

第 1 章

行 列 式

在线性代数中,行列式是一个基本工具,讨论很多问题时都要用到它.本章先简单介绍二、三阶行列式的定义及按第一行的展开式,再进一步讨论 n 阶行列式.本章主要内容: n 阶行列式的定义及其性质;行列式的计算;求解一类非齐次线性方程组的克莱姆(Cramer)法则,以及由此得到的方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组有非零解的必要条件.

1.1 n 阶行列式的定义及性质

行列式的概念首先是在求解未知元个数与方程个数相同的一次方程组时提出来的(以后常把一次方程组称为**线性方程组**(system linear equations)),例如对于未知元 x_1, x_2 的一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

用消元法求解时,用系数 a_{22} 乘以方程(1.1),减去系数 a_{12} 乘以方程(1.2),则得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

再用系数 a_{11} 乘以方程(1.2),减去系数 a_{21} 乘以方程(1.1),则得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.3)$$

人们从(1.3)式中发现,其分子、分母的表示式具有相似的结构.若记

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (1.4)$$

则(1.3)式可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

我们把(1.4)式中的 D 称为**二阶行列式**(second-order determinant).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

图 1.1 二阶行列式对角线方法

二阶行列式(1.4)中的两项可按图 1.1 所示的对角线方法得到,即隐含的正方形的左上角到右下角的对角线上的两个数相乘取正号,右上角到左下角的对角线上的两个数相乘取负号,再取和.

对于未知元 x_1, x_2, x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.5)$$

仿照二元线性方程组的消元过程,同样可以得到一些由系数及右端项相乘的项所组成的代数式.

对于由 9 个元素(element) a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$)排成三行三列的式子,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (1.6)$$

并称它为三阶行列式(third-order determinant)(横为行(row),竖为列(column)).

三阶行列式(1.6)中的 6 项是按图 1.2 所示的方法(称为萨吕法(Sarrus rule))得到的,即隐含的长方形的左上方到右下方的三条对角线上的三个元素相乘取正号,右上方到左下方的三条对角线上的三个元素相乘取负号,再取和.

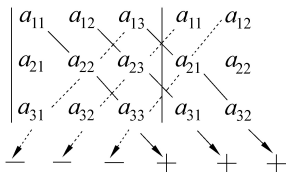


图 1.2 三阶行列式的萨吕法

如果三元线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

用消元法求解这个方程组,可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \quad (1.7)$$

其中 D_j ($j=1, 2, 3$)是用常数项 b_1, b_2, b_3 替换 D 中的第 j 列所得到的三阶行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

但是,对于 n 阶行列式($n>3$),不能如图 1.2(萨吕法)那样定义. 因为如果像图 1.2 那样定义 n 阶行列式,当 $n>3$ 时,它将失去像二、三阶行列式那样的统一运算性质,而且对 n 元线性方程组也得不到像(1.7)式那样的求解公式. 因此,对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义. 在代数中,它可以用三种不同的方法做定义,我们采用简明的递归法做定义.

将(1.6)式右端的展开式(expansion)做归纳,可得

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \\ &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \end{aligned}$$

其中,括号内实际上是一个个二阶行列式的形式.这样,这个表达式还可以表示为某一行的元素与对应的一些二阶行列式相乘的形式,按照列元素进行归纳可以得到相似的表达式.下面我们按照第一行展开的方式来讨论,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

其中

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式(complementary minor),并称 $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$, $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$ 分别为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式(algebraic complement).如此,(1.8)式即为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

同样

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \quad (1.9)$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |a_{22}| = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} |a_{21}| = -a_{21}.$$

这里 $|a_{22}|, |a_{21}|$ 是一阶行列式(不是数的绝对值).我们把 a 的一阶行列式 $|a|$ 定义为 a .

如果把(1.8)式,(1.9)式分别作为三阶、二阶行列式的定义,那么这种定义的方法是统一的,它们都是用低阶行列式定义高一阶的行列式.因此人们很自然地会想到,用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式.对于这样定义的各阶行列式,将会有统一的运算性质.下面我们给出 n 阶行列式的递归法定义.

