且 $|x|-3\neq 0$，解得 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq 3$. 故答案为 $[2,3)\cup(3,+\infty)$.

【例 6】 函数的定义域是指自变量的取值范围，则函数 $y=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{3-|x|}}$ 的定义域为________.

【详解】 根据题意，要使函数有意义，需满足 $3-|x|>0$，即 $|x|<3$，解得 $-3<x<3$，所以函数的定义域为 $\{x|-3<x<3\}$. 故答案为 $(-3,3)$.

同步练习

【练 5】 函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{|x-3|}$ 的定义域是________.

【练 6】 函数 $y=\sqrt{3-|2x+1|}$ 的定义域是________.

题型 4 零次幂型

求函数 $f(x)=[g(x)]^0$ 的定义域，只需求解不等式 $g(x)\neq 0$，其解集就是 $f(x)$ 的定义域.

【例 7】 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+(3-x)^0$ 的定义域是(　　)

A. $[1,3)$　　B. $(3,+\infty)$

C. $(1,3)\cup(3,+\infty)$　　D. $[1,3)\cup(3,+\infty)$

【详解】 令 $\begin{cases}x-1>0\\3-x\neq 0\end{cases}$,解得 $x>1$ 且 $x\neq 3$,故 $f(x)$的定义域是$(1,3)\cup(3,+\infty)$. 故选 C.

【例 8】 函数 $y=\frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$的定义域是________.

【详解】 解不等式$\begin{cases}x+1\neq 0\\|x|-x>0\end{cases}$,即$\begin{cases}x\neq -1\\|x|>x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x<0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$. 故答案为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

同步练习

【练 7】 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-x}}+(x-1)^0$ 的定义域为________.

【练 8】 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}}+(x-2)^0$ 的定义域为________.

题型 5　定义域为 R 求参型

对于函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的定义域为 **R**,求参数范围的问题. 若 $a\neq 0$ 则只需解方程组$\begin{cases}a>0\\\Delta\leqslant 0\end{cases}$; 若 $a=0$,则需单独讨论.

【例 9】 若函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{ax^2+x+1}}$的定义域为 **R**,则实数 a 的取值范围是________.

【详解】 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{ax^2+x+1}}$的定义域为 **R**,则 $ax^2+x+1>0$ 恒成立. 当 $a=0$ 时,$x+1>0$,解得 $x>-1$,不符合要求,故舍去; 当 $a\neq 0$ 时,$\begin{cases}a>0\\1-4a<0\end{cases}$,解得 $a>\frac{1}{4}$. 综上,$a>\frac{1}{4}$. 故答案为$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.

【例 10】 已知函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+mx+1}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，则 m 的取值范围是________.

【详解】 因为函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+mx+1}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，所以不等式 $mx^2+mx+1\geqslant 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故当 $m=0$ 时，$1>0$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，符合题意；当 $m\neq 0$ 时，$\begin{cases}m>0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m>0\\ m^2-4m\leqslant 0\end{cases}$，解不等式组得 $0<m\leqslant 4$. 综上，实数 m 的取值范围是 $0\leqslant m\leqslant 4$. 故答案为 $[0,4]$.

同步练习

【练 9】 若函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2+ax+2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为________.

【练 10】 已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+2ax+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为________.

题型 6 抽象函数型

抽象函数是指不知道具体解析式的函数. 对于函数 $f[\varphi(x)]$ 与 $f[\omega(x)]$，其关联性仅体现为具有相同的对应法则. 求解定义域问题时需把握两个原则：

(1) 各函数的定义域由其自变量的取值范围决定(不同函数中的自变量 x 相互独立).

(2) 复合函数中内层函数的值域须保持一致(即 $\varphi(x)$ 与 $\omega(x)$ 的取值范围相同).

【例 11】 函数 $f(x)$ 定义域是 $[-3,1]$，则 $f(2x+1)$ 定义域是________.

【详解】 因为 $f(x)$ 定义域是 $[-3,1]$，所以 $f(2x+1)$ 的 $-3\leqslant 2x+1\leqslant 1$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 0$，故填 $[-2,0]$.

【例 12】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，则函数 $f(x^2)-f(1-x)$ 的定义域为________.

【详解】 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，所以 $\begin{cases}0<x^2\leqslant 1\\ 0<1-x\leqslant 1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-1\leqslant x<0 \text{ 或 } 0<x\leqslant 1\\ 0\leqslant x<1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$，所以函数 $f(x^2)-f(1-x)$ 的定义域为 $(0,1)$. 故答案为 $(0,1)$.

【例 13】 已知函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $[-1,2]$，则 $f(1-3x)$ 的定义域为________.

【详解】 因为函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $[-1,2]$，即 $x\in[-1,2]$，则 $x-1\in[-2,1]$，故 $1-3x\in[-2,1]$，解得 $x\in[0,1]$，所以函数 $f(1-3x)$ 的定义域为 $[0,1]$. 故答案为 $[0,1]$.

【例 14】 已知函数 $f(x^2-x)$ 定义域为 $(0,2)$，则 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ 定义域是________.