第 3 章　拟双单子的 Drinfeld 扭元及在独异 Hom-量子群上的应用

本章中, 我们将给出拟双单子和双单子的 Drinfeld 扭元及上述理论在独异 Hom-量子群上的应用, 并证明独异 Hom-量子群和 Hom-Hopf 代数之间的规范等价性.

3.1　拟双单子的 Drinfeld 扭元

本节中, 总是假定 $(F, m, \eta, F_2, F_0, \phi, \iota, \kappa)$ 为张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的拟双单子, $\mathfrak{D} : \otimes \Rightarrow \otimes' : \mathcal{C}_F \times \mathcal{C}_F \to \mathcal{C}_F$ 为自然同构. 则由定理 2.3 可知 ${\mathcal{C}_F}' = (\mathcal{C}_F, \otimes', I, \mathfrak{a}', \mathfrak{l}', \mathfrak{r}')$ 恰为 $\mathfrak{D}$ 所诱导的张量范畴.

定义 3.1　在 2.3 节的条件下, 若自然同构 $\mathfrak{D}_{I,_} : I \otimes _ \Rightarrow I \otimes' _$ 满足 $\mathfrak{D}_{I,_} = \mathrm{id}$, 则称其对应的规范变换 $\xi = \mathfrak{D}^\flat$ 为**左正规的**.

命题 3.1　下列叙述等价:

(1) ξ 为左正规的;

(2) ξ^{*-1} 为左正规的;

(3) 对任意的 $X \in \mathcal{C}$, ξ 满足图 (3.1) 可换:

$$\begin{array}{ccc} I \otimes X & \xrightarrow{\xi_{I,X}} & FI \otimes FX \\ & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\eta_X} \searrow & \downarrow {\scriptstyle F_0\otimes\mathrm{id}} \\ & & I \otimes FX; \end{array} \tag{3.1}$$

(4) $\iota^\xi = \iota$;

(5) $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}$.

证明　显然. □

对偶地, 有如下结果.

定义 3.2　若 $\mathfrak{D}$ 满足 $\mathfrak{D}_{_,I} = \mathrm{id}$, 则称规范变换 $\xi = \mathfrak{D}^\flat$ 为**右正规的**.

命题 3.2　下列叙述等价:

(1) ξ 为右正规的;

(2) ξ^{*-1} 亦为右正规的;

(3) 对任意的 $X\in\mathcal{C}$, ξ 满足条件:

$$\begin{array}{ccc} X\otimes I & \xrightarrow{\xi_{X,I}} & FX\otimes FI \\ & {\scriptstyle \eta_X\otimes\mathrm{id}}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes F_0} & \\ & FX\otimes I; & \end{array} \tag{3.2}$$

(4) $\kappa^{\xi}=\kappa$;

(5) $\mathfrak{r}'=\mathfrak{r}$.

定义 3.3　若 ξ 同时为左正规和右正规的, 则称 ξ 为**正规的**.

注记 3.1　显然 ξ 为正规的当且仅当 $\iota^{\xi}=\iota$, 且 $\kappa^{\xi}=\kappa$; 亦当且仅当 $\mathcal{C}_F$ 与 $\mathcal{C}_F{}'$ 有相同的单位约束.

定义 3.4　若对任意的 $M,N,P\in\mathcal{C}_F$, $\mathfrak{D}$ 均满足条件:

$$\begin{array}{ccccc} (M\otimes N)\otimes P & \xrightarrow{\mathfrak{a}} & M\otimes(N\otimes P) & \xrightarrow{\mathfrak{D}} & M\otimes'(N\otimes P) \\ {\scriptstyle \mathfrak{D}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes'\mathfrak{D}} \\ (M\otimes N)\otimes' P & \xrightarrow[\mathfrak{D}\otimes'\mathrm{id}]{} & (M\otimes' N)\otimes' P & \xrightarrow[\mathfrak{a}]{} & M\otimes'(N\otimes' P) \end{array}$$

则称规范变换 $\xi=\mathfrak{D}^{\flat}$ 为 F 上的一个 **2-循环**.