1.1.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1 由 n^2 个数 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 组成的 n 阶行列式(determinant)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{简记作 } |a_{ij}|_1^n) \quad (1.10)$$

是一个算式.当 $n=1$ 时,定义 $D = |a_{11}| = a_{11}$;当 $n \geq 2$ 时,定义

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}, \quad (1.11)$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j},$$

M_{1j} 是 D 中去掉第 1 行和第 j 列全部元素后, 按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式, 即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j=1, 2, \cdots, n,$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式 (complementary minor), A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式 (algebraic complement).

在 (1.10) 式、(1.11) 式中, 出现了常见的水平三点省略号“ $\cdots$ ”, 用来表示在水平方向上按规律排列的省略项. 此外, 还用到竖直三点省略号“ $\vdots$ ”, 表示在竖直方向上按规律排列的省略项. 在后续的表达式中还会用到对角三点省略号“ $\cdot\cdot\cdot$ ”和反向对角三点省略号“ $\cdot\cdot$ ”, 用来表示在所给的方向上按规律排列的省略项.

在 (1.10) 式中, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线 (leading diagonal), 相应地, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角元 (leading diagonal elements), 另一条 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 所在的对角线称为行列式的副对角线 (minor diagonal).

由定义 1.1 可见, 行列式这个算式是由其 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 构成的 n 次齐次多项式 (称作展开式 (expansion)), 二阶行列式的展开式中共有 $2!$ 项; 三阶行列式的展开式中共有 $3!$ 项; n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项, 其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积, 在全部 $n!$ 项中, 带正号的项和带负号的项各占一半 (以上结论可根据定义, 用数学归纳法给予证明). 当第一行元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时, n 阶行列式是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次多项式.

例 1.1 证明 n 阶下三角行列式 (lower triangular determinant) (当 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 对 n 作数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立, 则由定义得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式, 根据归纳假设得

$$D_n = a_{11} (a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}).$$

同理可证, n 阶对角行列式 (非主对角线上的元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 1.2 计算 n 阶行列式(副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1} & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中, $a_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, “*” 表示元素为任意数.

解 注意, 对一般的 n , 这个行列式不等于 $-a_1 a_2 \cdots a_n$. 利用行列式定义, 可得到

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1},$$

再利用上面 n 阶与 $n-1$ 阶行列式之间的关系(通常称为**递推关系**(recursion relation)或**递推公式**(recursion formula)), 递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &\vdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

例如, 当 $n=2, 3$ 时, $D_2 = -a_1 a_2$, $D_3 = -a_1 a_2 a_3$; 当 $n=4, 5$ 时, $D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$, $D_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

此结论对副对角线以下元素全为 0 的行列式也成立. 利用下面讲的性质 1.2, 对最后一列展开, 也得同样的递推公式.

1.1.2 n 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式, 一般是较烦琐的. 因此, 我们要从定义推导出行列式的一些性质, 以简化行列式的计算.

性质 1.1 行列式的行与列(按原顺序)互换, 其值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

这个性质可用数学归纳法证明,由于证明的表述较烦琐,我们略去其证明,有兴趣的读者可参阅本章附录.

有了这个性质,行列式对行成立的性质都适用于列. 以下我们仅对行讨论行列式的性质.

性质 1.2 行列式(1.10)对任一行按下式展开,其值相等,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n, \quad (1.13)$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

M_{ij} 是 D 中去掉第 i 行和第 j 列全部元素后按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式,它称为 a_{ij} 的余子式(complementary minor), A_{ij} 称为 a_{ij} 的代数余子式(algebraic complement).

证法与性质 1.1 的证明类似,也用数学归纳法(参阅本章附录).

性质 1.3(线性性质) 有以下两条:

$$(i) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k a_{i1} & k a_{i2} & \cdots & k a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

$$(ii) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

为了表述简单,将第 i 行乘非零常数 k 简记为 $k r_i$; 将第 i 列乘非零常数 k 简记为 $k c_i$.

利用性质 1.2, 将(1.14)式, (1.15)式中等号左端的行列式按第 i 行展开, 立即可得等号右端的结果.

由(1.14)式又可得:

推论 1 某行元素全为零的行列式其值为零.