命题 3.3　下列叙述等价:

(1) ξ 为 2-循环;

(2) ξ^{*-1} 为 2-循环;

(3) 对任意的 $X,Y,Z\in\mathcal{C}$, ξ 满足图 (3.3) 可换:

$$\begin{array}{ccccc} (X\otimes Y)\otimes Z & \xrightarrow{\phi_{X,Y,Z}} & FX\otimes(FY\otimes FZ) & \xrightarrow{\xi_{FX,FY\otimes FZ}} & FFX\otimes F(FY\otimes FZ) \\ {\scriptstyle \xi_{X\otimes Y,Z}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes F_2} \\ F(X\otimes Y)\otimes FZ & & & & FFX\otimes(FFY\otimes FFZ) \\ {\scriptstyle F_2(X,Y)\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\xi_{FFY,FFZ}} \\ (FX\otimes FY)\otimes FZ & & & & FFX\otimes(F^3Y\otimes F^3Z) \\ {\scriptstyle \xi_{FX,FY}\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle m_X\otimes m_Y^2\otimes m_Z^2} \\ (FFX\otimes FFY)\otimes FZ & \xrightarrow[\phi_{FFX,FFY,FZ}]{} & F^3X\otimes(F^3Y\otimes FFZ) & \xrightarrow[m_X^2\otimes m_Y^2\otimes m_Z]{} & FX\otimes(FY\otimes FZ) \end{array} \tag{3.3}$$

(4) $\phi^{\xi}=\phi$;

(5) $\mathcal{C}_F$ 与 $\mathcal{C}_F{}'$ 有完全相同的结合约束, 即 $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$.

证明　显然. □

定义 3.5　设 $F = (F, m, \eta, F_2, F_0, \phi, \iota, \kappa)$ 为张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的拟双单子. 若其规范变换 ξ 为正规 2-循环, 则称 ξ 为 F 的一个 **Drinfeld 扭元**.

推论 3.1　(1) 设 $F = (F, m, \eta, F_2, F_0, \phi, \iota, \kappa)$ 为张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的拟双单子, ξ 为其规范变换, 则 ξ 为 Drinfeld 扭元当且仅当 $\mathcal{C}_F{}'$ 与 $\mathcal{C}_F$ 有完全相同的结合约束与单位约束.

(2) 若 F 为 $\mathcal{C}$ 上的双单子, ξ 为 F 的规范变换, 则 ξ 为 Drinfeld 扭元当且仅当 $F' = (F, F_2^{\xi}, F_0, \phi^{\xi}, \iota^{\xi}, \kappa^{\xi})$ 亦为双单子.

证明　由注记 3.1 和命题 3.3 直接可证. □

例 3.1　设 H 为交换环 $\Bbbk$ 上的拟双代数, $l = r = 1_H$, 且设 $Q \in H \otimes H$ 为可逆元, 则由例 2.6 可知 Q 可诱导拟双单子 $F = H \otimes _$ 上的规范变换 ξ. 进一步地, 经直接验证可知, ξ 为正规的当且仅当 Q 满足条件:

$$\sum \varepsilon(Q^{(1)})Q^{(2)} = \sum Q^{(1)}\varepsilon(Q^{(2)}) = 1_H,$$

此时亦称 Q 为**正规的**; ξ 为 2-循环当且仅当 Q 满足

$$\begin{aligned} & \sum Q^{(1)}\vartheta^{(1)} \otimes Q'^{(1)}Q_1^{(2)}\vartheta^{(2)} \otimes Q'^{(2)}Q_2^{(2)}\vartheta^{(3)} \\ = & \sum \vartheta^{(1)}Q'^{(1)}Q_1^{(1)} \otimes \vartheta^{(2)}Q'^{(2)}Q_2^{(1)} \otimes \vartheta^{(3)}Q^{(2)}, \end{aligned}$$

此时亦称 Q 满足 **2-循环条件**.

特别地, 若 $\vartheta = 1_H \otimes 1_H \otimes 1_H$, 知此时 H 实质为双代数. 则 Q 为正规 2-循环等价于 Q 为双代数 H 的 Drinfeld 扭元 (关于双代数的 Drinfeld 扭元的详细讨论, 可见文献 [92]).

推论 3.2　(1) 若 H 为 $\Bbbk$ 上的拟双代数, Q 为 H 的规范变换, 则 Q 为 Drinfeld 扭元当且仅当 $\mathrm{Rep}(H^Q)$ 与 $\mathrm{Rep}(H)$ 有完全相同的结合约束与单位约束.

(2) 若 H 为 $\Bbbk$ 上的双代数, Q 为 H 的规范变换, 则 Q 为 Drinfeld 扭元当且仅当 H^Q 亦为双代数.

证明　由推论 3.1 和例 3.1 直接可证. □

下设 $H = (H, \alpha_H, \mu, 1_H, \Delta, \varepsilon, \vartheta, l, r)$ 为交换环 $\Bbbk$ 上的一个 Hom-拟双代数.

定义 3.6　(1) 若 H 的规范变换 Q 满足如下条件:

$$\begin{aligned} & \sum (1_H\alpha_H(Q^{(1)}))\vartheta^{(1)} \otimes (Q'^{(1)}Q_1^{(2)})\vartheta^{(2)} \otimes (Q'^{(2)}Q_2^{(2)})\vartheta^{(3)} \\ = & \sum \vartheta^{(1)}(Q'^{(1)}Q_1^{(1)}) \otimes \vartheta^{(2)}(Q'^{(2)}Q_2^{(1)}) \otimes \vartheta^{(3)}(1_H\alpha_H(Q^{(2)})), \end{aligned}$$

则称 Q 为一个 **2-循环**;

(2) 若 Q 满足如下条件:

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)Q=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})Q=1_H,$$

则称 Q 为**正规的**;

(3) 若 Q 为正规 2-循环, 则称 Q 为 H 的一个 **Drinfeld 扭元**.

命题 3.4　(1) Q 为 H 的 2-循环当且仅当由公式 (2.25) 所诱导的自然变换 ξ 为拟双单子 F 的 2-循环;

(2) Q 为 2-循环当且仅当 $\vartheta=\vartheta^Q$(其中 ϑ^Q 的定义见公式 (2.27));

(3) Q 为正规的当且仅当 ξ 亦为正规的;

(4) Q 为正规的当且仅当 $l=l^Q$, 且 $r=r^Q$(其中 l^Q, r^Q 的定义见公式 (2.28));

(5) Q 为 H 的 Drinfeld 扭元当且仅当 ξ 为拟双单子 F 的 Drinfeld 扭元;

(6) Q 为 Drinfeld 扭元当且仅当 $\mathrm{Rep}(H)$ 与 $\mathrm{Rep}(H^Q)$ 有完全相同的结合约束与单位约束 (其中 H^Q 的定义见命题 2.5);

(7) 特别地, 若 H 为 Hom-双代数, 则 Q 为 Drinfeld 扭元当且仅当 H^Q 亦为 Hom-双代数.

证明　结合命题 2.3, 其中的 (1) 与 (3) 直接验证可得, 进而知 (5) 成立. 而 (2) 可由命题 3.3 得到; (4) 可由注记 3.1 得到; (6) 与 (7) 可由推论 3.2 得到. □

3.2　独异 Hom-量子群的表示范畴

设 $\Bbbk$ 为交换环. 本节中, 我们将先给出 $\Bbbk$ 上的独异 Hom-双代数与双单子之间的联系, 再讨论独异 Hom-量子群表示范畴的结构.

设 (H,α) 为 $\mathcal{H}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$ 中的对象, $m:H\otimes H\to H$(其对应法则记为 $m(a\otimes b)=ab$), $\eta:\Bbbk\to H$(对应法则记为 $\eta(1_\Bbbk)=1_H$), $\Delta:H\to H\otimes H$(对应法则记为 $\Delta(h)=h_1\otimes h_2$), $\varepsilon:H\to\Bbbk$ 均为 $\mathcal{H}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$ 中的态射. 则有如下结论.

推论 3.3　任取整数 $i,j\in\mathbb{Z}$, 在 $\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$ 中考虑 H 对应的左张量函子如下:

$$F=H\otimes_:\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})\to\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M}),\ (X,\alpha_X)\mapsto(H\otimes X,\alpha_H\otimes\alpha_X).$$

在 F 上定义如下结构:

- $\ddot{m}:FF\Rightarrow F$ 定义为

$$\ddot{m}_X:H\otimes(H\otimes X)\to H\otimes X,\ h\otimes(g\otimes x)\mapsto\alpha_H^{-1}(h)g\otimes\alpha_X(x);$$

- $\ddot{\eta}:\mathrm{id}_{\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})}\Rightarrow F$ 定义为

$$\ddot{\eta}_X: X\to H\otimes X,\ x\mapsto 1_H\otimes\alpha_X^{-1}(x),$$

- $F_2: F\otimes\Rightarrow F\otimes F$ 定义为

$$\begin{aligned} F_2(X,Y): H\otimes(X\otimes Y) &\to (H\otimes X)\otimes(H\otimes Y),\\ h\otimes(x\otimes y) &\mapsto (\alpha_H^{-i}(h_1)\otimes x)\otimes(\alpha_H^{-j}(h_2)\otimes y);\end{aligned}$$