性质 1.4 行列式中两行对应元素全相等,其值为零,即当 $a_{il} = a_{jl}$ ($i \neq j, l=1,2,\cdots,n$) 时,有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.16)$$

证 用数学归纳法证明. 结果对二阶行列式显然成立, 假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 在 n 阶的情况下, 对第 k 行展开 ($k \neq i, j$), 则

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^n a_{kl}A_{kl}.$$

由于余子式 M_{kl} ($l=1, 2, \dots, n$) 是 $n-1$ 阶行列式, 且其中都有两行元素相同, 所以 $A_{kl} = (-1)^{k+l}M_{kl} = 0$ ($l=1, 2, \dots, n$), 故 $D=0$. ■

由性质 1.3(i) 和性质 1.4, 立即可得:

推论 2 行列式中两行对应元素成比例 (即 $a_{jl} = ka_{il}$, $i \neq j$, $l=1, 2, \dots, n$, k 是常数), 其值为零.

性质 1.5 在行列式中, 把某行各元素分别乘非零常数 k , 再添加到另一行的对应元素上, 行列式的值不变 (简称: 对行列式做倍加行变换, 其值不变), 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

利用性质 1.3(ii) 和其推论 2, 可证明 (1.17) 式成立.

为了表述简单, 将第 i 行乘非零常数 k 后加到第 j 行简记为 $kr_i + r_j$; 将第 i 列乘非零常数 k 后加到第 j 列简记为 $kc_i + c_j$.

性质 1.6 (反对称性质) 行列式的两行对换, 行列式的值反号.

证 重复用性质 1.5, 然后利用性质 1.3(i), 就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_j + r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{(-1)r_i + r_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow{r_j + r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

为了表述简单,将第 i 行与第 j 行对换简记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;将第 i 列与第 j 列对换简记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 1.7 行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.18)$$

证 根据性质 1.2,行列式(1.10)对 j 行展开得

$$D = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk}.$$

因此,将行列式(1.10)中第 j 行的元素 $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$ 换成 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ 后所得的行列

式,其展开式就是 $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$, 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}.$$

由于上式右端的行列式第 i 行和第 j 行对应元素相等,故

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0.$$

对于行列式(1.10),我们可以把(1.11)式,(1.13)式,(1.18)式统一地写成

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} D,$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (1.19)$$

同样,行列式(1.10)按列展开,也有

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} D. \quad (1.20)$$

1.2 n 阶行列式的计算

这一节,我们通过例题来说明,利用行列式的定义和性质,计算 n 阶行列式的常用方法.

例 1.3 对于上三角行列式(upper triangular determinant)(当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$)有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

解 设 D' 表示将行列式 D 的行与列(按原顺序)互换所得的行列式,则利用性质 1.1 和例 1.1 的结果,即得

$$D = D' = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 1.4 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 对行列式做倍加行变换和两行对换,将其化为上三角行列式.先利用性质 1.5,把第 1 行分别乘 $1, -2, -1$ 再加到第 2, 3, 4 行上去得

$$\begin{aligned} D & \xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 \\ (-2)r_1 + r_3 \\ (-1)r_1 + r_4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{(-2)r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{5}{14}\right)r_3 + r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 57/14 \end{vmatrix} \\ & = (-1) \times 1 \times 1 \times (-14) \times (57/14) = 57. \end{aligned}$$

此例利用性质 1.5 和性质 1.6,把数字行列式化为上三角行列式,这是计算数字行列式的基本方法.但是对于三阶数字行列式,用萨吕法按对角线展开(计算 6 项乘积)可能更为简捷.

例 1.5 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 利用性质 1.5, 把行列式某行(列)元素化为只剩一个非零元, 再利用性质 1.2, 把行列式按该行(列)展开, 从而降阶计算. 这也是展开行列式的基本方法.

注意到 D 中第 2 列有一个 0, 再利用 $a_{22}=1$, 把第 2 行乘 -4 和 -2 分别加到第 1 行和第 3 行上去, 将第 2 列中其余元素化为 0, 然后对第 2 列展开, 得

$$\begin{aligned} D & \xrightarrow{\substack{(-4)r_2 + r_1 \\ (-2)r_2 + r_3}} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

再把第 3 列加到第 2 列, 按第 2 行展开

$$\begin{aligned} D & \xrightarrow{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{2+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -5 \times (-77 + 75) = 10. \end{aligned}$$

例 1.6 如果行列式 $D = |a_{ij}|_1^n$ 的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 就称 D 是反对称行列式(antisymmetric determinant)(其中 $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$).

证明奇数阶反对称行列式的值为零.

证 设

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

根据性质 1.1 有

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

再利用性质 1.3(i), 将每行提出公因数 (-1) , 即得