- $F_0: F(\Bbbk)\to\Bbbk$ 定义为

$$F_0: H\otimes\Bbbk\to\Bbbk,\ h\otimes 1_\Bbbk\mapsto\varepsilon(h),$$

则下列结论成立:

(1) $F=(F,\ddot{m},\ddot{\eta})$ 为 $\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$ 上的单子当且仅当 $(H,\alpha,m,1_H)$ 为 $\Bbbk$ 上的独异 Hom-代数;

(2) $F=(F,F_2,F_0)$ 为 $\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$ 上的余张量函子当且仅当 $(H,\alpha,\Delta,\varepsilon)$ 为 $\Bbbk$ 上的独异 Hom-余代数;

(3) $F=(F,\ddot{m},\ddot{\eta},F_2,F_0)$ 为 $\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$ 上的双单子当且仅当 $(H,\alpha,m,1_H)$ 为 $\Bbbk$ 上的独异 Hom-双代数.

证明 (1) 的证明与定理 1.2(1) 类似, 不再赘述. 下证 (2).

$\Leftarrow$: 设 $(H,\alpha,\Delta,\varepsilon)$ 为独异 Hom-余代数, 此时任取 $(X,\alpha_X),(Y,\alpha_Y),(Z,\alpha_Z)\in\overline{\mathcal{H}}^{i,j}({}_{\Bbbk}\mathcal{M})$, $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$, $h\in H$, 知有:

$$\begin{aligned} &(a_{H\otimes X,H\otimes Y,H\otimes Z}\circ(F_2(X,Y)\otimes\mathrm{id}_{H\otimes Z})\circ F_2(X\otimes Y,Z))(h\otimes((x\otimes y)\otimes z))\\ =\ & a_{H\otimes X,H\otimes Y,H\otimes Z}(((\alpha^{-2i}(h_{11})\otimes x)\otimes(\alpha^{-i-j}(h_{12})\otimes y))\otimes(\alpha^{-j}(h_2)\otimes z))\\ =\ & (\alpha^{-i}(h_1)\otimes\alpha_X^{i+1}(x))\otimes((\alpha^{-i-j}(h_{21})\otimes y)\otimes(\alpha^{-2j}(h_{22})\otimes\alpha_Z^{-j-1}(z)))\\ =\ & ((\mathrm{id}_{H\otimes X}\otimes F_2(Y,Z))\circ F_2(X,Y\otimes Z))(h\otimes(\alpha_X^{i+1}(x)\otimes(y\otimes\alpha_Z^{-j-1}(z))))\\ =\ & ((\mathrm{id}_{H\otimes X}\otimes F_2(Y,Z))\circ F_2(X,Y\otimes Z)\circ(\mathrm{id}_H\otimes a_{X,Y,Z}))(h\otimes((x\otimes y)\otimes z)),\end{aligned}$$

故 F_2 与结合约束 a 的兼容性条件成立. 同理可证明 F_2, F_0 与单位约束 l, r 的兼容性条件. 进而 F 满足定义 1.10.

$\Rightarrow$: 若 F 为余张量函子, 则在定义 1.10 中令 $X=Y=Z=\Bbbk$, 取 $x=y=z=1_\Bbbk$, 即可得到 $(H,\alpha,\Delta,\varepsilon)$ 为独异 Hom-余代数.

(3) 在 (1) 与 (2) 成立的前提下, 同理可证定义 1.11 中的兼容性条件 (M1)$\sim$兼容性条件 (M4) 成立, 当且仅当 Δ 与 ε 均为 Hom-代数同态. 故结论成立. $\square$

注记 3.2　应当注意, 由推论 3.3, H 的左 Hom-模范畴理应与双单子 $F = H \otimes _$ 的模范畴完全一致. 但此时任取左 H-Hom-模 M, N, 由 F_2 的定义方式即可知 $M \otimes N$ 的 H-Hom-模结构为

$$h \cdot (m \otimes n) = \alpha^{-i}(h_1) \cdot m \otimes \alpha^{-j}(h_2) \cdot n, \ \forall h \in H, m \in M, n \in N,$$

其与常规 Hom 意义下的张量积模作用

$$h \cdot (m \otimes n) = \alpha^{i}(h_1) \cdot m \otimes \alpha^{j}(h_2) \cdot n$$

并不相符. 由于后者更为直观, 故为方便起见, 下文中我们将采用后者作为张量积的模结构.

下面将给出独异 Hom-量子群表示范畴的张量结构与辫子结构.

设 (H, α) 为交换环 $\Bbbk$ 上的独异 Hom-量子群, 对任意的整数 $i, j \in \mathbb{Z}$, 以 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 表示具有如下结构的范畴:

- $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 中的对象为左 H-Hom-模, 态射为 H-Hom-模同态;
- 任取对象 $(M, \alpha_M), (N, \alpha_N) \in \mathrm{Rep}^{i,j}(H)$, 其张量积 $M \otimes N$ 为 $(M \otimes N, \alpha_M \otimes \alpha_N)$, 其上的 H-Hom-模结构为

$$h \cdot (m \otimes n) = \alpha^{i}(h_1) \cdot m \otimes \alpha^{j}(h_2) \cdot n, \ \forall h \in H, m \in M, n \in N;$$

- 任取态射 $f, g \in \mathrm{Rep}^{i,j}(H)$, 其张量积为其作为 $\Bbbk$-线性映射的张量积, 换言之, 从 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 到 ${}_{\Bbbk}\mathcal{M}$ 的忘却函子为忠实函子;
- $(\Bbbk, \mathrm{id}_{\Bbbk})$ 关于 H 在其上的平凡作用, 亦为 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 中的对象.

引理 3.1　$\Bbbk$ 为 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 中的张量单位.

证明　首先易知 H 在 $(\Bbbk, \mathrm{id}_{\Bbbk})$ 与 $(M \otimes N, \alpha_M \otimes \alpha_N)$ 上的作用均为 Hom-模作用.

其次, 任取 $M \in \mathrm{Rep}^{i,j}(H)$, 考虑如下 $\Bbbk$-线性映射

$$l_M : \ \Bbbk \otimes M \to M, \quad \lambda \otimes m \mapsto \lambda \alpha_M^{-j+1}(m), \ \ \lambda \in \Bbbk, \ m \in M.$$

显然 l 为自然变换, 且满足 $\alpha_M \circ l_M = l_M \circ (\mathrm{id}_{\Bbbk} \otimes \alpha_M)$. 下证 l_M 为 H-线性映射. 事实上, 显然下式成立:

$$\begin{aligned} l_M(h \cdot (\lambda \otimes m)) &= l_M(\varepsilon(h_1)\lambda \otimes \alpha^{j}(h_2) \cdot m) \\ &= \lambda \alpha_M^{-j+1}(\alpha^{j-1}(h) \cdot m) \\ &= \lambda h \cdot \alpha_M^{-j+1}(m) = h \cdot l_M(\lambda \otimes m). \end{aligned}$$

此时即得到左单位约束 l. 其逆元为

$$l_M^{-1}:\ M\to\Bbbk\otimes M,\quad m\mapsto 1_\Bbbk\otimes\alpha_M^{j-1}(m),\ \ m\in M.$$

同理, 定义右单位约束如下:

$$r_M:\ M\otimes\Bbbk\to M,\ \ m\otimes\lambda\mapsto\lambda\alpha_M^{-i+1}(m),\ \ \lambda\in\Bbbk,\ m\in M,$$
$$r_M^{-1}:\ M\to M\otimes\Bbbk,\ \ m\mapsto\alpha_M^{i-1}(m)\otimes 1_\Bbbk,\ \ m\in M.$$

易证 r 与 r^{-1} 为互逆的一对自然变换. □

定理 3.1 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 为张量范畴.

证明 首先定义结合约束. 对任意的 $M,N,P,Q\in\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$, 考虑

$$a_{M,N,P}((m\otimes n)\otimes p)=\alpha_M^{-i+1}(m)\otimes(n\otimes\alpha_P^{j-1}(p)),\ m\in M,\ n\in N,\ p\in P.$$

易知 a 为自然变换且满足

$$a_{M,N,P}\circ(\alpha_M\otimes(\alpha_N\otimes\alpha_P))=((\alpha_M\otimes\alpha_N)\otimes\alpha_P)\circ a_{M,N,P}.$$

又知对任意的 $h\in H$, 有

$$\begin{aligned}
&a_{M,N,P}(h\cdot((m\otimes n)\otimes p))\\
=&\alpha_M^{-i+1}(\alpha^{2i}(h_{11})\cdot m)\otimes(\alpha^{i+j}(h_{12})\cdot n\otimes\alpha_P^{j-1}(\alpha^j(h_2)\cdot p))\\
=&\alpha^i(h_1)\cdot\alpha_M^{-i+1}(m)\otimes(\alpha^{i+j}(h_{21})\cdot n\otimes\alpha^{2j}(h_{22})\cdot\alpha_P^{j-1}(p))\\
=&h\cdot(\alpha_M^{-i+1}(m)\otimes(n\otimes\alpha_P^{j-1}(p)))\\
=&h\cdot(a_{M,N,P}((m\otimes n)\otimes p)),
\end{aligned}$$

故 $a_{M,N,P}$ 满足 H-线性条件. 又显然 a 可逆, 故 a 为 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 中的自然同构.

其次, 易知 a 满足五边形公理. 事实上, 易知有

$$\begin{aligned}
&((\mathrm{id}_M\otimes a_{N,P,Q})\circ a_{M,N\otimes P,Q}\circ(a_{M,N,P}\otimes\mathrm{id}_Q))(((m\otimes n)\otimes p)\otimes q)\\
=&(\mathrm{id}_M\otimes a_{N,P,Q})(\alpha_M^{-2i+2}(m)\otimes((n\otimes\alpha_P^{j-1}(p))\otimes\alpha_Q^{j-1}(q)))\\
=&\alpha_M^{-2i+2}(m)\otimes(\alpha_N^{-i+1}(n)\otimes(\alpha_P^{j-1}(p)\otimes\alpha_Q^{2j-2}(q)))\\
=&a_{M,N,P\otimes Q}((\alpha_M^{-i+1}(m)\otimes\alpha_N^{-i+1}(n))\otimes(p\otimes\alpha_Q^{j-1}(q)))\\
=&(a_{M\otimes N,P,Q}\circ a_{M,N,P\otimes Q})(((m\otimes n)\otimes p)\otimes q).
\end{aligned}$$

故五边形公理成立.

最后, 显然 a, l, r 满足三角形公理. 故结论成立. □

注记 3.3　显然若 H 余交换, 则任取整数 $i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$, 必有 $\mathrm{Rep}(H) = (\mathrm{Rep}^{i,j}(H), \mathrm{Rep}^{i',j'}(H))$ 为双张量范畴.

定义 3.7　设 (H, α) 为独异 Hom-量子群. 若存在可逆元 $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in H \otimes H$, 满足下列条件:

$$\begin{cases} \text{(Q1) } (\alpha \otimes \alpha)R = R; \\ \text{(Q2) } R\Delta(h) = \Delta^{op}(h)R; \\ \text{(Q3) } R_1^{(1)} \otimes R_2^{(1)} \otimes R^{(2)} = r^{(1)} \otimes R^{(1)} \otimes r^{(2)}R^{(2)}; \\ \text{(Q4) } R^{(1)} \otimes R_1^{(2)} \otimes R_2^{(2)} = r^{(1)}R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes r^{(2)}, \end{cases}$$

其中 $h \in H$, $r = R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} = r^{(1)} \otimes r^{(2)}$, 则称 R 为 H 上的一个 R-**矩阵**, 称 (H, α, R) 为一个**拟三角独异 Hom-量子群**.

例 3.2　设 (A, R) 为 $\Bbbk$ 上的一个拟三角 Hopf 代数, 且 $\alpha : A \to A$ 为 Hopf 代数自同构. 若 R 在 α 下保持不变, 即满足 $(\alpha \otimes \alpha)(R) = R$, 则结合例 1.13 可知, $({}^{\alpha}A, \alpha, R)$ 恰为一个拟三角独异 Hom-量子群.

反之, 若 (H, α, R) 为拟三角独异 Hom-量子群, 则 $({}_{\alpha}H, R)$ 恰为一个拟三角 Hopf 代数.

例 3.3　设 $\Bbbk$ 为数域, H_4 为 $\Bbbk$ 上的 4 维 Sweedler-Hopf 代数, 即

$$H_4 = k\{1_H, g, x, y | g^2 = 1_H, x^2 = 0, y = gx = -xg\},$$

其具体结构如下:

$$\Delta(g) = g \otimes g,\ \Delta(x) = x \otimes 1_H + g \otimes x,\ \Delta(y) = y \otimes g + 1_H \otimes y,$$
$$\varepsilon(g) = 1,\ \varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0,\ S(g) = g,\ S(x) = -y,\ S(y) = x.$$

则由文献 [109] 中 Example 10.1.17 可知, H_4 恰为一个拟三角 Hopf 代数, 其上的 R-矩阵具有形式:

$$R_\kappa = \frac{1}{2}(1_H \otimes 1_H + 1_H \otimes g + g \otimes 1_H - g \otimes g) + \frac{\kappa}{2}(x \otimes x - x \otimes y + y \otimes x + y \otimes y),$$

其中 κ 为 $\Bbbk$ 中任意常数.

又由文献 [110] 中 Example 3.5 可知, H_4 上的 Hopf 代数自同构 α 在基

$1_H, g, x, y$ 下的矩阵必具有形式:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

其中 $c \in \Bbbk$ 且 $c \neq 0$. 故此时由例 3.2 知, ${}^{\alpha}H_4$ 为独异 Hom-量子群, 称之为 **4 维 Sweedler 独异 Hom-量子群**, 且更进一步地, ${}^{\alpha}H_4$ 为拟三角独异 Hom-量子群, 其上的 R-矩阵为如下形式:

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1_H \otimes 1_H + 1_H \otimes g + g \otimes 1_H - g \otimes g) + \\ \qquad \dfrac{\kappa}{2}(x \otimes x - x \otimes y + y \otimes x + y \otimes y), & c^2 = 1\text{时}; \\ \dfrac{1}{2}(1_H \otimes 1_H + 1_H \otimes g + g \otimes 1_H - g \otimes g), & c^2 \neq 1\text{时}, \end{cases}$$

其中 κ 为 $\Bbbk$ 中任意常数.

命题 3.5 设 (H, α, R) 为拟三角独异 Hom-量子群. 则 R 满足如下 Hom-型量子 Yang-Baxter 方程:

$$(R_{12}R_{13})R_{23} = R_{23}(R_{13}R_{12}), \quad R_{12}(R_{13}R_{23}) = (R_{23}R_{13})R_{12},$$

其中 $R_{12} = R \otimes 1_H$, $R_{23} = 1_H \otimes R$, $R_{13} = (t \otimes \mathrm{id})R_{23}$(此处 t 为换位映射).

证明 显然成立. □

定理 3.2 设 (H, α) 为独异 Hom-量子群, R, Q 为 $H \otimes H$ 中任意取定的元素. 定义如下线性映射:

$$c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M, \quad m \otimes n \mapsto \alpha^i(R^{(2)}) \cdot \alpha_N^{i-j-1}(n) \otimes \alpha^j(R^{(1)}) \cdot \alpha_M^{j-i-1}(m),$$
$$c'_{M,N} : N \otimes M \to M \otimes N, \quad n \otimes m \mapsto \alpha^i(Q^{(1)}) \cdot \alpha_M^{i-j-1}(m) \otimes \alpha^j(Q^{(2)}) \cdot \alpha_N^{j-i-1}(n),$$

其中 $(M, \alpha_M), (N, \alpha_N) \in \mathrm{Rep}^{i,j}(H)$, 则 c 为 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 中以 c' 为逆的辫子, 当且仅当 R 为 H 中的 R-矩阵, 且其逆为 Q.

证明 首先易知 c 与 c' 均为 $\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$ 中的自然变换.

(1) 若 R 满足 $(\alpha \otimes \alpha)R = R$, 则易知

$$c_{M,N} \circ \alpha_{M,N} = \alpha_{N \otimes M} \circ c_{M,N}.$$

若 R 同时还满足对任意的 $h \in H$, 均有 $R\Delta(h) = \Delta^{op}(h)R$ 成立, 则易知任取 $m \in M$, $n \in N$, 必有

$$c_{M,N}(h \cdot (m \otimes n))$$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha^i(R^{(2)})\cdot\alpha_N^{i-j-1}(\alpha^j(h_2)\cdot n)\otimes\alpha^j(R^{(1)})\cdot\alpha_M^{j-i-1}(\alpha^i(h_1)\cdot m)\\
&=(\alpha^{i-1}(R^{(2)})\alpha^{i-1}(h_2))\cdot a_N^{i-j}(n)\otimes(\alpha^{j-1}(R^{(1)})\alpha^{j-1}(h_1))\cdot a_M^{j-i}(m)\\
&=\alpha^i(h_1)\cdot(\alpha^iR^{(2)})\cdot a_N^{i-j-1}(n)\otimes\alpha^j(h_2)\cdot(\alpha^jR^{(1)})\cdot a_M^{j-i-1}(m)\\
&=h\cdot(c_{M,N}(m\otimes n)),
\end{aligned}
$$

即 $c_{M,N}\in Mor(\mathrm{Rep}^{i,j}(H))$.

反之, 若 $c_{M,N}\in Mor(\mathrm{Rep}^{i,j}(H))$, 则 c 显然为 H-线性的且满足与 Hom 结构映射的兼容性, 即有 $c_{M,N}\circ\alpha_{M\otimes N}=\alpha_{N\otimes M}\circ c_{M,N}$. 此时, 取 $M=N=H$, $m=n=1_H$, 则立即可知条件 (Q1) 与条件 (Q2) 成立.

(2) 设 Q 为 R 的逆元, 则 Q 必满足 $(\alpha\otimes\alpha)(Q)=Q$. 故任取 $m\in M$, $n\in N$, 可知有

$$
\begin{aligned}
&c'_{M,N}(c_{M,N}(m\otimes n))\\
&=\alpha^i(Q^{(1)})\cdot\alpha_M^{i-j-1}(\alpha^j(R^{(1)})\cdot\alpha_M^{j-i-1}(m))\otimes\alpha^j(Q^{(2)})\cdot\\
&\quad\alpha_N^{j-i-1}(\alpha^i(R^{(2)})\cdot\alpha_N^{i-j-1}(n))\\
&=\alpha^{i-1}(Q^{(1)}R^{(1)})\cdot\alpha_M^{-1}(m)\otimes\alpha^{j-1}(Q^{(2)}R^{(2)})\cdot\alpha_N^{-1}(n)\\
&=m\otimes n.
\end{aligned}
$$

同理可证 $c_{M,N}\circ c'_{M,N}=\mathrm{id}_{N\otimes M}$. 故 c' 为 c 的逆元.

反之, 若 c' 为 c 的逆元, 此时取 $M=N=H$, $m=n=1_H$, 则易算得 $RQ=QR=1_H\otimes 1_H$.

(3) 设 R 满足条件 (Q4), 则易知对任意的 $M,N,P\in\mathrm{Rep}^{i,j}(H)$, 均有

$$
\begin{aligned}
&(a_{N,P,M}\circ c_{M,N\otimes P}\circ a_{M,N,P})((m\otimes n)\otimes p)\\
&=a_{N,P,M}((\alpha^{2i}(R_1^{(2)})\cdot\alpha_N^{i-j-1}(n)\otimes\alpha^{i+j}(R_2^{(2)})\cdot\alpha_P^{i-2}(p))\otimes\alpha^j(R^{(1)})\cdot\alpha_M^{j-2i}(m))\\
&=\alpha^{i+1}(R^{(2)})\cdot\alpha_N^{-j}(n)\otimes(\alpha^{i+j}(r^{(2)})\cdot\alpha_P^{i-2}(p)\otimes\alpha^{2j-1}(r^{(1)}R^{(1)})\cdot\alpha_M^{2j-2i-1}(m)))\\
&=\alpha(R^{(2)})\cdot\alpha_N^{-j}(n)\otimes(\alpha^i(r^{(2)})\cdot\alpha_P^{i-2}(p)\otimes\alpha^j(r^{(1)})\cdot(\alpha^{2j-i-1}(R^{(1)})\cdot\alpha_M^{2j-2i-2}(m)))\\
&=(\mathrm{id}_N\otimes(c_{M,P}))(\alpha(R^{(2)})\cdot\alpha_N^{-j}(n)\otimes(\alpha^j(R^{(1)})\cdot\alpha_M^{j-i-1}(m)\otimes\alpha_P^{j-1}(p)))\\
&=((\mathrm{id}_N\otimes c_{M,P})\circ a_{N,M,P}\circ(c_{M,N}\otimes\ \mathrm{id}_P))((m\otimes n)\otimes p).
\end{aligned}
$$

即定义 1.14 中的图 (1.15) 可换. 同理, 若 R 满足条件 (Q3), 则 c 必满足图 (1.16).

反之, 若 c 为辫子, 则在图 (1.15) 与图 (1.16) 中令 $M=N=P=H$, 且 $m=n=p=1_H$, 则立即可知条件 (Q3) 与条件 (Q4) 成立. □